Prova scritta di Meccanica Analitica
Appello del 12 gennaio 2007

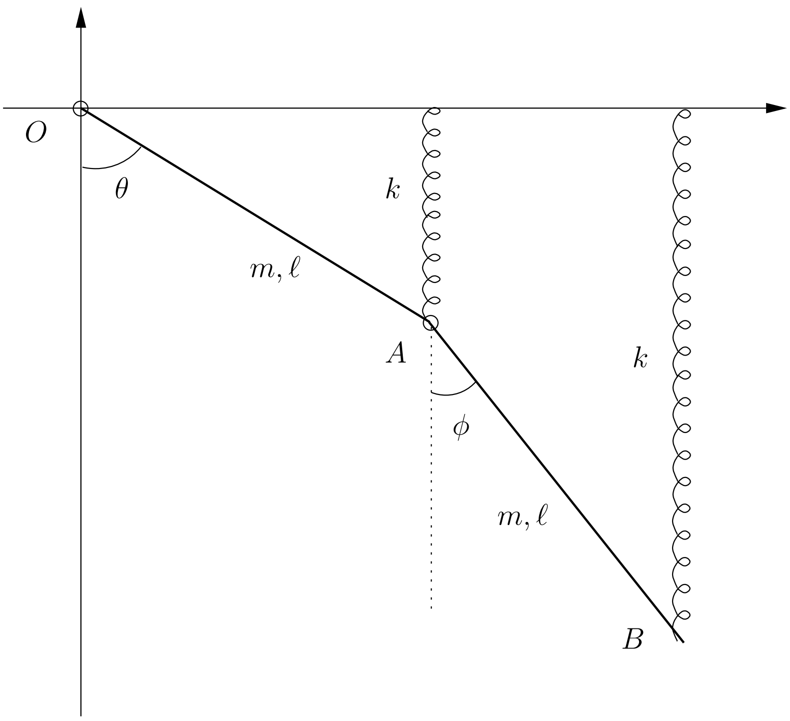
1) In un piano verticale un'asta OA di massa m e lunghezza ℓ può ruotare attorno al suo estremo O, fisso nell'origine di un sistema di riferimento cartesiano ortogonale Oxy. All'estremo A è incernierata una seconda asta AB, uguale alla prima e libera di ruotare attorno ad A.
Sulle due aste agisce la forza peso. Inoltre, sui punti A e B agiscono due forze elastiche di coefficiente $k > 0$ e poli i punti dell'asse x sulla verticale di A e B, rispettivamente.
Si denoti con θ l'angolo formato dalla parte negativa dell'asse y con l'asta OA, e con ϕ l'angolo tra la parte negativa dell'asse y e l'asta AB. Si supponga inoltre $-\pi/2 < \theta, \phi < \pi/2$.
Considerati tutti i vincoli lisci e posto, $\lambda = \frac{mg}{k\ell}$, si chiede di determinare:

(a) le posizioni di equilibrio del sistema in funzione di λ;

(b) la stabilità delle posizioni di equilibrio nel caso $\lambda < 1$;

(c) le equazioni differenziali del moto;

(d) l'equazione delle pulsazioni delle piccole oscillazioni attorno a una posizione di equilibrio stabile nel caso $\lambda < 1$.



2) Determinare per quali valori di $k > 0$ la seguente trasformazione è canonica:

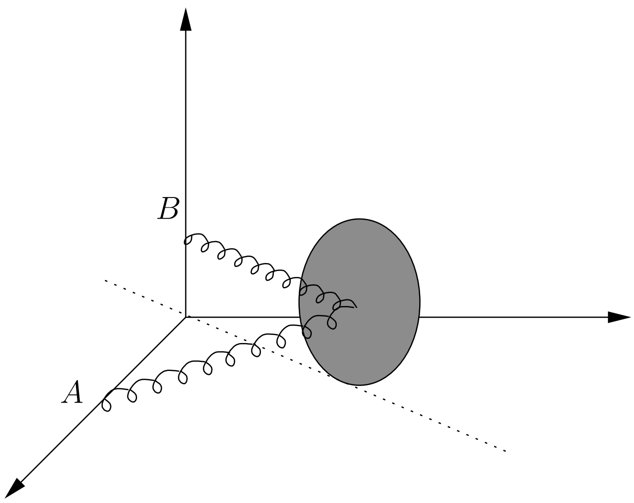
$$\begin{cases} Q = \log\left(\dfrac{p}{2kq}\right) \\ P = -\dfrac{p}{2q}(1+q^2)\,. \end{cases}$$

Nei casi in cui la trasformazione sia canonica, trovarne la funzione generatrice del tipo $F(q, Q)$.

Prova scritta di Meccanica Analitica
Appello del 27 marzo 2007

1) Un disco omogeneo di massa m e raggio R è vincolato a rotolare senza strisciare su una guida rettilinea r passante per l'origine di un sistema di riferimento $Oxyz$. Inoltre, la guida si muove nel piano xy ruotando attorno ad O, e il disco giace sempre in un piano verticale. Sul centro G del disco agiscono due forze elastiche di poli i punti $A = (2R, 0, 0)$ e $B = (0, 0, R)$ e coefficienti k_A e k_B rispettivamente.
Tutto il sistema è soggetto alla forza di gravità. Si chiede di:

1. trovare le posizioni di equilibrio del disco;
2. discutere la stabilità di tali posizioni;
3. determinare le equazioni differenziali del moto.



2) Dopo aver verificato che la trasformazione

$$\begin{cases} Q = q^2 p^3 \\ P = -\dfrac{1}{qp^2} \end{cases}$$

è canonica, se ne determini la funzione generatrice della forma $F(q, Q)$. Data poi la hamiltoniana

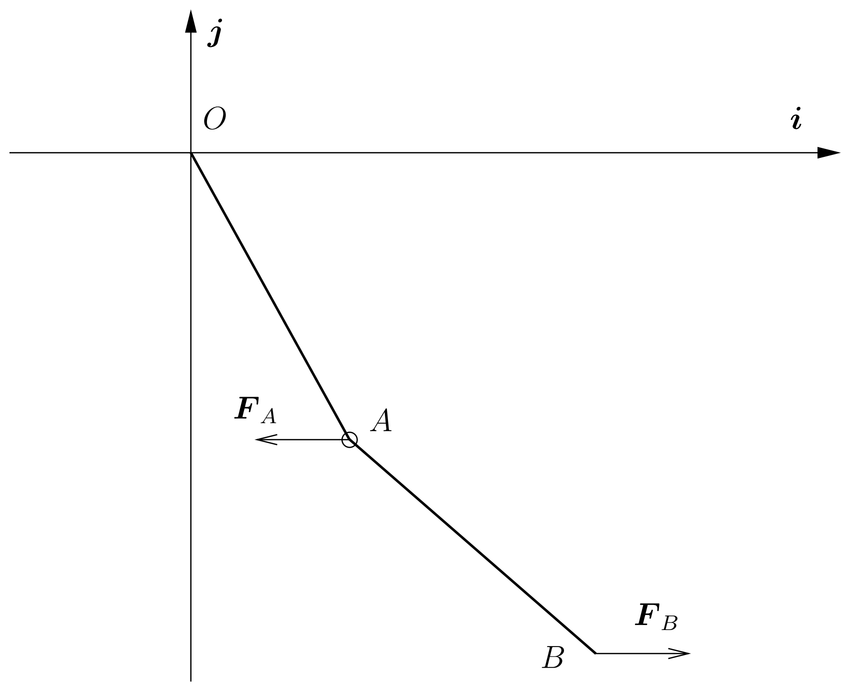
$$\mathcal{H}(q, p) = -qp + \frac{1}{2q^2p^4} - \frac{kq^4p^6}{2}$$

dipendente dal parametro $k \in \mathbb{R}$, si scriva il sistema hamiltoniano nelle nuove variabili Q, P. Osservato infine che tale sistema è lineare, se ne classifichino le orbite al variare del parametro k.

Prova scritta di Meccanica Analitica
Appello del 12 aprile 2007

1) In un piano verticale si muove un sistema meccanico piano è formato da due aste uguali OA e AB di massa m e lunghezza ℓ, incernierate nell'estremo A. La prima asta ha l'estremo O fisso. Su tale sistema agiscono, oltre alla forza peso, due forze costanti $\boldsymbol{F}_A = -F\boldsymbol{i}$ e $\boldsymbol{F}_B = F\boldsymbol{i}$, $F > 0$, sui punti A e B, rispettivamente.
Posto $\lambda = \frac{2F}{mg}$, si chiede di:

1. trovare le posizioni di equilibrio del sistema;
2. discutere la stabilità di tali posizioni al variare di λ;
3. determinare le equazioni differenziali del moto;
4. scrivere l'energia cinetica linearizzata attorno a una posizione di equilibrio stabile.



2) Si dimostri che una hamiltoniana della forma $\mathcal{H}(q,p) = f(\alpha q + \beta p)$, con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ammette sempre due integrali primi, e si determinino tali integrali.

3) Si classifichino le orbite del sistema lineare

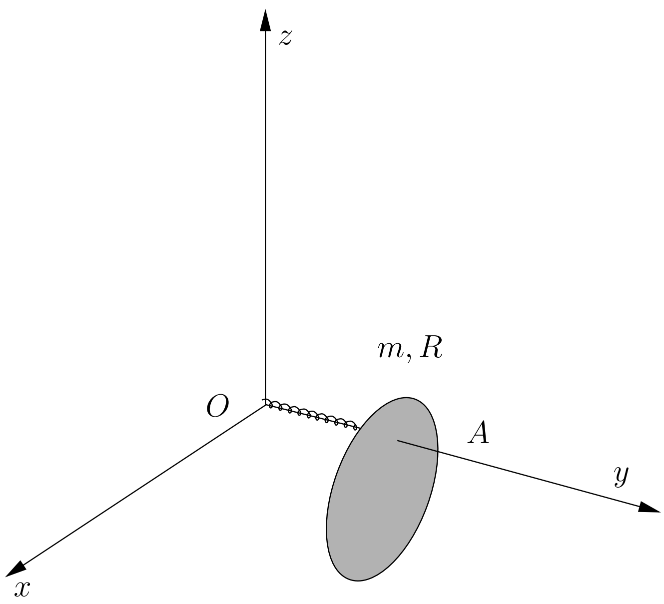
$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + ky \\ \dot{y} = x + y \end{cases}$$

al variare di $k \in \mathbb{R}$.

Prova scritta di Meccanica Analitica
Appello del 19 giugno 2007

1) Un disco omogeneo di massa m e raggio R è vincolato a mantenere un suo punto fisso A a distanza d dal centro ($0 < d < R$) sull'asse y di un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $Oxyz$. Il disco resta sempre in un piano parallelo al piano xz e sul punto A agisce una forza elastica di coefficiente $k > 0$ e polo l'origine O.
Tutto il sistema è soggetto alla forza di gravità e i vincoli sono lisci. Si chiede di:

1. trovare le posizioni di equilibrio del disco e discuterne la stabilità;
2. determinare la lagrangiana e le equazioni differenziali del moto;
3. determinare l'hamiltoniana;
4. risolvere le equazioni di Hamilton nell'approssimazione di linearizzazione attorno alla posizione di equilibrio stabile.



2) Verificare che la trasformazione

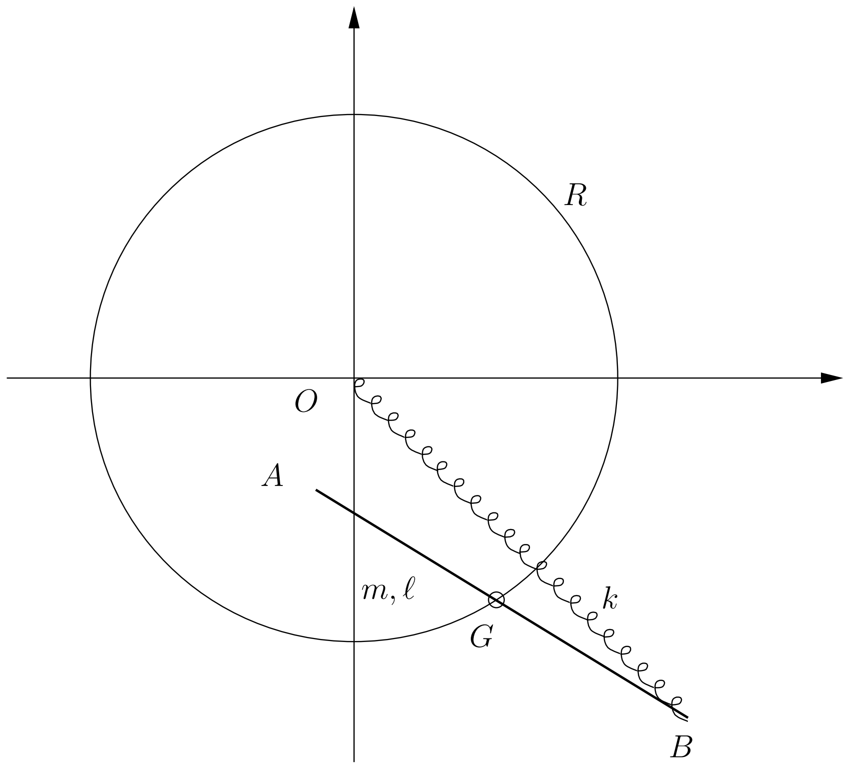
$$\begin{cases} Q = -\arccos \dfrac{p}{\sin q} \\ P = \sqrt{1 - \dfrac{p^2}{\sin^2 q}}\,\cos q \end{cases}$$

è canonica e calcolare la trasformata dell'hamiltoniana $\mathcal{H}(q,p) = qp$.

