Soluzione della prova scritta di Meccanica Analitica del 14 giugno 2019 a cura di Sara Mastaglio

1) Denotiamo con C il punto di contatto tra il disco e l'asse y. Al fine di calcolare il potenziale determiniamo la quota del baricentro del disco e il vettore individuato dalla molla:

$$z_G = -\xi \boldsymbol{e}_z,$$

$$(G - E) = R \operatorname{sen} \vartheta \boldsymbol{e}_x + (R \cos \vartheta - R)\boldsymbol{e}_y - \xi \boldsymbol{e}_z$$

e quindi $|G - E|^2 = 2R^2 - 2R^2 \cos \vartheta + \xi^2$.

1. Il potenziale è dato da

$$U = -mgz_G - \frac{k}{2}|G - E|^2 = mg\xi + kR^2 \cos \vartheta - \frac{k}{2}\xi^2 + c.$$

Determiniamo ora le posizioni di equilibrio dal sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial \xi} = mg - k\xi = 0 \\ \dfrac{\partial U}{\partial \vartheta} = -kR^2 \operatorname{sen} \vartheta = 0 \end{cases}$$

da cui si ricavano le posizioni di equilibrio

$$P_1\left(\frac{mg}{k}; 0\right) \quad \text{e} \quad P_2\left(\frac{mg}{k}; \pi\right).$$

Calcoliamo ora l'hessiano per valutare la stabilità delle posizioni di equilibrio trovate:

$$\mathcal{H}(\xi, \vartheta) = \begin{bmatrix} -k & 0 \\ 0 & -kR^2 \cos \vartheta \end{bmatrix};$$

essendo la matrice diagonale e dato che il termine $\mathcal{H}_{11}$ è sempre negativo, per avere la stabilità (due autovalori negativi) basta verificare che il termine $\mathcal{H}_{22}$ sia negativo: $\mathcal{H}_{22}(P_1) = -kR^2$, quindi la posizione P_1 risulta stabile, mentre $\mathcal{H}_{22}(P_2) = kR^2$ quindi la poszione P_2 risulta instabile.

2. Per calcolare le equazioni differenziali del moto bisogna prima calcolare la lagrangiana $\mathcal{L} = K + U$; determiniamo quindi l'energia cinetica nel punto C che, essendo il punto di contatto tra il disco che rotola senza strisciare e l'asse y, ha velocità nulla:

$$K = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega} \cdot \mathsf{J}_C \boldsymbol{\omega}.$$

Fissiamo un secondo sistema di riferimento $Cx'y'z'$ con l'asse x' coincidente con l'asse z, l'asse y' che contiene $(C - G)$ e z' che completa la terna. In questo modo otteniamo la velocità angolare

$$\boldsymbol{\omega} = -\dot{\vartheta}\boldsymbol{e}_z + \dot{\varphi}\boldsymbol{e}_{z'},$$

dove φ è l'angolo di rotazione propria del disco; ora ricordando che $z \equiv x'$ e che, dato che il disco rotola senza strisciare, vale la condizione $\dot{\xi} = -R\dot{\varphi}$, otteniamo

$$\boldsymbol{\omega} = -\dot{\vartheta}\boldsymbol{e}_{x'} - \frac{\dot{\xi}}{R}\boldsymbol{e}_{z'}.$$

La matrice d'inerzia fatta rispetto al sistema di riferimento $Cx'y'z'$ è

$$\mathsf{J}_C = \begin{bmatrix} \frac{5}{4}mR^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{mR^2}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2}mR^2 \end{bmatrix}$$

e quindi, dopo qualche conto, otteniamo l'energa cinetica

$$K = \frac{3}{4}m\dot{\xi}^2 + \frac{5}{8}mR^2\dot{\vartheta}^2$$

e la lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{3}{4}m\dot{\xi}^2 + \frac{5}{8}mR^2\dot{\vartheta}^2 + mg\xi + kR^2\cos\vartheta - \frac{k}{2}\xi^2.$$

Ora possiamo calcolare le equazioni differenziali del moto imponendo

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q};$$

con $q = \xi$ troviamo la prima equazione differenziale

$$\ddot{\xi} = \frac{2}{3}g - \frac{2k}{3m}\xi$$

e con $q = \vartheta$ troviamo invece la seconda

$$\ddot{\vartheta} = -\frac{4k}{5m}\operatorname{sen}\vartheta.$$

3. Scriviamo la lagrangiana approssimata attorno alla posizione di equilibrio stabile P_1:

$$\widetilde{\mathcal{L}} = \frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{q}}^{\mathsf{T}} \cdot \mathsf{J}\left(\overline{\boldsymbol{q}}\right)\dot{\boldsymbol{q}} + \frac{1}{2}(\boldsymbol{q} - \overline{\boldsymbol{q}})^{\mathsf{T}} \cdot \mathcal{H}\left(\overline{\boldsymbol{q}}\right)(\boldsymbol{q} - \overline{\boldsymbol{q}})$$

con $\boldsymbol{q} = [\xi, \vartheta]^{\mathsf{T}}$, $\dot{\boldsymbol{q}} = [\dot{\xi}, \dot{\vartheta}]^{\mathsf{T}}$ e $\overline{\boldsymbol{q}} = \left[\dfrac{mg}{k}, 0\right]^{\mathsf{T}}$. Ricordiamo che l'energia cinetica è

$$K = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}m\dot{\xi}^2 + \frac{5}{4}mR^2\dot{\vartheta}^2\right)$$

e quindi la matrice associata è

$$\mathsf{J}\left(\overline{\boldsymbol{q}}\right) = \begin{bmatrix} \frac{3}{2}m & 0 \\ 0 & \frac{5}{4}mR^2 \end{bmatrix}.$$

