Soluzione della prova scritta di Meccanica Analitica del 31 maggio 2019 a cura di Sara Mastaglio

1) Denotando con G il baricentro della lamina quadrata, troviamo che

$$z_G = -\ell \cos\vartheta \boldsymbol{e}_z,$$

$$(D-E) = (2\ell \operatorname{sen}\vartheta - 2\ell)\, \boldsymbol{e}_x + \xi \boldsymbol{e}_y - 2\ell\cos\vartheta \boldsymbol{e}_x$$

e quindi

$$|D-E|^2 = 8\ell^2 - 8\ell^2 \operatorname{sen}\vartheta + \xi^2.$$

1. Per determinare le posizioni di equilibrio del sistema calcoliamo il potenziale:

$$U = -mgz_G - \frac{k}{2}|D-E|^2 = mg\ell\cos\vartheta - \frac{k}{2}\xi^2 + 4k\ell^2 \operatorname{sen}\vartheta + c$$

ed in seguito risolviamo il sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial \xi} = -k\xi = 0 \\ \dfrac{\partial U}{\partial \vartheta} = -mg\ell \operatorname{sen}\vartheta + 4k\ell^2\cos\vartheta = 0; \end{cases}$$

dalla prima equazione si ricava banalmente $\xi = 0$, dalla seconda invece $\operatorname{tg}\vartheta = \dfrac{4}{\lambda}$, da cui troviamo gli angoli $\vartheta_1 = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{4}{\lambda}\right)$ e $\vartheta_2 = \pi + \operatorname{arctg}\left(\dfrac{4}{\lambda}\right)$. Le due posizioni di equilibrio del sistema sono quindi

$$P_1\left(0; \operatorname{arctg}\left(\frac{4}{\lambda}\right)\right) \text{ e } P_2\left(0; \pi + \operatorname{arctg}\left(\frac{4}{\lambda}\right)\right).$$

2. Per la stabilità calcoliamo l'hessiano che risulta:

$$\mathcal{H}(\xi,\vartheta) = \begin{bmatrix} -k & 0 \\ 0 & -mg\ell\cos\vartheta - 4k\ell^2\operatorname{sen}\vartheta \end{bmatrix}.$$

Per determinare la stabilità delle due posizioni di equilibrio basta valutare il segno del termine $\mathcal{H}_{22}$ dell'hessiano: per P_1 otteniamo

$$\mathcal{H}_{22}(P_1) = -\frac{mg\ell\lambda}{\sqrt{\lambda^2+16}} - \frac{16k\ell^2}{\sqrt{\lambda^2+16}} < 0$$

che essendo una quantità sempre negativa indica la presenza di due autovalori negativi, pertanto la posizione P_1 è stabile.

Analogamente per la posizione P_2 otteniamo

$$\mathcal{H}_{22}(P_2) = \frac{mg\ell\lambda}{\sqrt{\lambda^2+16}} + \frac{16k\ell^2}{\sqrt{\lambda^2+16}} > 0$$

e quindi P_2 risulta instabile.

Osservazione: avremmo potuto capire il segno di $\mathcal{H}_{22}$ in modo alternativo, osservando che ϑ_1 sta nel primo quadrante (quindi sia $\operatorname{sen}\vartheta_1$ che $\cos\vartheta_1$ sono positivi), mentre ϑ_2 sta nel terzo (quindi $\operatorname{sen}\vartheta_2$ e $\cos\vartheta_2$ sono negativi) ed evitando così di calcolare seno e coseno a partire dalla tangente.

3. Per determinare la lagrangiana ci serve l'energia cinetica del sistema che possiamo calcolare nel punto A che ha velocità parallela alla velocità angolare $\boldsymbol{\omega}$:

$$K = \frac{1}{2}mv_A^2 + \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}\cdot \mathsf{J}_A\boldsymbol{\omega}.$$

Essendo $(A-O) = \xi\boldsymbol{e}_y$, risulta $\boldsymbol{v}_A = \dot{\xi}\boldsymbol{e}_y$ ed inoltre $\boldsymbol{\omega} = -\dot{\vartheta}\boldsymbol{e}_y$. Inoltre, fissando come sistema di riferimento solidale alla lamina quello centrato in A e con l'asse x' lungo il lato AD, $y' \equiv y$ e z' che completa la terna e ricordano che il lato misura 2ℓ, la matrice d'inerzia è

$$\mathsf{J}_A = \begin{bmatrix} \frac{4}{3}m\ell^2 & -m\ell^2 & 0 \\ -m\ell^2 & \frac{4}{3}m\ell^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{8}{3}m\ell^2 \end{bmatrix}.$$

Osservazione: della matrice d'inerzia della lamina, visto che $\boldsymbol{\omega}$ è parallelo a $\boldsymbol{e}_y$, avremmo potuto direttamente scrivere solo il termine J_{22}.