Prova scritta di Meccanica Analitica
Appello del 10 luglio 2007

1) Un'asta omogenea AB di massa m e lunghezza ℓ è vincolata a mantenere il proprio baricentro G su una guida circolare di raggio R che giace in un piano verticale.
Sul'estremo B dell'asta agisce una forza elastica di coefficiente $k > 0$ e polo il centro O della guida.
Tutto il sistema è soggetto alla forza di gravità e i vincoli sono lisci. Si chiede di:

1. trovare le posizioni di equilibrio dell'asta e discuterne la stabilità;
2. determinare la lagrangiana del sistema;
3. determinare le pulsazioni delle piccole oscillazioni attorno a una posizione di equilibrio stabile.



2) Dato il potenziale generalizzato

$$U(q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2) = -\dot{q}_1 \sin q_2 + \dot{q}_2 \cos q_1$$

trovare l'espressione del campo di forze $\mathbf{Q}$ associato e la matrice U tale che $\mathbf{Q} = \mathsf{U}\dot{\boldsymbol{q}}$.

Prova scritta di Meccanica Analitica
Appello del 6 settembre 2007

1) Un'asta omogenea AB di massa M e lunghezza 2ℓ è vincolata a mantenere i propri estremi su una guida circolare di raggio ℓ e centro O, fissa in un piano verticale.
Nell'asta scorre un punto materiale P di massa m su cui agisce una forza elastica di coefficiente $k > 0$ e polo il centro O della guida.
Tutto il sistema è soggetto alla forza di gravità e i vincoli sono lisci. Si chiede di:

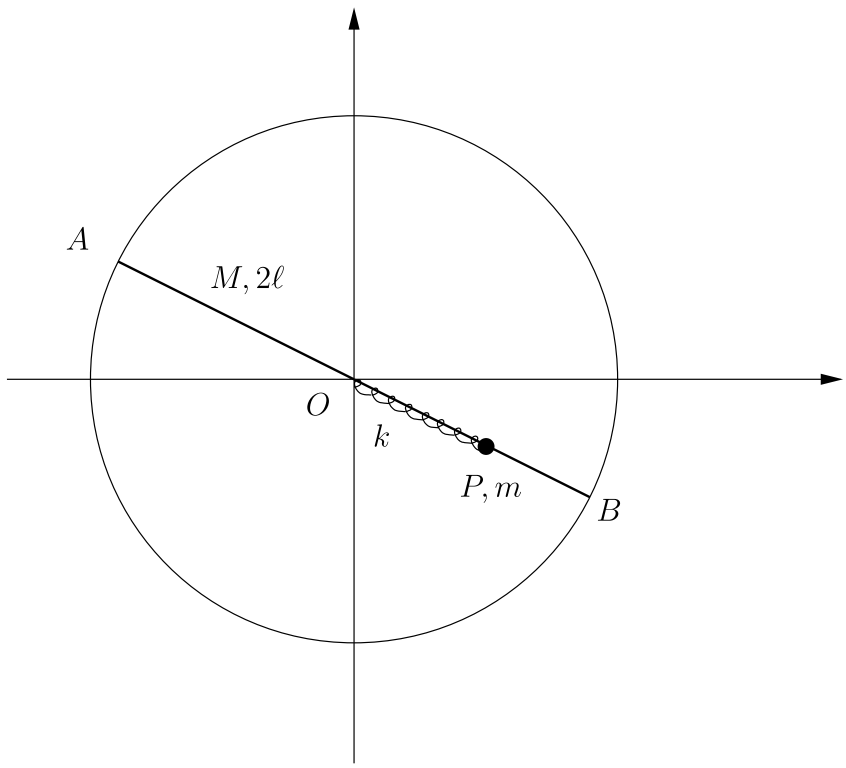
(a) trovare le posizioni di equilibrio ordinarie e di confine del sistema;

(b) discutere la stabilità delle posizioni di equilibrio ordinarie;

(c) determinare le equazioni differenziali del moto;

(d) determinare le posizioni di equilibrio relativo del punto P corrispondenti a rotazioni dell'asta di velocità angolare costante ω;

(e) nel caso in cui il punto P non sia presente, fissata una posizione di equilibrio dell'asta, se ne confrontino le reazioni vincolari con quelle di un'asta uguale ma vincolata nel suo punto medio nella stessa posizione di equilibrio.



2) Dimostrare la seguente identità:

$$\Big[F, \big[G, [F, G]\big]\Big] = -\Big[G, \big[[F, G], F\big]\Big] .$$

Prova scritta di Meccanica Analitica
Appello del 25 settembre 2007

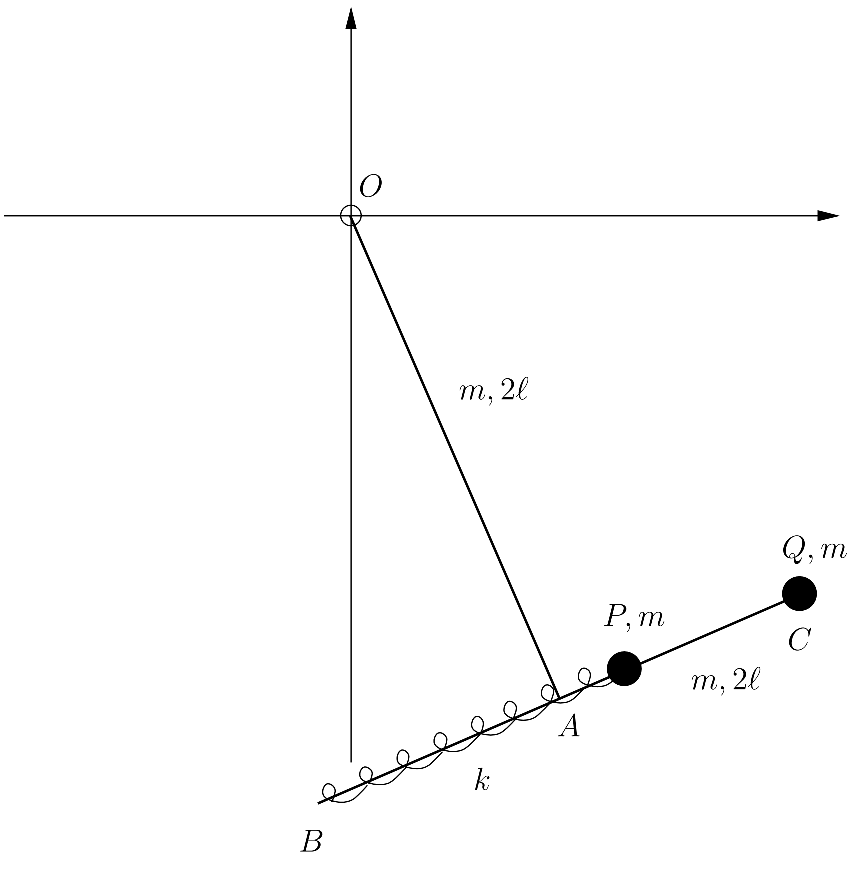
1) Un corpo rigido è formato da un'asta omogenea OA di massa m e lunghezza 2ℓ al cui estremo A è saldata perpendicolarmente una seconda asta BC, identica alla precedente, nel suo punto medio.
Tale corpo rigido può ruotare in un piano verticale tenendo fisso il punto O.
Inoltre, un punto materiale Q di massa m è saldato all'estremo C, mentre un altro punto materiale P di massa m è libero di scorrere nell'asta BC.
Sul punto P agisce una forza elastica di coefficiente $k > 0$ e polo l'estremo B dell'asta. Tutto il sistema è soggetto alla forza di gravità e i vincoli sono lisci. Si ponga $\lambda = \frac{k\ell}{mg}$. Si chiede di:

(a) trovare le posizioni di equilibrio ordinarie del sistema;

(b) studiare l'equilibrio delle posizioni di confine;

(c) discutere la stabilità delle posizioni di equilibrio ordinarie;

(d) determinare la lagrangiana del sistema.



2) Trovare il semigruppo $S(t)$ generato dall'equazione differenziale (unidimensionale)

$$\dot{x} = e^x$$

e verificarne le due proprietà caratterizzanti.

Prova scritta di Meccanica Analitica
Appello del 18 dicembre 2007

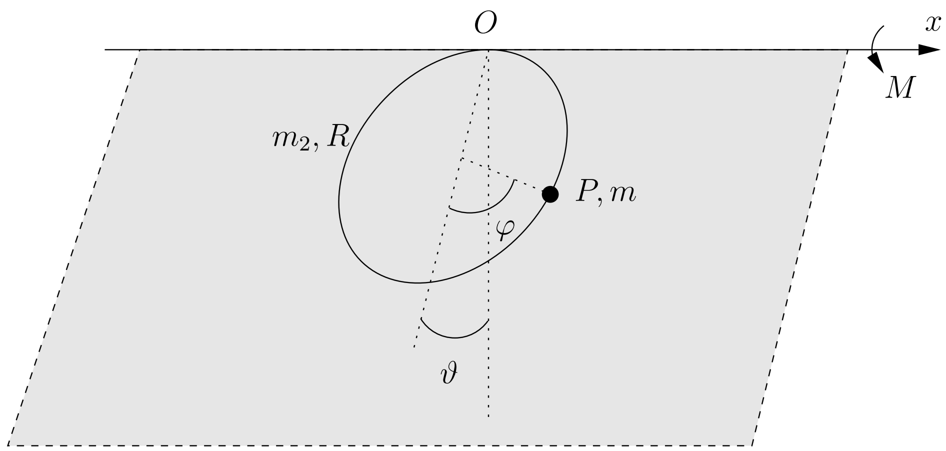
1) Una guida circolare di massa m_2 e raggio R è complanare all'asse x di un sistema di riferimento cartesiano ortogonale e ha un punto fisso O sull'asse x. Il piano in cui giace tale guida è libero di muoversi attorno all'asse x.
Sulla guida scorre un punto materiale P di massa m_1. Inoltre sul piano della guida agisce un momento costante $M\mathbf{e}_1$, dove $\mathbf{e}_1$ è il versore dell'asse x.
Tutto il sistema è soggetto alla forza di gravità e i vincoli sono lisci. Si chiede di:

(a) trovare le condizioni su M affinché il sistema ammetta almeno una posizione di equilibrio;

(b) sotto le condizioni del punto precedente, trovare le posizioni di equilibrio del sistema e discuterne la stabilità;

(c) determinare le equazioni differenziali del moto;

(d) studiare le piccole oscillazioni attorno a una posizione di equilibrio stabile nel caso $M = 0$.



2) Si classifichino le orbite del sistema lineare

$$\begin{cases} \dot{u} = 2u + kv \\ \dot{v} = ku + 2v \end{cases}$$

al variare di $k \in \mathbb{R}$.