Avendo già calcolato $\mathcal{H}\left(\overline{\boldsymbol{q}}\right)$ in precedenza, la lagrangiana linearizzata risulta, dopo qualche conto,

$$\widetilde{\mathcal{L}} = \frac{3}{4}m\dot{\xi}^2 + \frac{5}{8}mR^2\dot{\vartheta}^2 - \frac{k}{2}\xi^2 + mg\xi - \frac{kR^2}{2}\vartheta^2 - \frac{m^2g^2}{2k}.$$

2) Denotiamo con G_1 il baricentro dell'asta, con G_2 il baricentro del semidisco e con G il baricentro complessivo della figura.

È interessante determinare la posizione del baricentro G dell'intera figura, anche se non richiesto. Il baricentro dell'asta con densità lineare $\rho = ky, k \in \mathbb{R}$ è dato da:

$$m = \int_0^{2R} ky dy = 2kR^2,$$

da cui $k = \dfrac{m}{2R^2}$ e quindi

$$y_{G_1} = \frac{1}{m}\int_0^{2R} ky^2 dy = \frac{4}{3}R.$$

Ricordando poi che in generale il baricentro del semidisco è $\dfrac{4r}{3\pi}$, troviamo

$$y_{G_2} = 2R + \frac{4R}{3\pi},$$

e quindi il baricentro complessivo, essendo le masse delle due figure uguali, è dato da

$$y_G = \frac{\left(\frac{4}{3}R\right) + \left(2R + \frac{4R}{3\pi}\right)}{2} = \frac{5\pi + 2}{3\pi}R.$$

Ora possiamo dedicarci al calcolo della matrice d'inerzia J_O che è data dalla somma della matrice d'inerzia J_O^a dell'asta con densità lineare e di quella J_O^d del semidisco. Osserviamo preventivamente che, essendo xy e yz due piani di simmetria materiale, tutti i prodotti d'inerzia risulteranno nulli.

Per quanto riguarda la matrice d'inerzia dell'asta rispetto al sistema di riferimento dato (centrato in O), essendo OA distribuita sull'asse y, avremo che $J^a_{O,22} = 0$, mentre

$$J^a_{O,11} = \int_0^{2R} ky^3 dy = \frac{m}{2R^2} \cdot \frac{16R^4}{4} = 2mR^2.$$

Occupiamoci ora della matrice d'inerzia del disco. Conosciamo quella rispetto al sistema di riferimento centrato in A e con assi paralleli a quelli dati:

$$\mathsf{J}^d_A = \begin{bmatrix} \frac{mR^2}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{mR^2}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{mR^2}{2} \end{bmatrix}.$$

Ci interessa la matrice d'inerzia centrata in O, quindi ci sposteremo prima in G_2 e poi in O utilizzando Huygens-Steiner. Ragioniamo sui singoli elementi della matrice. Per quanto riguarda il termine J^d_{11} abbiamo:

$$J^d_{G_2,11} = J^d_{A,11} - m\left(\frac{4R}{3\pi}\right)^2$$

e

$$\begin{aligned} J^d_{O,11} =& J^d_{G_2,11} + m\left(2R + \frac{4R}{3\pi}\right)^2 = J^d_{A,11} - m\left(\frac{4R}{3\pi}\right)^2 + m\left(2R + \frac{4R}{3\pi}\right)^2 = \\ =& \frac{mR^2}{4} - m\left(\frac{4R}{3\pi}\right)^2 + m\left(2R + \frac{4R}{3\pi}\right)^2 = \frac{17}{4}mR^2 + \frac{16}{3\pi}mR^2. \end{aligned}$$

L'asse y rimane il medesimo, quindi il termine $J^d_{O,22} = J^d_{G_2,22} = J^d_{A,22} = \dfrac{mR^2}{4}$.
Adesso non ci resta che sommare:

$$J_{11} = J^a_{O,11} + J^d_{O,11} = 2mR^2 + \frac{17}{4}mR^2 + \frac{16}{3\pi}mR^2 = \frac{25}{4}mR^2 + \frac{16}{3\pi}mR^2,$$

$$J_{22} = J^a_{O,22} + J^d_{O,22} = 0 + \frac{mR^2}{4} = \frac{mR^2}{4}$$

e dato che la lamina è piana

$$J_{33} = J_{11} + J_{22} = \frac{25}{4}mR^2 + \frac{16}{3\pi}mR^2 + \frac{mR^2}{4} = \frac{13}{2}mR^2 + \frac{16}{3\pi}mR^2.$$

La matrice richiesta risulta quindi

$$\mathsf{J}_O = \begin{bmatrix} \dfrac{25}{4}mR^2 + \dfrac{16}{3\pi}mR^2 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{mR^2}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{13}{2}mR^2 + \dfrac{16}{3\pi}mR^2 \end{bmatrix}.$$