Pertanto, dopo qualche conto l'energia cinetica è:

$$K = \frac{1}{2}m\dot{\xi}^2 + \frac{2}{3}m\ell^2\dot{\vartheta}^2$$

oppure anche

$$K = \frac{1}{2}\left(m\dot{\xi}^2 + \frac{4}{3}m\ell^2\dot{\vartheta}^2\right).$$

La lagrangiana è dunque

$$\mathcal{L} = mg\ell\cos\vartheta - \frac{k}{2}\xi^2 + 4k\ell^2\operatorname{sen}\vartheta + \frac{1}{2}m\dot{\xi}^2 + \frac{2}{3}m\ell^2\dot{\vartheta}^2$$

4. Scriviamo la lagrangiana approssimata attorno alla posizione di equilibrio stabile P_1:

$$\widetilde{\mathcal{L}} = \frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{q}}^{\mathsf{T}}\cdot \mathsf{J}\left(\overline{\boldsymbol{q}}\right)\dot{\boldsymbol{q}} + \frac{1}{2}(\boldsymbol{q}-\overline{\boldsymbol{q}})^{\mathsf{T}}\cdot \mathcal{H}\left(\overline{\boldsymbol{q}}\right)(\boldsymbol{q}-\overline{\boldsymbol{q}})$$

con $\boldsymbol{q} = [\xi, \vartheta]^\mathsf{T}$, $\dot{\boldsymbol{q}} = [\dot{\xi}, \dot{\vartheta}]^\mathsf{T}$ e $\overline{\boldsymbol{q}} = \left[0, \operatorname{arctg}\left(\frac{4}{\lambda}\right)\right]^\mathsf{T}$,

$$\mathsf{J}\left(\overline{\boldsymbol{q}}\right) = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & \frac{4}{3}m\ell^2 \end{bmatrix}.$$

Avendo già calcolato $\mathcal{H}\left(\overline{\boldsymbol{q}}\right)$ in precedenza, la lagrangiana linearizzata risulta, dopo qualche conto,

$$\widetilde{\mathcal{L}} = \frac{1}{2}m\dot{\xi}^2 + \frac{2}{3}m\ell^2\dot{\vartheta}^2 - \frac{1}{2}k\xi^2 - \frac{mg\ell\lambda + 16k\ell^2}{2\sqrt{\lambda^2+16}}\left(\vartheta - \operatorname{arctg}\left(\frac{4}{\lambda}\right)\right)^2.$$

2) La matrice d'inerzia del corpo rigido è data dalla somma delle matrici d'inerzia J_O^{AB} dell'asta e quelle $\mathsf{J}_O^{T_1}$ e $\mathsf{J}_O^{T_2}$ dei due triangoli. Dato che i piani xy e xz sono di simmetria materiale sappiamo da subito che $J_{12} = J_{13} = J_{23} = 0$.

Dedichiamoci innanzitutto alla matrice d'inerzia dell'asta con densità quadratica. Per comodità calcoleremo la matrice d'inerzia in un sistema di riferimento con assi paralleli a quelli dati e centrato nell'estremo A dell'asta; in seguito utilizzeremo il teorema di Huygens-Steiner per spostarci nel baricentro O.

Conviene quindi preventivamente determinare la posizione del baricentro O dell'asta con densistà quadratica del tipo $\rho = kx^2,\ k \in \mathbb{R}$. La massa dell'asta è:

$$m = \int_0^\ell kx^2 dx = \frac{k\ell^3}{3},$$

da cui

$$k = \frac{3m}{\ell^3}.$$

Infine il baricentro dell'asta risulta:

$$\overline{AO} = \frac{1}{m}\int_0^\ell kx^3 dx = \frac{3}{k\ell^3} \cdot \frac{k\ell^4}{4} = \frac{3}{4}\ell.$$

Siamo ora pronti per determinare la matrice d'inerzia dell'asta (nel sistema di riferimento centrato in A). Considerando che l'asta è distribuita lungo l'asse x avremo $J_{11}^{AB,A} = 0$. Resta da calcolare

$$J_{22}^{AB,A} = \int_0^\ell kx^2 \cdot x^2 dx = \frac{3m}{\ell^3} \cdot \frac{\ell^5}{5} = \frac{3}{5}m\ell^2.$$

Spostandoci in O risulta ancora $J_{11}^{AB} = 0$, mentre

$$J_{22}^{AB} = \frac{3}{5}m\ell^2 - m\left(\frac{3}{4}\ell\right)^2 = \frac{3}{80}m\ell^2.$$

Osservazione: se avessimo calcolato la matrice d'inerzia dell'asta direttamente nel suo baricentro O l'integrale sarebbe stato

$$\int_{-\frac{3}{4}\ell}^{\frac{1}{4}\ell} k\left(x+\frac{3}{4}\ell\right)^4 dx.$$

Occupiamoci ora delle matrici d'inerzia dei due triangoli rispetto al sistema di riferimento centrato in O. Essendo emiequilateri e avendo il cateto $\overline{OB}$ che misura $\ell - \frac{3}{4}\ell = \frac{\ell}{4}$, l'altro cateto risulta $\frac{\sqrt{3}}{4}\ell$. Quindi,

$$J_{11}^{T_1} = J_{11}^{T_2} = \frac{m}{6}\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\ell\right)^2 = \frac{m\ell^2}{32},$$

$$J_{22}^{T_1} = J_{22}^{T_2} = \frac{m}{6}\left(\frac{\ell}{4}\right)^2 = \frac{m\ell^2}{96}.$$

Infine sommiamo i momenti d'inerzia delle tre figure in modo da determinare quella richiesta:

$$J_{11} = J_{11}^{AB} + J_{11}^{T_1} + J_{11}^{T_2} = 0 + \frac{m\ell^2}{32}\cdot 2 = \frac{m\ell^2}{16},$$

$$J_{22} = J_{22}^{AB} + J_{22}^{T_1} + J_{22}^{T_2} = \frac{3}{80}m\ell^2 + \frac{m\ell^2}{96}\cdot 2 = \frac{7}{120}m\ell^2.$$

Essendo una figura piana

$$J_{33} = J_{11} + J_{22} = \frac{m\ell^2}{16} + \frac{7}{120}m\ell^2 = \frac{29}{240}m\ell^2,$$

quindi la matrice d'inerzia è

$$\mathsf{J}_O = \begin{bmatrix} \frac{m\ell^2}{16} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{7}{120}m\ell^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{29}{240}m\ell^2 \end{bmatrix}.$$