Prova scritta di Meccanica Analitica
Appello del 10 gennaio 2008

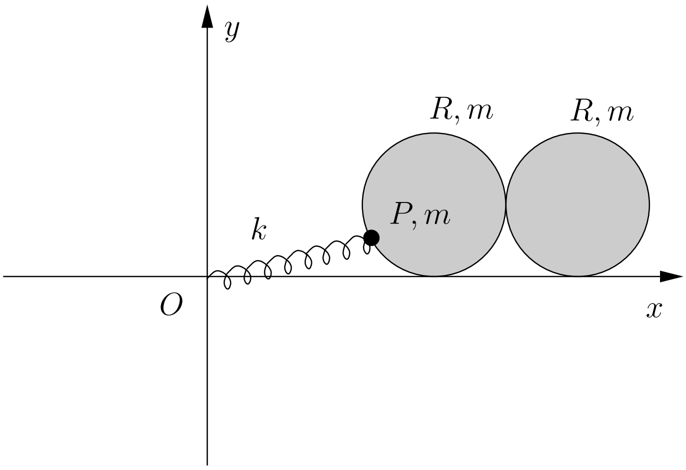
1) In un piano verticale due dischi, entrambi di massa m e raggio R, sono vincolati a rotolare senza strisciare l'uno contro l'altro, ed entrambi sono vincolati a scorrere con vincolo liscio sull'asse x di un sistema di riferimento cartesiano ortogonale Oxy. Sul bordo del primo disco inoltre è saldato un punto materiale P, anch'esso di massa m.
Sul punto P agisce una forza elastica di centro l'origine O e coefficiente $k > 0$.
Tutto il sistema è soggetto alla forza di gravità. Si chiede di:

(a) trovare le posizioni di equilibrio del sistema;

(b) discuterne la stabilità;

(c) determinare le equazioni differenziali del moto;

(d) studiare le piccole oscillazioni attorno a una posizione di equilibrio stabile.



2) Trovare per quali valori del parametro $k \in \mathbb{R}$ la trasformazione

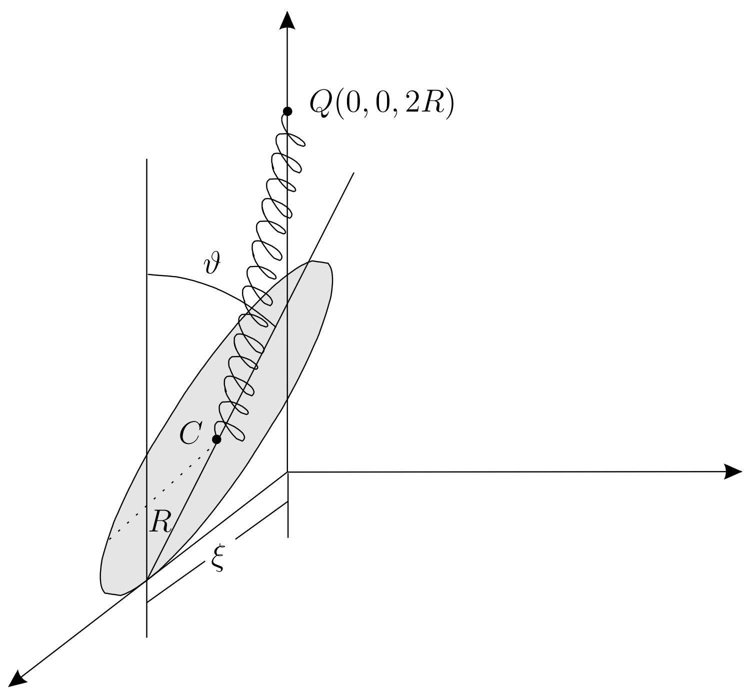
$$\begin{cases} Q = k\, e^{p} \\ P = -kq\, e^{-p} \end{cases}$$

definisce una trasformazione canonica, e in corrispondenza di tali valori trovarne una funzione generatrice della forma $F_1(q, Q)$.
Determinare poi l'espressione dell'hamiltoniana $H(q,p) = q + e^{-p}$ in funzione delle nuove variabili Q, P.

Prova scritta di Meccanica Analitica
Appello del 27 marzo 2008

1) Un disco omogeneo di massa m e raggio R è vincolato a rotolare senza strisciare sull'asse x di un sistema di riferimento $Oxyz$. Inoltre, il piano del disco può ruotare attorno all'asse x. Sul centro G del disco agisce una forza elastica di polo il punto $Q = (0, 0, 2R)$ e coefficiente $k > 0$.
Tutto il sistema è soggetto alla forza di gravità. Si chiede di:

1. trovare le posizioni di equilibrio del disco;
2. discutere la stabilità di tali posizioni;
3. determinare le equazioni differenziali del moto.



2) Si verifichi che la trasformazione

$$\begin{cases} Q = 2q^2 + p \\ P = 4q^4 + p^2 + 4q^2 p - q \end{cases}$$

è canonica e se ne determini la funzione generatrice della forma $F(q, Q)$. Data poi la hamiltoniana

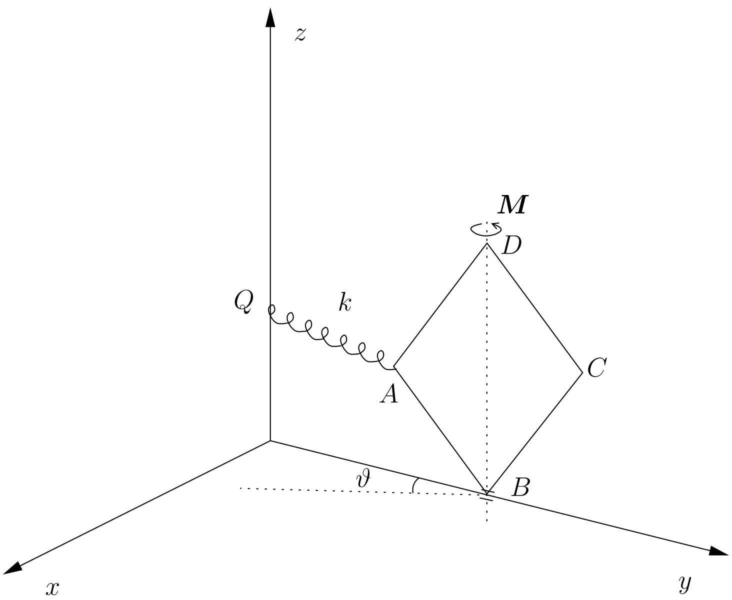
$$\mathcal{H}(q,p) = k(2q^2 + p)\Big(2q^2 + p + (2q^2 + p)^2 - q\Big) + \Big((2q^2 + p)^2 - q\Big)^2$$

dipendente dal parametro $k \in \mathbb{R}$, si scriva il sistema hamiltoniano nelle nuove variabili Q, P. Osservato infine che tale sistema è lineare, se ne classifichino le orbite al variare del parametro.

Prova scritta di Meccanica Analitica
Appello del 10 aprile 2008

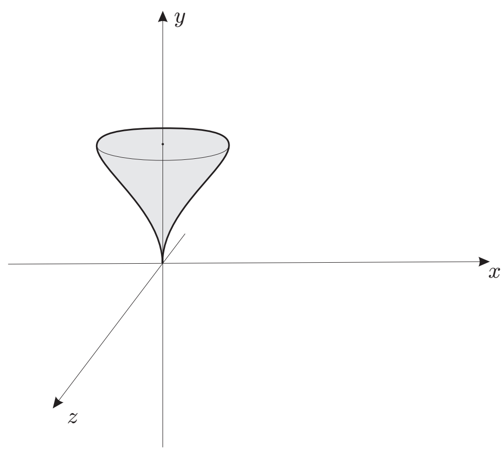
1) Una lamina quadrata omogeneo $ABCD$ di massa m e lato ℓ è vincolato a muoversi in modo che il vertice B scorra sull'asse y di un sistema di riferimento $Oxyz$ e la diagonale BD resti sempre verticale. Sul vertice A agisce una forza elastica di coefficiente $k > 0$ e polo il punto Q sull'asse z alla stessa altezza del baricentro della lamina. Inoltre, sulla lamina agisce un momento costante $\boldsymbol{M} = \lambda k \ell^2 \mathbf{e}_z$, dove $\lambda \in \mathbb{R}$.
Tutto il sistema è soggetto alla forza di gravità. Si chiede di:

1. trovare le posizioni di equilibrio del quadrato;
2. determinare le equazioni differenziali del moto;
3. nel caso $\lambda = 0$, discutere la stabilità delle posizioni di equilibrio.



2) Si calcoli il momento d'inerzia rispetto all'asse y del solido omogeneo di massa M delimitato dalla rivoluzione attorno a y della curva

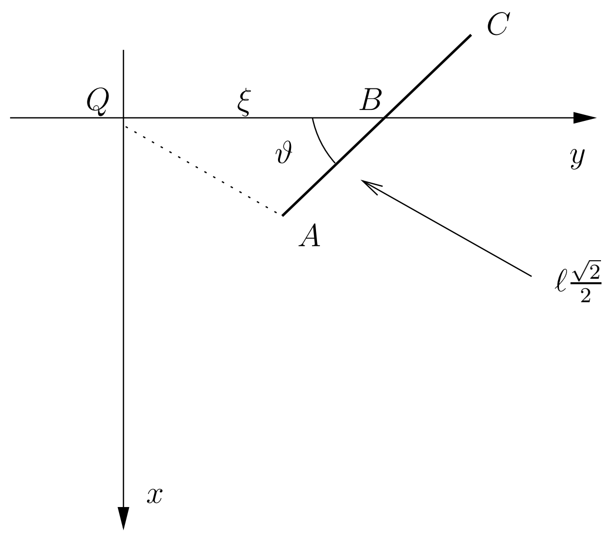
$$x^2 = \frac{y^4}{R^4}(R^2 - y^2)\,, \quad y \geq 0\,.$$



Risoluzione della prova del 10 aprile 2008

1) Il sistema ha due gradi di libertà Ponendo $\xi = y_B$ e ϑ l'angolo tra la proiezione del quadrato sul piano xy e l'asse y, si ha $\xi \in \mathbb{R}$ e $\vartheta \in [0, 2\pi]$. Essendo poi il baricentro della lamina sempre alla stessa quota, possiamo non considerare la forza peso.

1. Il potenziale relativo al momento è semplicemente l'integrale dell'espressione del momento rispetto a ϑ; poiché il momento è costante, si ha subito $U_M = \lambda k \ell^2 \vartheta$. Per il potenziale della forza elastica, disegniamo il sistema proiettato sul piano xy



e calcoliamo la lunghezza di $(Q - A)$ col teorema di Carnot:

$$|Q - A|^2 = \xi^2 - \xi \ell \sqrt{2} \cos \vartheta + \text{cost.}$$

Quindi in tutto il potenziale risulta

$$U(\xi, \vartheta) = -\frac{1}{2} k \xi^2 + \frac{\sqrt{2}}{2} k \xi \ell \cos \vartheta + \lambda k \ell^2 \vartheta + \text{cost.}$$

Il sistema dei punti critici dà

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial \xi} = -k\xi + \dfrac{\sqrt{2}}{2} k \ell \cos \vartheta = 0 \\ \dfrac{\partial U}{\partial \vartheta} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} k \xi \ell \sin \vartheta + \lambda k \ell^2 = 0 \end{cases}$$

da cui $\xi = \frac{\sqrt{2}}{2} \ell \cos \vartheta$ e $\cos \vartheta \sin \vartheta = 2\lambda$. La seconda equazione si può scrivere $\sin(2\vartheta) = 4\lambda$ e ha soluzione solo per $\lambda \in [-1/4, 1/4]$. In tal caso, ponendo $\alpha = \arcsin(4\lambda)$, si hanno quattro soluzioni:

$$\vartheta_1 = \frac{\alpha}{2}, \quad \vartheta_2 = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}, \quad \vartheta_3 = \pi + \frac{\alpha}{2}, \quad \vartheta_4 = \frac{3}{2}\pi - \frac{\alpha}{2}$$

con i corrispondenti valori di ξ

$$\xi_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}\ell\cos\frac{\alpha}{2}, \quad \vartheta_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}\ell\sin\frac{\alpha}{2}, \quad \vartheta_3 = -\frac{\sqrt{2}}{2}\ell\cos\frac{\alpha}{2}, \quad \vartheta_4 = -\frac{\sqrt{2}}{2}\ell\sin\frac{\alpha}{2}\,.$$

2. L'energia cinetica è presto calcolata grazie al teorema di König: la velocità del baricentro ha modulo $\dot{\xi}$, e la velocità angolare ha modulo $\dot{\vartheta}$ e direzione costante lungo $\boldsymbol{e}_z$. Ricordando che il momento d'inerzia del quadrato lungo una sua diagonale è la metà di quello per l'asse ortogonale, quindi vale $m\ell^2/12$, si ha

$$K = \frac{1}{2}m\dot{\xi}^2 + \frac{1}{24}m\ell^2\dot{\vartheta}^2$$

da cui si ottiene la lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\dot{\xi}^2 + \frac{1}{24}m\ell^2\dot{\vartheta}^2 - \frac{1}{2}k\xi^2 + \frac{\sqrt{2}}{2}k\xi\ell\cos\vartheta + \lambda k\ell^2\vartheta + \text{cost.}$$

Le equazioni del moto seguono immediatamente:

$$\begin{cases} m\ddot{\xi} = -k\xi + \dfrac{\sqrt{2}}{2}k\ell\cos\vartheta \\ \dfrac{1}{12}m\ell^2\ddot{\vartheta} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}k\xi\ell\sin\vartheta + \lambda k\ell^2. \end{cases}$$

3. Nel caso $\lambda = 0$, le posizioni di equilibrio diventano

$$(\xi_1,\vartheta_1) = \Big(\frac{\sqrt{2}}{2}\ell, 0\Big),\ (\xi_2,\vartheta_2) = \Big(0,\frac{\pi}{2}\Big),\ (\xi_3,\vartheta_3) = \Big(-\frac{\sqrt{2}}{2}\ell,\pi\Big),\ (\xi_4,\vartheta_4) = \Big(0,\frac{3}{2}\pi\Big)$$

e la matrice hessiana è

$$\mathcal{H} = \begin{bmatrix} -k & -\frac{\sqrt{2}}{2}k\ell\sin\vartheta \\ -\frac{\sqrt{2}}{2}k\ell\sin\vartheta & -\frac{\sqrt{2}}{2}k\xi\ell\cos\vartheta \end{bmatrix}$$

con determinante

$$\det\mathcal{H} = \frac{\sqrt{2}}{2}k^2\xi\ell\cos\vartheta - \frac{1}{2}k^2\ell^2\sin^2\vartheta\,.$$

Si vede subito che le posizioni 2 e 4 sono delle selle, mentre le posizioni 1 e 3 sono stabili.

