Risoluzione della prova di Meccanica Analitica del 26 giugno 2020

I) 1. Essendo O un punto fisso, usiamo il Teorema di König nella forma

$$K = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega} \cdot J_O\boldsymbol{\omega}.$$

Scegliamo un sistema di riferimento solidale con $\boldsymbol{e}'_x$ lungo OA, $\boldsymbol{e}'_y$ lungo OC e $\boldsymbol{e}'_z$ di conseguenza (quindi ortogonale al piano della lamina). In questi sistema di riferimento si ha

$$J_O = \begin{bmatrix} \frac{m\ell^2}{3} & -\frac{m\ell^2}{4} & 0 \\ -\frac{m\ell^2}{4} & \frac{m\ell^2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2m\ell^2}{3} \end{bmatrix}$$

e $\boldsymbol{\omega} = \dot\vartheta \boldsymbol{e}_z - \dot\varphi \boldsymbol{e}'_x$. Poiché $\boldsymbol{e}_z = \cos\varphi \boldsymbol{e}'_y + \sin\varphi \boldsymbol{e}'_z$, si ha

$$\boldsymbol{\omega} = -\dot\varphi \boldsymbol{e}'_x + \dot\vartheta \cos\varphi \boldsymbol{e}'_y + \dot\vartheta \sin\varphi \boldsymbol{e}'_z$$

e quindi

$$\begin{aligned} K =& \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -\dot\varphi & \dot\vartheta\cos\varphi & \dot\vartheta\sin\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{m\ell^2}{3} & -\frac{m\ell^2}{4} & 0 \\ -\frac{m\ell^2}{4} & \frac{m\ell^2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2m\ell^2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\dot\varphi \\ \dot\vartheta\cos\varphi \\ \dot\vartheta\sin\varphi \end{bmatrix} \\ =& \frac{1}{2}\left(\frac{m\ell^2}{3}(1+\sin^2\varphi)\dot\vartheta^2 + \frac{m\ell^2}{3}\dot\varphi^2 + \frac{m\ell^2}{2}\dot\vartheta\dot\varphi\cos\varphi \right). \end{aligned}$$

2. Denotando con K il punto medio del lato OA e con G il baricentro della lamina si ha

$$\begin{aligned} (G-K) =& \frac{\ell}{2}(-\sin\vartheta\sin\varphi \boldsymbol{e}_x + \cos\vartheta\sin\varphi \boldsymbol{e}_y + \cos\varphi \boldsymbol{e}_z), \\ (K-O) =& \frac{\ell}{2}(\cos\vartheta \boldsymbol{e}_x + \sin\vartheta \boldsymbol{e}_y), \\ (G-O) =& (G-K) + (K-O) = \frac{\ell}{2}\big((\cos\vartheta - \sin\vartheta\sin\varphi)\boldsymbol{e}_x + (\sin\vartheta + \cos\vartheta\sin\varphi)\boldsymbol{e}_y + \cos\varphi \boldsymbol{e}_z\big). \end{aligned}$$

Allo stesso modo si ha

$$\begin{aligned} (C-O) =& \ell(-\sin\vartheta\sin\varphi \boldsymbol{e}_x + \cos\vartheta\sin\varphi \boldsymbol{e}_y + \cos\varphi \boldsymbol{e}_z), \\ (E-O) =& \ell \boldsymbol{e}_z, \\ (C-E) =& (C-O) + (O-E) = \ell\big(-\sin\vartheta\sin\varphi \boldsymbol{e}_x + \cos\vartheta\sin\varphi \boldsymbol{e}_y + (\cos\varphi - 1)\boldsymbol{e}_z\big) \end{aligned}$$

da cui $|C-E|^2 = 2\ell^2(1-\cos\varphi)$ e

$$\begin{aligned} (A-O) =& \ell(\cos\vartheta \boldsymbol{e}_x + \sin\vartheta \boldsymbol{e}_y), \\ (D-O) =& \ell \boldsymbol{e}_x, \\ (A-D) =& (A-O) + (O-D) = \ell\big((\cos\vartheta - 1)\boldsymbol{e}_x + \sin\vartheta \boldsymbol{e}_y\big) \end{aligned}$$

da cui $|A-D|^2 = 2\ell^2(1-\cos\vartheta)$. Quindi il potenziale si scrive

$$U(\vartheta,\varphi) = -mgz_G - \frac{1}{2}k(|C-E|^2 + |A-D|^2) = -\frac{1}{2}mg\ell\cos\varphi + k\ell^2\cos\varphi + k\ell^2\cos\vartheta + \text{cost.}$$