2) Cominciamo calcolando la densità di massa; bisogna calcolare il volume del solido, e è comodo usare le coordinate cilindriche con asse polare y (ricordiamo che lo jacobiano delle coordinate cilindriche è r):

$$\begin{aligned} V = \int_0^{2\pi}\int_0^R\int_0^{\frac{y^2}{R^2}\sqrt{R^2-y^2}} r\,dr\,dy\,d\vartheta &= 2\pi\int_0^R \frac{1}{2}\frac{y^4}{R^4}(R^2-y^2)\,dy \\ &= \frac{\pi}{R^4}\int_0^R (R^2y^4 - y^6)\,dy = \frac{\pi}{R^4}\Big(\frac{R^7}{5} - \frac{R^7}{7}\Big) = \frac{2}{35}R^3\pi\,. \end{aligned}$$

Quindi la densità di massa è

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{35M}{2\pi R^3}\,.$$

Ora, per esprimere il momento d'inerzia, dobbiamo calcolare un integrale simile: la distanza al quadrato dall'asse y è proprio r^2, e usando sempre le coordinate cilindriche abbiamo

$$\begin{aligned} I_y &= \rho \int_0^{2\pi} \int_0^R \int_0^{\frac{y^2}{R^2}\sqrt{R^2-y^2}} r^3\,dr\,dy\,d\vartheta = \rho 2\pi \frac{1}{4} \int_0^R \frac{y^8}{R^8}(R^2-y^2)^2\,dy \\ &= \frac{\rho\pi}{2R^8}\int_0^R (R^4y^8 - 2R^2y^{10} + y^{12})\,dy = \frac{\rho\pi}{2R^8}R^{13}\left(\frac{1}{9} - \frac{2}{11} + \frac{1}{13}\right) = \frac{4}{1287}\rho\pi R^5. \end{aligned}$$

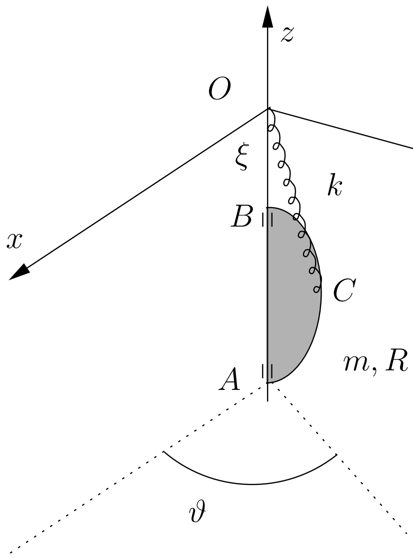
Sostituendo il valore di ρ trovato prima, otteniamo

$$I_y = \frac{4}{1287}\frac{35M}{2\pi R^3}\pi R^5 = \frac{70}{1287}MR^2.$$

Prova scritta di Meccanica Analitica
Appello del 25 giugno 2008

1) Un semidisco omogeneo di massa m e diametro $AB = 2R$ è vincolato a scorrere sull'asse z di un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $Oxyz$. Il semidisco può ruotare attorno a tale asse e sul punto C distante R dall'asse z agisce una forza elastica di coefficiente $k > 0$ e polo l'origine O.
Tutto il sistema è soggetto alla forza di gravità e i vincoli sono lisci. Si chiede di:

1. determinare il momento d'inerzia del semidisco rispetto all'asse z;
2. trovare le posizioni di equilibrio del semidisco;
3. determinare la lagrangiana e le equazioni differenziali del moto.



[Nota: si ricorda che il baricentro di un semidisco omogeneo di raggio R si trova alla distanza di $\frac{4R}{3\pi}$ dal diametro.]

2) Data la lagrangiana

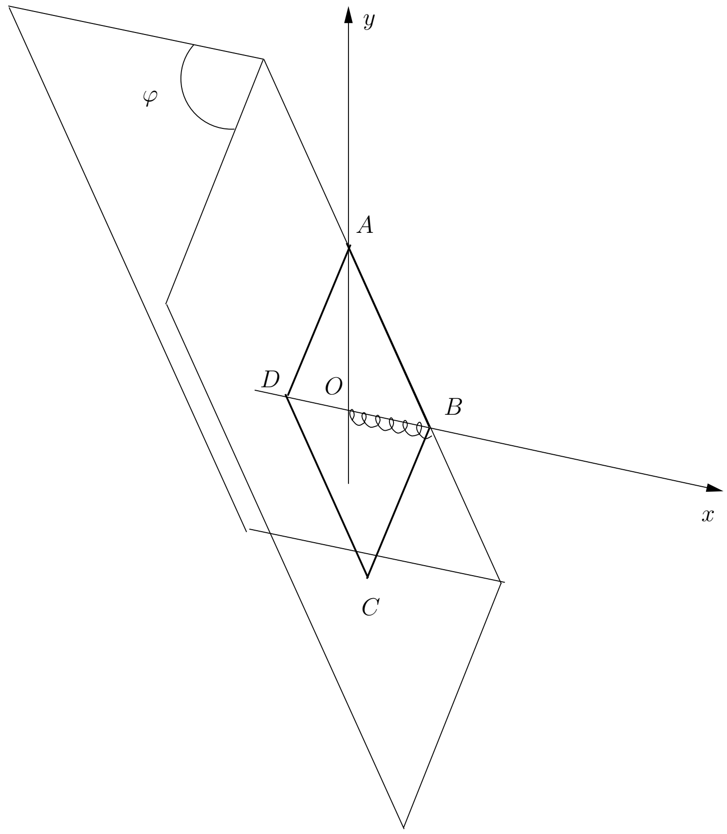
$$\mathcal{L}(q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2) = (q_1^2 + 1)\dot{q}_1^2 + 2\dot{q}_1\dot{q}_2 + \frac{2}{q_1^2 + 1}\dot{q}_2^2 + q_1^3$$

se ne determini l'hamiltoniana associata e le equazioni di Hamilton.
Si trovino poi due integrali primi del moto.

Prova scritta di Meccanica Analitica
Appello del 15 luglio 2008

1) Una lamina quadrata di massa m e lato $AB = \ell$ è vincolata a muoversi tenendo il vertice A sull'asse y e il vertice B sull'asse x di un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $Oxyz$, dove l'asse y è rivolto verso l'alto. La lamina può ruotare attorno all'asse passante per il lato AB.
Sul punto B agisce una forza elastica di coefficiente $k > 0$ e polo l'origine O.
Tutto il sistema è soggetto alla forza di gravità e i vincoli sono lisci. Si chiede di:

1. determinare le posizioni di equilibrio;
2. discutere la stabilità di tali posizioni;
3. determinare la lagrangiana del moto.



2) Si mostri che la trasformazione

$$\begin{cases} Q = \dfrac{\sqrt{3p}}{3q} \\ P = -\dfrac{2}{3}q^2\sqrt{3p} \end{cases}$$

è canonica e se ne trovi una funzione generatrice della forma $F(q, Q)$.

Prova scritta di Meccanica Analitica
Appello del 4 settembre 2008

1) Un'asta rigida omogenea AB di massa M e lunghezza $2l$ è vincolata ad avere un estremo in un punto fisso A distante $l\sqrt{2}$ da un piano orizzontale, sul quale scorre senza attrito l'estremo B. Sull'asta scorre, sempre senza attrito, un punto materiale P di massa m. Sul sistema agiscono la forza peso, una forza elastica di costante k che attira P nel baricentro dell'asta e una forza costante applicata in B e contenuta nel piano orizzontale, di modulo F. Si chiede:

a) Calcolare le posizioni di equilibrio del sistema e discuterne la stabilità, assumendo che non vi siano posizioni di confine (si immagini che il punto possa appartenere alla retta contenente l'asta);
b) Scrivere le equazioni differenziali del moto del sistema;
c) Supponendo che l'asta ruoti uniformemente con pulsazione ω attorno al suo asse di rotazione, determinare le posizioni di equilibrio relativo del punto P.

2) Si trovi per quali valori di $h, k \in \mathbb{R}$ la trasformazione

$$\begin{cases} Q = -\cos q \\ P = \dfrac{2hp^k}{\sin q} \end{cases}$$

è canonica.

Data poi la lagrangiana

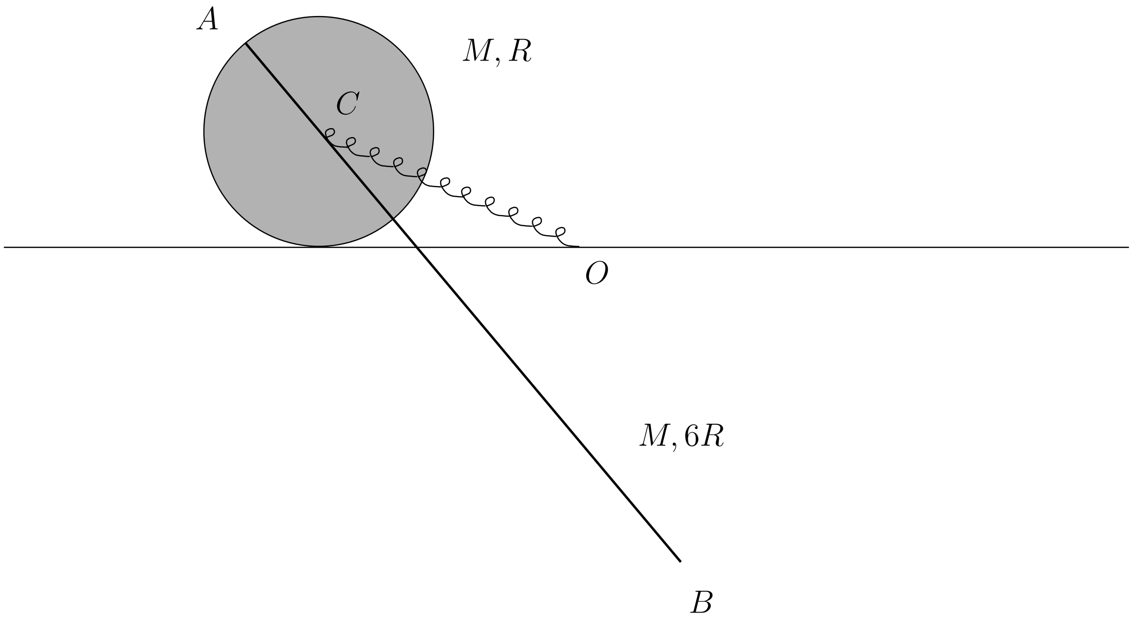
$$\mathcal{L} = \cos q + \dot{q}^2 \,,$$

se ne determini la hamiltoniana associata e si scriva tale hamiltoniana nelle nuove variabili Q, P della precedente trasformazione canonica.

Prova scritta di Meccanica Analitica
Appello del 30 settembre 2008

1) Una disco di massa M e raggio R rotola senza strisciare su una retta orizzontale. Un'asta AB di massa M e lunghezza $6R$ è libera di ruotare attorno al suo punto C distante R da A, e il punto C è vincolato al centro del disco.
Su C agisce una forza elastica di coefficiente k e polo un punto fisso O dell'asse orizzontale. Tutto il sistema è soggetto alla forza di gravità. Si chiede di:

1. trovare il potenziale del sistema e determinare le posizioni di equilibrio;
2. determinare la lagrangiana del moto;
3. linearizzare la lagrangiana attorno alla posizione di equilibrio stabile.



2) Dato il sistema hamiltoniano

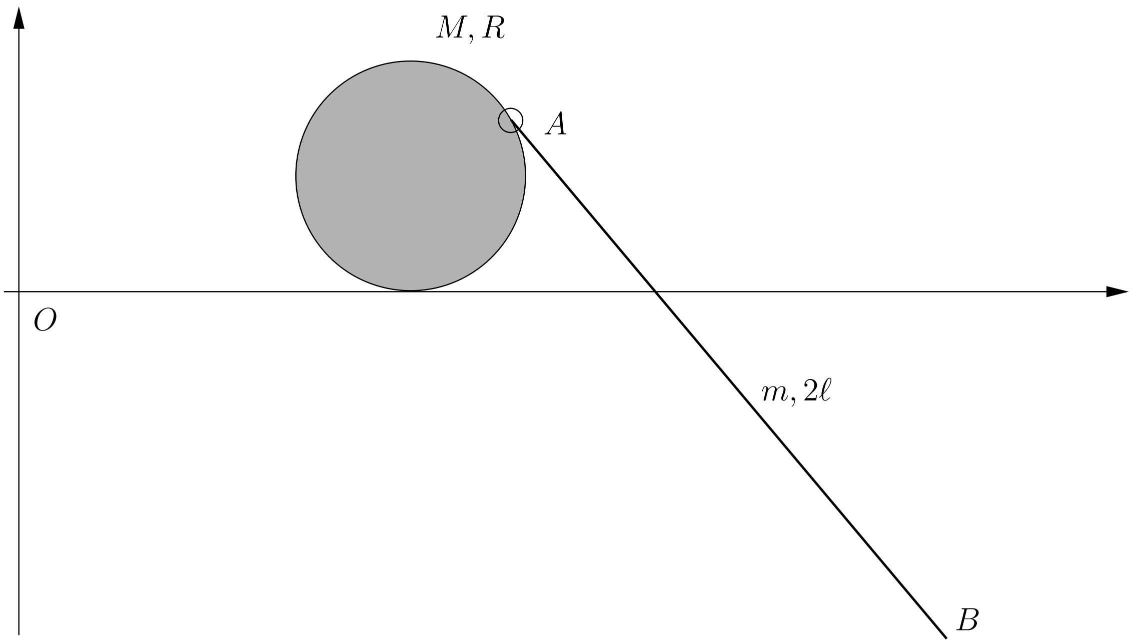
$$\begin{cases} \dot{q} = qp \\ \dot{p} = \cos q - \dfrac{p^2}{2} \end{cases}$$

si trovi l'hamiltoniana del sistema e la lagrangiana ad essa associata. Si scriva poi l'equazione del moto in forma lagrangiana.

Prova scritta di Meccanica Analitica
Appello del 18 dicembre 2008

1) Una disco di massa M e raggio R rotola senza strisciare su una retta orizzontale. Un'asta AB di massa m e lunghezza 2ℓ è libera di ruotare attorno al suo estremo A che è vincolato a un punto del bordo del disco.
Inizialmente il sistema è posto in modo che l'estremo A si trovi nell'origine O di un sistema di riferimento cartesiano ortogonale.
Il sistema è soggetto alla forza di gravità. Si chiede di:

1. determinare le posizioni di equilibrio del sistema e la loro stabilità;
2. determinare le equazioni differenziali del moto.



2) Stabilire per quali $k \in \mathbb{R}$ la trasformazione

$$\begin{cases} Q = -\dfrac{k}{q^2 p} \\ P = k q^3 p^2 \end{cases}$$

è canonica e trovarne una funzione generatrice della forma $F(q, Q)$.

3) Classificare le posizioni di equilibrio del sistema differenziale lineare

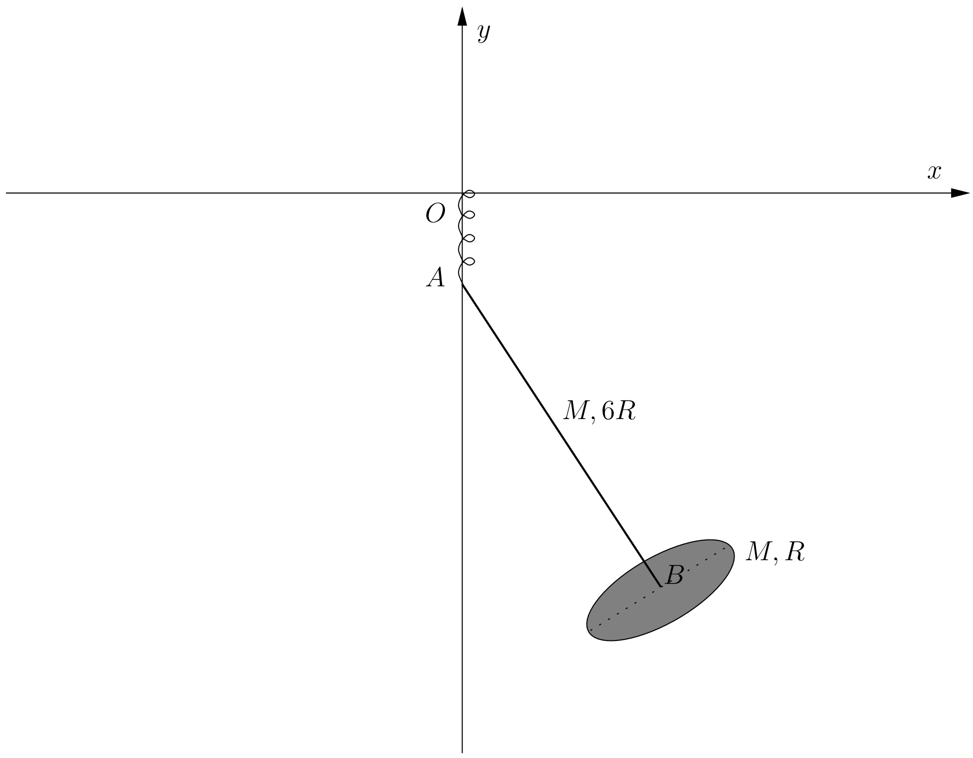
$$\begin{cases} \dot{x} = x + 18hy \\ \dot{y} = hy \end{cases}$$

al variare di $h \in \mathbb{R}$.

Prova scritta di Meccanica Analitica
Appello del 8 gennaio 2009

1) Un'asta AB di massa M e lunghezza $6R$, $R > 0$, si muove in un piano verticale con l'estremo A vincolato a stare sull'asse y. All'estremo B è saldato il centro di un disco di massa M e raggio R, che giace in un piano ortogonale all'asta.
Su A agisce una forza elastica di coefficiente k e polo l'origine O di un sistema di riferimento cartesiano ortogonale Oxy.
Tutto il sistema è soggetto alla forza di gravità.
Dopo aver individuato **tre** parametri lagrangiani che descrivano la posizione del sistema, si chiede di determinare:

1. le posizioni di equilibrio del sistema;
2. la velocità del baricentro del sistema;
3. la lagrangiana del moto.



2) Dato il sistema hamiltoniano

$$\begin{cases} \dot{q} = 2pe^{-q} + q^3 \\ \dot{p} = p^2 e^{-q} - 3pq^2 \end{cases}$$

si trovi l'hamiltoniana del sistema e la lagrangiana ad essa associata. Si scriva poi l'equazione del moto in forma lagrangiana.

Risoluzione della prova dell'8 gennaio 2009

1) Il sistema ha tre gradi di libertà. Poniamo $\xi = y_A$, ϑ l'angolo tra la parte negativa dell'asse y e l'asta AB, φ l'angolo che dentoa la rotazione del disco nel suo piano, si ha $\xi \in \mathbb{R}$, $\vartheta, \varphi \in [0, 2\pi]$.

1. Il potenziale è facile e risulta

$$\begin{aligned} U(\xi, \vartheta, \varphi) &= -\frac{1}{2}k\xi^2 - Mg(\xi - 3R\cos\vartheta) - Mg(\xi - 6R\cos\vartheta) + \text{cost.} \\ &= -\frac{1}{2}k\xi^2 - 2Mg\xi + 9MgR\cos\vartheta + \text{cost.} \end{aligned}$$

quindi il potenziale non dipende da φ. Il sistema dei punti critici dà

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial \xi} = -k\xi - 2Mg = 0 \\ \dfrac{\partial U}{\partial \vartheta} = -9MgR\sin\vartheta = 0 \end{cases}$$

da cui immediatamente $\xi = -2Mg/k$ e $\vartheta = 0, \pi$. Quindi si hanno due **famiglie infinite** di posizioni di equilibrio: $(-2Mg/k, 0, \varphi)$ e $(-2Mg/k, \pi, \varphi)$, al variare di φ.

2. Il baricentro del corpo rigido completo si trova a 3/4 dell'asta, quindi ha coordinate

$$(G - O) = \frac{9}{2}R\sin\vartheta\boldsymbol{e}_1 + (\xi - \frac{9}{2}R\cos\vartheta)\boldsymbol{e}_2$$

da cui

$$\boldsymbol{v}_G = \frac{9}{2}R\dot\vartheta\cos\vartheta\boldsymbol{e}_1 + (\dot\xi + \frac{9}{2}R\dot\vartheta\sin\vartheta)\boldsymbol{e}_2\,.$$

3. Calcoliamo l'energia cinetica del sistema col teorema di König. Il modulo al quadrato della velocità del baricentro vale

$$|\boldsymbol{v}_G|^2 = \dot\xi^2 + \frac{81}{4}R^2\dot\vartheta^2 + 9R\dot\xi\dot\vartheta\sin\vartheta\,.$$

Per i termini di rotazione, scegliamo una base baricentrale solidale col corpo rigido

$$\{\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \boldsymbol{e}'_3\}$$

con $\boldsymbol{e}'_1 = \boldsymbol{e}_{\text{asta}}$ e $\boldsymbol{e}'_2, \boldsymbol{e}'_3$ ortogonali all'asta e solidali al disco. La matrice d'inerzia del corpo rigido in questo sistema di riferimento è diagonale. Il momento d'inerzia baricentrale relativo all'asse lungo l'asta $\boldsymbol{e}'_1$ è solo quello del disco, e vale quindi $MR^2/2$. Il momento d'inerzia baricentrale relativo a ogni asse ortogonale all'asta (e quindi agli assi $\boldsymbol{e}_2', \boldsymbol{e}_3'$) vale, usando la formula di Steiner:

$$I_{\text{asta}_{2,3}} = \frac{1}{12}M(6R)^2 + M\Big(\frac{3}{2}R\Big)^2 = \frac{21}{4}MR^2\,, \quad I_{\text{disco}_{2,3}} = \frac{1}{4}MR^2 + M\Big(\frac{3}{2}R\Big)^2 = \frac{5}{2}MR^2\,,$$

$$I_{G_{2,3}} = I_{\text{asta}_{2,3}} + I_{\text{disco}_{2,3}} = \frac{31}{4}MR^2\,.$$

Infine, la velocità angolare si può scrivere

$$\boldsymbol{\omega} = \dot\varphi\boldsymbol{e}_1' + \dot\vartheta\boldsymbol{e}_z = \dot\varphi\boldsymbol{e}_1' + \dot\vartheta(\cos\varphi\boldsymbol{e}_2' + \sin\varphi\boldsymbol{e}_3')\,.$$

L'energia cinetica è quindi

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2}(2M)|\boldsymbol{v}_G|^2 + \frac{1}{2}\frac{MR^2}{2}\dot\varphi^2 + \frac{1}{2}I_{G_{2,3}}\dot\vartheta^2 \\ &= M\Big(\dot\xi^2 + \frac{81}{4}R^2\dot\vartheta^2 + 9R\dot\xi\dot\vartheta\sin\vartheta\Big) + \frac{1}{4}MR^2\dot\varphi^2 + \frac{31}{8}MR^2\dot\vartheta^2 \end{aligned}$$

da cui si ricava subito la lagrangiana:

$$\mathcal{L} = M\dot\xi^2 + \frac{1}{4}MR^2\dot\varphi^2 + 9MR\dot\xi\dot\vartheta\sin\vartheta + \frac{193}{8}MR^2\dot\vartheta^2 - \frac{1}{2}k\xi^2 - 2Mg\xi + 9MgR\cos\vartheta\,.$$