Le posizioni di equilibrio si trovano nei punti stazionari del potenziale:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial\vartheta} = -k\ell^2\sin\vartheta = 0, \\ \dfrac{\partial U}{\partial\varphi} = \left(\dfrac{1}{2}mg\ell - k\ell^2\right)\sin\varphi = 0, \end{cases}$$

da cui si trovano quattro posizioni di equilibrio

$$P_1(0,0), \quad P_2(0,\pi), \quad P_3(\pi,0), \quad P_4(\pi,\pi).$$

Nel caso $mg = 2k\ell$, cioè $\lambda = 2$, ci sono infinite posizioni di equilibrio del tipo

$$(0,\overline{\varphi}), \quad (\pi,\overline{\varphi}).$$

3. Calcoliamo la matrice hessiana del potenziale:

$$\mathcal{H} = \begin{bmatrix} -k\ell^2\cos\vartheta & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{2}mg\ell - k\ell^2\right)\cos\varphi \end{bmatrix}$$

e dunque

$$\mathcal{H}(P_1) = \begin{bmatrix} -k\ell^2 & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{2}mg\ell - k\ell^2\right) \end{bmatrix},$$

da cui P_1 è stabile per $\lambda < 2$. Poi

$$\mathcal{H}(P_2) = \begin{bmatrix} -k\ell^2 & 0 \\ 0 & -\left(\frac{1}{2}mg\ell - k\ell^2\right) \end{bmatrix}$$

da cui P_2 è stabile per $\lambda > 2$. Infine

$$\mathcal{H}(P_3) = \begin{bmatrix} k\ell^2 & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{2}mg\ell - k\ell^2\right) \end{bmatrix}, \qquad \mathcal{H}(P_4) = \begin{bmatrix} k\ell^2 & 0 \\ 0 & -\left(\frac{1}{2}mg\ell - k\ell^2\right) \end{bmatrix}$$

e, avendo entrambe un autovalore negativo, implicano che P_3 e P_4 sono instabili.
Nel caso $\lambda = 2$ l'hessiano ha un autovalore nullo e quindi non diciamo nulla sulla stabilità.

II) Troviamo la matrice d'inerzia come differenza tra la matrice di una lamina quadrata piena di lato 2ℓ e massa $8m$ e un'altra lamina quadrata di massa $4m$ e lato $\sqrt{2}\ell$. Operiamo prima nel baricentro G della figura :

$$J_G^{\text{piena}} = \operatorname{diag}\left(\frac{32}{12}m\ell^2, \frac{32}{12}m\ell^2, \frac{32}{6}m\ell^2\right)$$
$$J_G^{\text{buco}} = \operatorname{diag}\left(\frac{2}{3}m\ell^2, \frac{2}{3}m\ell^2, \frac{4}{3}m\ell^2\right)$$

e dunque

$$J_G = \operatorname{diag}\left(2m\ell^2, 2m\ell^2, 4m\ell^2\right).$$

Ora spostiamo la matrice col Teorema di Huygens-Steiner, tenendo presente che la massa è $4m$ e $\boldsymbol{d} = (G - O) = (\ell, \ell, 0)$. Ne segue che

$$J_O^{11} = J_O^{22} = 2m\ell^2 - 4m(2\ell^2 - \ell^2) = 6m\ell^2, \quad J_O^{33} = J_O^{11} + J_O^{22} = 12m\ell^2, \quad J_O^{12} = -4m\ell^2$$

e dunque

$$J_O = \begin{bmatrix} 6m\ell^2 & -4m\ell^2 & 0 \\ -4m\ell^2 & 6m\ell^2 & 0 \\ 0 & 0 & 12m\ell^2 \end{bmatrix}.$$