2) Si ha

$$\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial p} = 2pe^{-q} + q^3 \quad\Rightarrow\quad \mathcal{H}(q,p) = p^2e^{-q} + pq^3 + g(q)\,,$$

$$\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial q} = -p^2e^{-q} + 3pq^2 + g'(q) = -p^2e^{-q} + 3pq^2 \quad\Rightarrow\quad g(q) = \text{cost.}$$

e quindi

$$\mathcal{H}(q,p) = p^2e^{-q} + pq^3\,.$$

Per calcolare la lagrangiana, facciamo la trasformata di Legendre:

$$\mathcal{L} = p\dot q - \mathcal{H}$$

esprimendo p in funzione di $(q,\dot q)$ mediante $\dot q = \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial p}$. Facendo i conti si ottiene

$$\mathcal{L}(q,\dot q) = \frac{(\dot q - q^3)^2}{2}e^q\,,$$

da cui si può ricavare anche l'equazione del moto (dopo alcuni conti):

$$\ddot q + \dot q^2 - q^3\dot q - 3q^5 = 0\,.$$

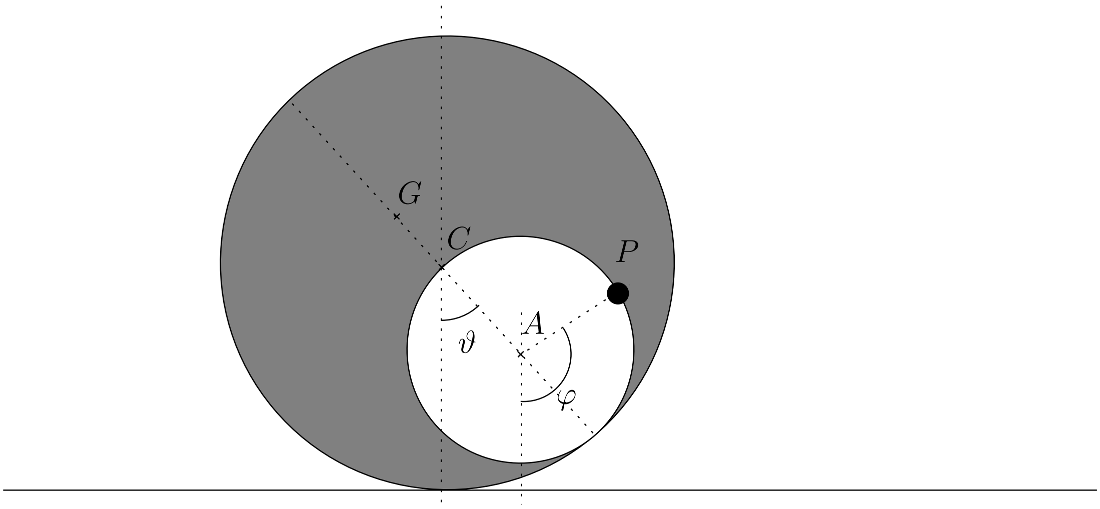
Prova scritta di Meccanica Analitica
Appello del 17 marzo 2009

1) Una lamina omogenea ha la forma di un disco di raggio R in cui è stato praticato un foro circolare di raggio $R/2$ tangente internamente al disco. Tale lamina, di massa M, si muove in un piano verticale e rotola senza strisciare lungo una retta orizzontale. Inoltre, sul bordo del foro circolare scorre senza attrito un punto materiale di massa m.
Tutto il sistema è soggetto alla forza di gravità. Si chiede di:

1. determinare la distanza d del baricentro della lamina dal centro del disco grande e il momento d'inerzia baricentrale della lamina rispetto all'asse perpendicolare al piano del moto;

2. trovare le posizioni di equilibrio del sistema e discuterne la stabilità in funzione del parametro $\lambda = \frac{m}{M}$;

3. determinare la lagrangiana del sistema.



2) Si dica per quali valori del parametro $k \in \mathbb{R}$ la trasformazione

$$\begin{cases} Q = \tan\left(\dfrac{kp}{q}\right) \\ P = -\dfrac{q^2}{1 + \tan^2\left(\frac{kp}{q}\right)} \end{cases}$$

è canonica. Si esprima poi nelle nuove variabili (Q, P) l'hamiltoniana

$$\mathcal{H}(q,p) = \frac{p^2}{4q^2} + q^2 \,.$$

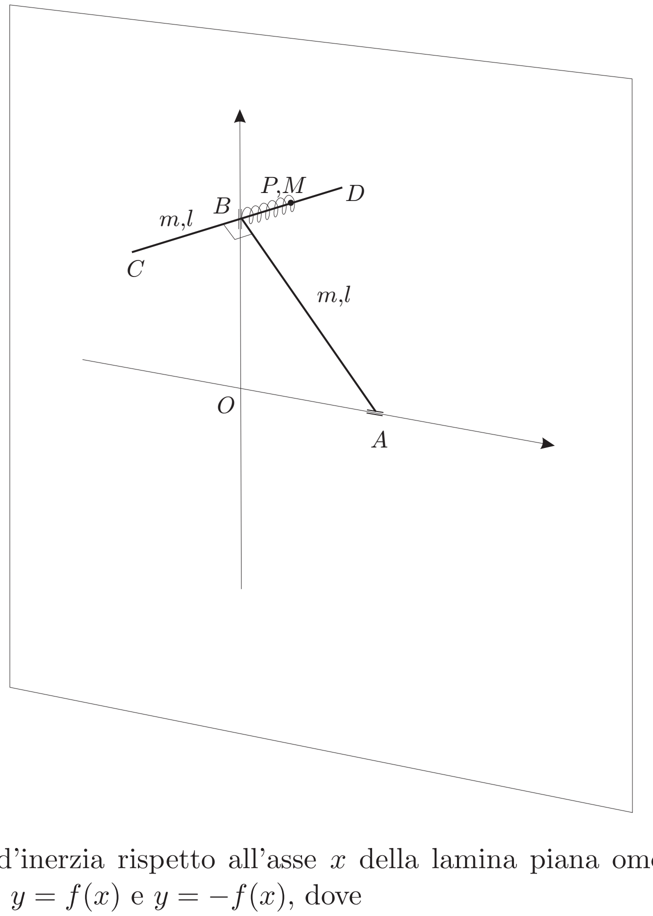
Prova scritta di Meccanica Analitica
Appello dell'1 aprile 2009

1) Un'asta AB di massa m e lunghezza l si muove in un piano verticale xy mantenendo l'estremo A sull'asse orizzontale x e l'estremo B sull'asse verticale y. All'estremo B è saldato il baricentro di una seconda asta CD, uguale alla prima, che si mantiene sempre perpendicolare al piano xy.
Inoltre, sull'asta CD scorre un punto materiale P di massa M, che è soggetto a una forza elastica di coefficiente $k > 0$ e polo il punto B.
Tutto il sistema è soggetto alla forza di gravità e i vincoli sono lisci. Si chiede di:

1. trovare le posizioni di equilibrio ordinarie e di confine del sistema e discutere la stabilità di quelle ordinarie;

2. determinare le equazioni del moto del sistema;

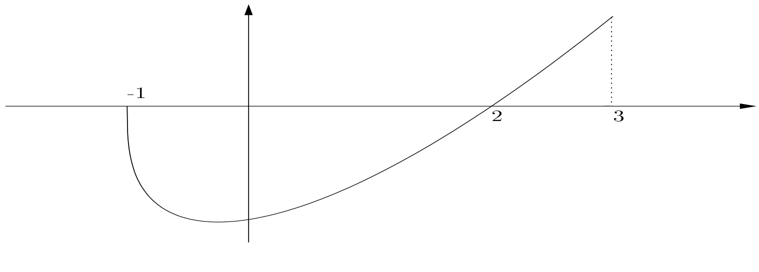
3. scrivere le equazioni del moto linearizzate attorno a una posizione di equilibrio stabile.



2) Si trovi il momento d'inerzia rispetto all'asse x della lamina piana omogenea delimitata dalla retta $x = 3$ e dalle curve $y = f(x)$ e $y = -f(x)$, dove

$$f(x) = \frac{(x-2)}{3}\sqrt[3]{x+1}, \qquad x \in [-1, 3]$$

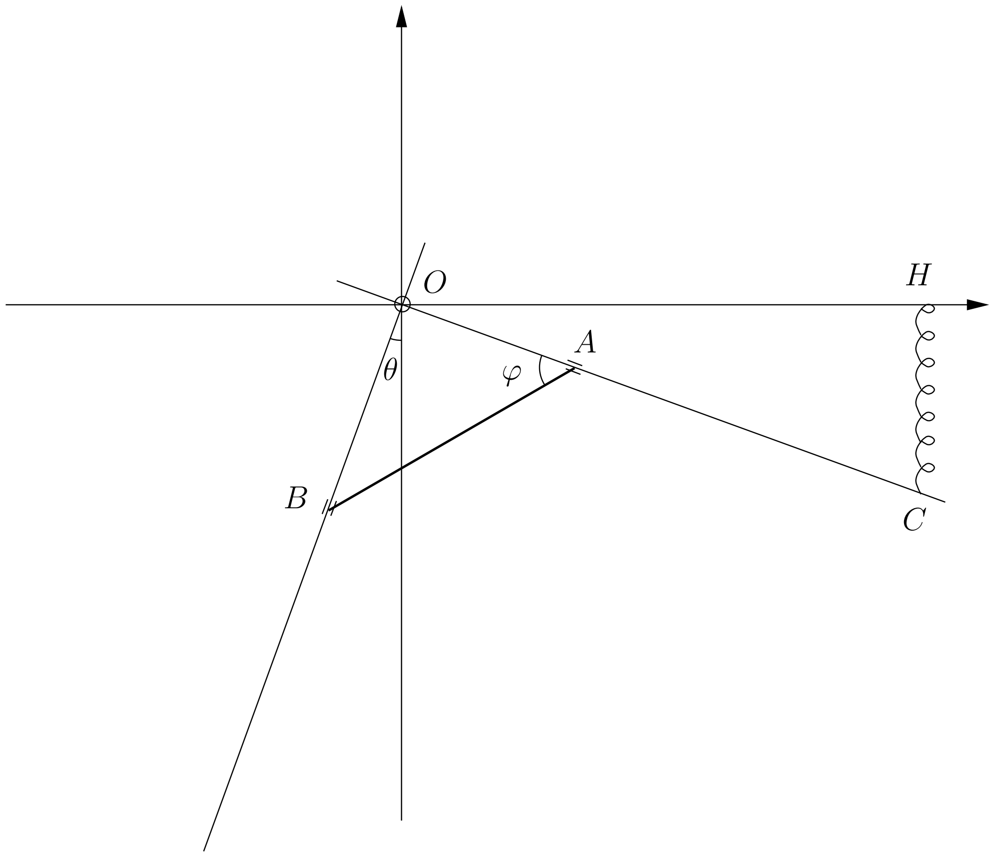
è la curva rappresentata in figura.



Prova scritta di Meccanica Analitica
Appello del 16 giugno 2009

1) Due guide rettilinee saldate ortogonalmente sono libere di ruotare in un piano verticale attorno al loro punto comune O, origine di un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy. Un'asta omogenea AB di massa m e lunghezza ℓ ha l'estremo A vincolato a scorrere su una guida rettilinea e l'estremo B vincolato a scorrere sull'altra guida. Sul punto C della prima guida a distanza 2ℓ da O agisce poi una forza elastica di coefficiente $k > 0$ e polo il punto H dell'asse x che sta sulla verticale per C.
Si usino come parametri lagrangiani gli angoli θ e ϕ in figura.
Tutti i vincoli sono lisci e l'asta è soggetta alla forza peso. Si chiede di:

1. trovare tutte le posizioni di equilibrio per cui $0 \leq \theta, \phi \leq \frac{\pi}{2}$;
2. studiare la stabilità di tali posizioni;
3. determinare la lagrangiana del sistema;
4. determinare le pulsazioni delle piccole oscillazioni attorno alla posizione di equilibrio $\theta = 0$, $\phi = \frac{\pi}{2}$.



2) Dato il cambio di variabili

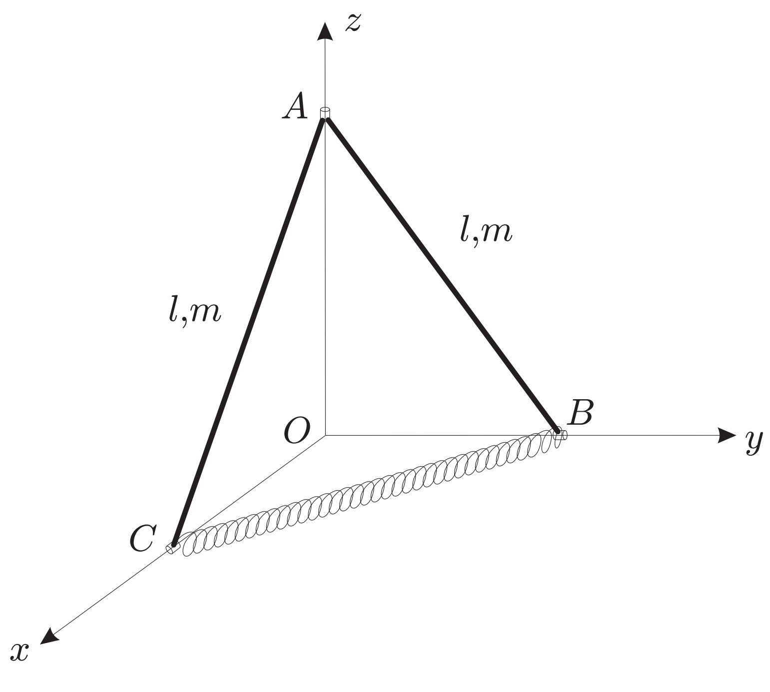
$$\begin{cases} Q = k\sqrt[3]{q^5 p^2} \\ P = k\sqrt[3]{p/q^2} \end{cases}$$

si determini per quali $k > 0$ la trasformazione è canonica e se ne dia una funzione generatrice del tipo $F(q, P)$.

Prova scritta di Meccanica Analitica
Appello del 17 luglio 2009

1) Un'asta rigida omogenea di massa m e lunghezza ℓ ha gli estremi A e B vincolati a scorrere rispettivamente sull'asse z e sull'asse y di un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $Oxyz$. Una seconda asta, identica alla prima, ha un estremo agganciato ad A e l'altro estremo C che scorre sull'asse x.
Il sistema è soggetto alla forza peso; inoltre, tra gli estremi B e C intercorre una forza elastica di coefficiente $k > 0$.
Supponendo tutti i vincoli lisci, si chiede di:

1. trovare tutte le posizioni di equilibrio del sistema;
2. studiare la stabilità di tali posizioni al variare del parametro $\lambda = \frac{mg}{2k\ell}$;
3. determinare l'equazione del moto del sistema;
4. nel caso $\lambda = \frac{1}{5}$, risolvere l'equazione linearizzata del moto attorno a una posizione di equilibrio stabile.



2) Data la lagrangiana

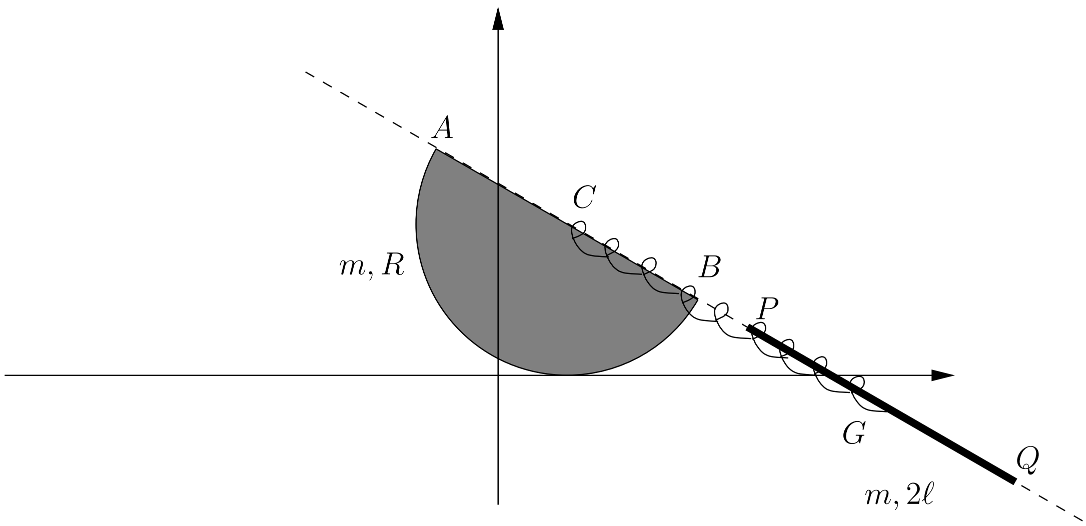
$$\mathcal{L}(q, \dot{q}) = h\dot{q}^2 + q\dot{q} - q^2 \,, \qquad h \neq 0$$

si chiede di determinarne l'hamiltoniana associata, il sistema di equazioni di Hamilton e, dopo aver notato che tale sistema è lineare, la classificazione delle sue traiettorie al variare del parametro h.

Prova scritta di Meccanica Analitica
Appello del 4 settembre 2009

1) Una lamina omogenea semicircolare di massa m e raggio R rotola senza strisciare su una retta orizzontale, in modo che il suo diametro AB non superi mai la verticale.
Un'asta rigida omogenea PQ di massa m e lunghezza 2ℓ scorre senza attrito su una guida rettilinea infinita sostenuta dal diametro AB.
Tra il baricentro G dell'asta e il punto medio C del diametro AB intercorre una forza elastica di coefficiente $k > 0$.
Il sistema è soggetto alla forza peso. Si chiede di:

1. trovare le posizioni di equilibrio ordinarie e di confine del sistema;
2. studiare la stabilità delle posizioni di equilibrio ordinarie;
3. determinare la lagrangiana del sistema.



2) Data l'hamiltoniana

$$\mathcal{H}(q,p) = \frac{q^2}{2} + 4kqp + 4p^2$$

dipendente dal parametro $k \in \mathbb{R}$, si chiede di scrivere il sistema hamiltoniano associato. Dopo aver notato che tale sistema è lineare, si studi la classificazione delle sue traiettorie al variare del parametro k.

Risoluzione della prova del 4 settembre 2009

1) Il sistema ha due gradi di libertà. Denotiamo con ϑ l'angolo tra l'asse orizzontale e la retta AB (per comodità lo prendiamo in senso orario) e con ξ la distanza con segno tra il punto C e il baricentro G dell'asta Si ha $\xi \in \mathbb{R}$ e $\vartheta \in [-\pi/2, \pi/2]$, quindi per ϑ esistono due posizioni di confine.
Ricordiamo che il baricentro K della lamina semicircolare dista $4R/3pi$ da C. Inoltre $C = (R\vartheta, R)$ dal puro rotolamento. Quindi

$$(K - O) = (K - C) + (C - O) = \left(R\vartheta - \frac{4R}{3\pi} \sin\vartheta, R - \frac{4R}{3\pi} \cos\vartheta \right).$$

Per il baricentro G dell'asta si ha

$$(G - O) = (G - C) + (C - O) = (R\vartheta + \xi \cos\vartheta, R - \xi \sin\vartheta).$$

1. Poiché la forza elastica ha potenziale $-k\xi^2/2$, si ha

$$U(\xi, \vartheta) = mg \left(\frac{4R}{3\pi} \cos\vartheta + \xi \sin\vartheta \right) - k\frac{\xi^2}{2} + \text{cost.}$$

e dunque le posizioni di equilibrio si trovano risolvendo il sistema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial \xi} = -k\xi + mg \sin\vartheta = 0 \\ \dfrac{\partial U}{\partial \vartheta} = mg \left(-\dfrac{4R}{3\pi} \sin\vartheta + \xi \cos\vartheta \right) = 0\,. \end{cases}$$

La prima equazione dà $\xi = \frac{mg}{k} \sin\vartheta$, quindi la seconda diventa

$$\sin\vartheta \left(-\frac{4R}{3\pi} + \frac{mg}{k} \cos\vartheta \right) = 0$$

da cui (ricordando le limitazioni per ϑ) si trovano le posizioni di equilibrio

$$E_1(\xi = 0, \vartheta = 0), \quad E_{2,3} \left(\xi = \pm\sqrt{\frac{m^2g^2}{k^2} - \frac{16R^2}{9\pi^2}}, \vartheta = \pm\text{arccos}\, \frac{4kR}{3\pi mg} \right).$$

Le posizioni $E_{2,3}$ esistono solo per $4kR < 3\pi mg$.
Le posizioni di confine si hanno per $\vartheta = \pm\pi/2$. Nel caso $\vartheta = \pi/2$ si ha che le velocità virtuali hanno componenti w_ξ qualsiasi e $w_\vartheta \leqslant 0$, per cui

$$mg \left(-\frac{4R}{3\pi} \sin\vartheta + \xi \cos\vartheta \right) \geqslant 0$$

per $\xi = 0, \vartheta = \pi/2$, ovvero

$$-\frac{4R}{3\pi} \geqslant 0$$

che è impossibile. Idem per l'altro caso, quindi non ci sono posizioni di equilibrio di confine.

2. Calcoliamo l'hessiano:

$$\mathcal{H}(\xi, \vartheta) = \begin{bmatrix} -k & mg\cos\vartheta \\ mg\cos\vartheta & -mg \left(\frac{4R}{3\pi} \cos\vartheta + \xi \sin\vartheta \right) \end{bmatrix}.$$

Si ha
$$\mathcal{H}(E_1) = \begin{bmatrix} -k & mg \\ mg & -mg\frac{4R}{3\pi} \end{bmatrix}$$
da cui $\det \mathcal{H}(E_1) = mg\left(\frac{4kR}{3\pi} - mg\right)$. Quindi E_1 è stabile per $4kR > 3\pi mg$ e instabile per $4kR < 3\pi mg$.
Vediamo le altre due:
$$\mathcal{H}(E_{2,3}) = \begin{bmatrix} -k & \frac{4kR}{3\pi} \\ \frac{4kR}{3\pi} & -\frac{m^2g^2}{k} \end{bmatrix}$$
da cui $\det \mathcal{H}(E_{2,3}) = m^2g^2 - \left(\frac{4kR}{3\pi}\right)^2$. Quindi le posizioni $E_{2,3}$ quando esistono sono stabili.

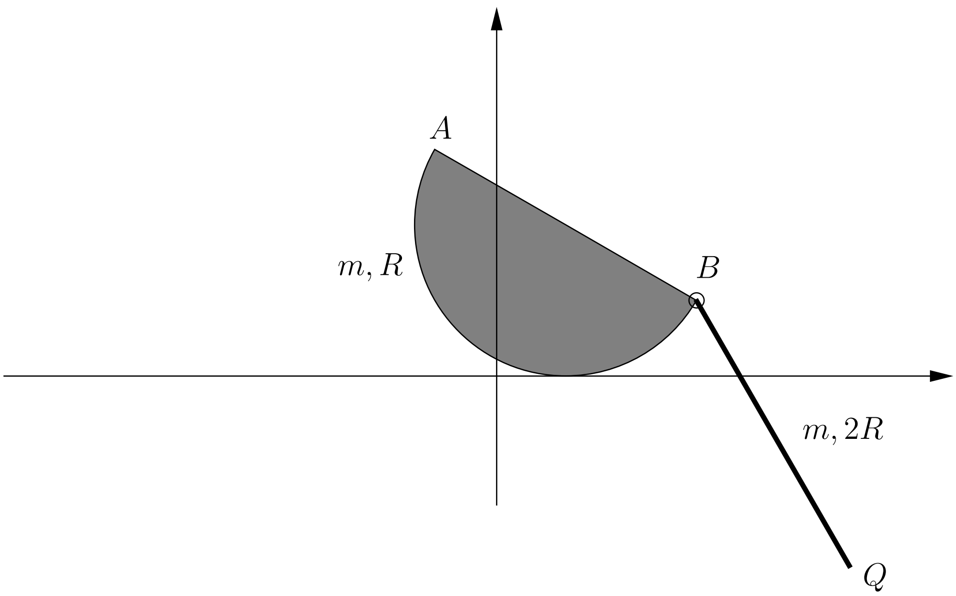
3. L'energia cinetica è presto calcolata grazie al teorema di König: la velocità dei baricentri K e G sono
$$\boldsymbol{v}_K = \dot\vartheta\left(R - \frac{4R}{3\pi}\cos\vartheta, \frac{4R}{3\pi}\sin\vartheta\right)$$
$$\boldsymbol{v}_G = \left(R\dot\vartheta + \dot\xi\cos\vartheta - \xi\dot\vartheta\sin\vartheta, -\dot\xi\sin\vartheta - \xi\dot\vartheta\cos\vartheta\right),$$
quindi
$$v_K^2 = \dot\vartheta^2\left(R^2 + \frac{16R^2}{9\pi^2} - \frac{8R}{3\pi}\cos\vartheta\right)$$
$$v_G^2 = R^2\dot\vartheta^2 + \dot\xi^2 + \xi^2\dot\vartheta^2 + 2R\dot\vartheta\dot\xi\cos\vartheta - 2R\xi\dot\vartheta^2\sin\vartheta\,.$$
Il momento d'inerzia baricentrale dell'asta rispetto all'asse perpendicolare è ovvio, quello del semicerchio si può calcolare col Teorema di Steiner: il momento d'inerzia perpendicolare del cerchio rispetto al suo centro è $mR^2/2$, quindi quello del semicerchio rispetto a C è $mR^2/4$. Ora lo portiamo in K (attenzione al segno "meno": stiamo andando nel baricentro, non viceversa):
$$\mathcal{I}_K = \mathcal{I}_C - m\left(\frac{4R}{3\pi}\right)^2 = \frac{mR^2}{4} - \frac{16mR^2}{9\pi^2} = \frac{9\pi^2 - 64}{36\pi^2}mR^2\,.$$
Tenendo conto che la velocità angolare sia della lamina che dell'asta è $\dot\vartheta$, si ottiene facilmente la lagrangiana.

2) Il sistema di Hamilton è
$$\begin{cases} \dot q = 4kq + 8p \\ \dot p = -q - 4kp \end{cases}$$
e quindi la matrice associata è
$$\begin{bmatrix} 4k & 8 \\ -1 & -4k \end{bmatrix},$$
che ha polinomio caratteristico $\lambda^2 = 16k^2 - 8$. Quindi per $|k| > \sqrt{2}/2$ l'origine è una sella, mentre per $|k| < \sqrt{2}/2$ è un centro.

Prova scritta di Meccanica Analitica
Appello del 22 settembre 2009

1) Una lamina omogenea semicircolare di massa m e raggio R rotola senza strisciare su una retta orizzontale, in modo che il suo diametro AB non superi mai la verticale.
Un'asta rigida omogenea BQ, anch'essa di massa m e lunghezza $2R$, è vincolata al punto B della semicirconferenza e può ruotare senza attrito attorno ad esso.
Il sistema è soggetto alla forza peso. Si chiede di:

1. trovare le posizioni di equilibrio ordinarie e di confine del sistema;
2. studiare la stabilità delle posizioni di equilibrio ordinarie;
3. determinare la lagrangiana del sistema.



2) Trovare per quali valori del parametro $k \in \mathbb{R}$ la trasformazione

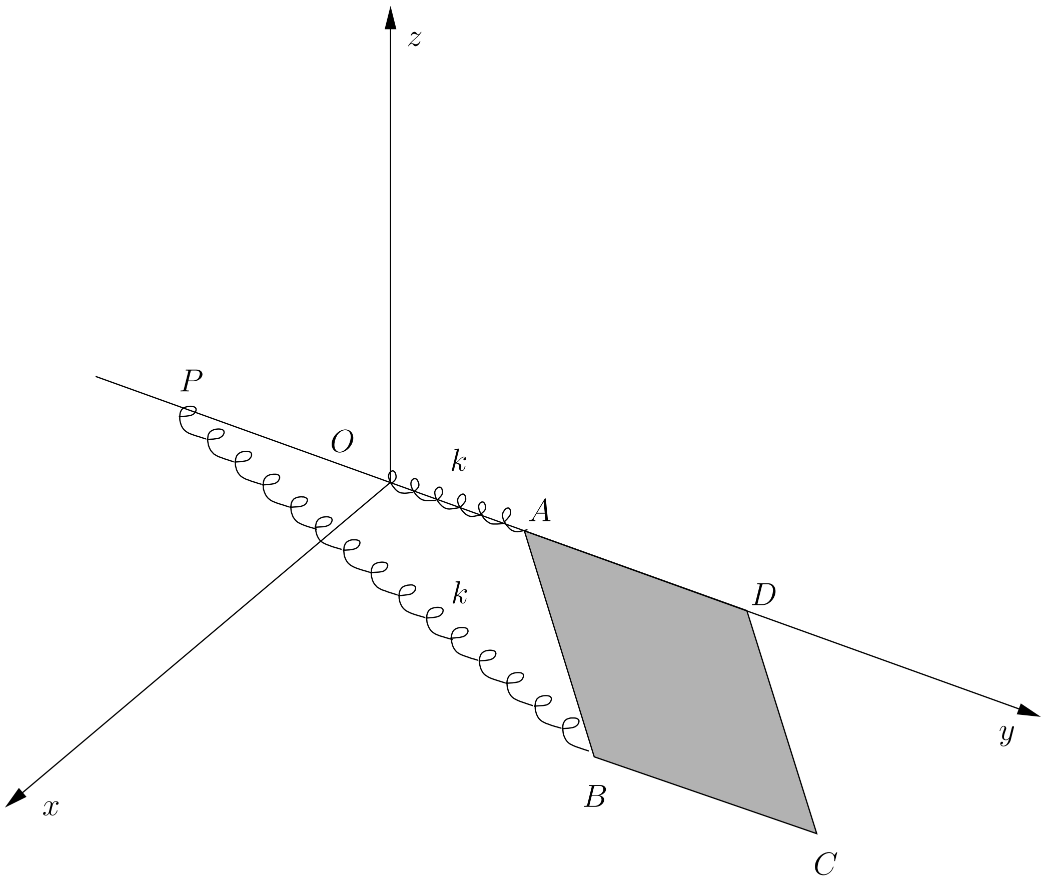
$$\begin{cases} Q = k\sqrt{pe^q} \\ P = \sqrt{pe^{-q}} \end{cases}$$

è canonica. Per tali valori si trovi poi una funzione generatrice della forma $F(q, P)$.

Prova scritta di Meccanica Analitica
Appello del 15 dicembre 2009

1) Una lamina omogenea quadrata $ABCD$ di lato ℓ e massa m ha il lato AD vincolato a scorrere sull'asse y di un sistema di riferimento cartesiano ortogonale, ed è libera di ruotare attorno a tale lato. Sul punto A della lamina agisce una forza elastica di coefficiente $k > 0$ e polo l'origine O, mentre sul punto B della lamina agisce un'altra forza elastica di coefficiente k e polo il punto P di coordinate $(0, -\ell, 0)$.
Il sistema è soggetto alla forza peso e tutti i vincoli sono lisci. Si chiede di:

1. trovare le posizioni di equilibrio del sistema e studiarne la stabilità;
2. determinare le equazioni del moto del sistema;
3. trovare la lagrangiana approssimata nell'intorno della posizione di equilibrio stabile.



2) Trovare per quali valori del parametro $k \in \mathbb{R}$ la trasformazione

$$\begin{cases} Q = kq^{\frac{5}{3}}p^{\frac{2}{3}} \\ P = 3q^{-\frac{2}{3}}p^{\frac{1}{3}} \end{cases}$$

è canonica. Per tali valori si trovi poi una funzione generatrice della forma $F(q, P)$.
Infine, si esprima nelle nuove variabili la hamiltoniana

$$\mathscr{H}(q, p) = q^3 p^3 \,.$$

Prova scritta di Meccanica Analitica
Appello del 12 gennaio 2010

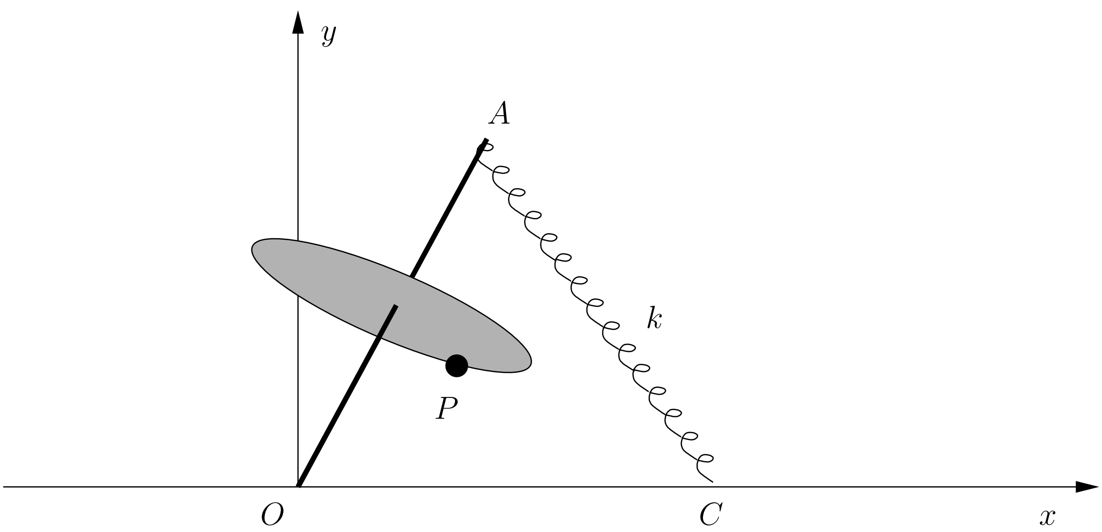
1) Data la lagrangiana

$$\mathscr{L}(q, \dot{q}) = \frac{1}{4}\Big[\dot{q}^2 - 2kq\dot{q} + (k^2 - 4)q^2\Big]$$

se ne determini l'hamiltoniana associata e il relativo sistema hamiltoniano.
Dopo aver notato che tale sistema è lineare, se ne classifichino le traiettorie al variare di k.

2) Un corpo rigido è formato da un'asta OA omogenea di lunghezza $2R$ e massa m, al cui baricentro è saldato il centro di una lamina circolare omogenea di raggio R e massa m, giacente nel piano perpendicolare all'asta. Inoltre a un punto del bordo della lamina è saldato un punto materiale P di massa m.
L'estremo O è fissato nell'origine di un sistema di riferimento cartesiano ortogonale, e il corpo rigido può muoversi in modo che l'asta stia sempre nel piano verticale xy e il corpo possa ruotare attorno all'asta.
Sull'estremo A dell'asta agisce una forza elastica di coefficiente $k > 0$ e polo il punto C di coordinate $(2R, 0)$.
Il sistema è soggetto alla forza peso e tutti i vincoli sono lisci. Si chiede di:

1. trovare le posizioni di equilibrio del sistema al variare del parametro $\lambda = \frac{kR}{mg}$;
2. studiare la stabilità delle posizioni di equilibrio nel caso $\lambda = 1$;
3. trovare la matrice d'inerzia del corpo rigido rispetto a O in un sistema di riferimento solidale.

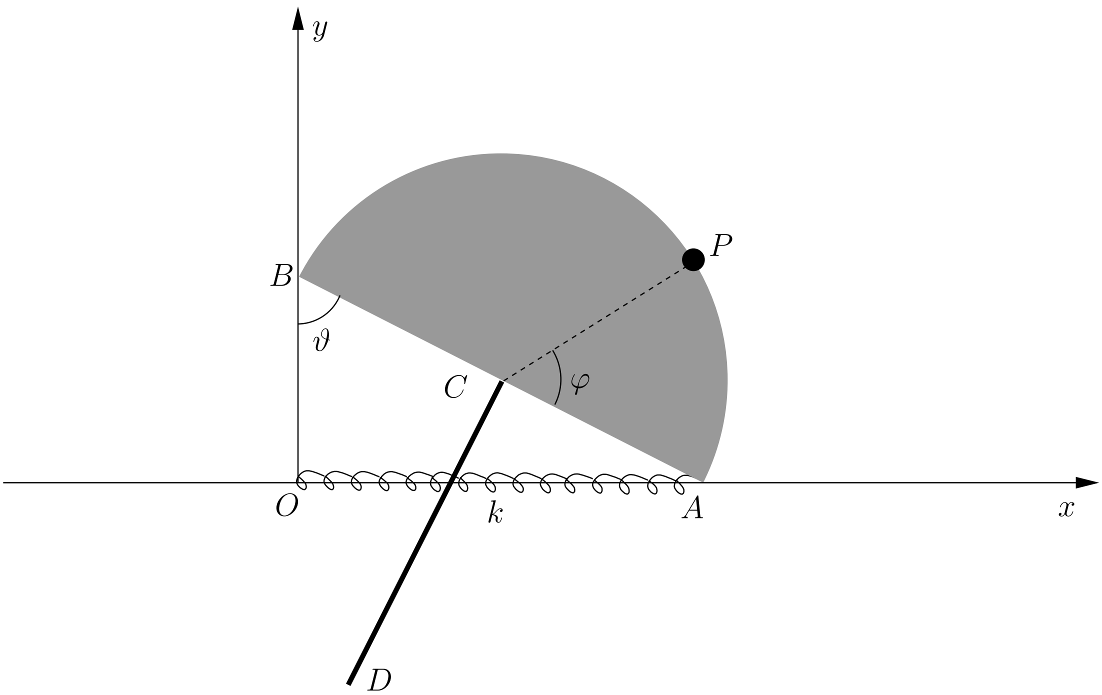


Prova scritta di Meccanica Analitica
Appello del 30 marzo 2010

1) Un corpo rigido è formato da un semidisco omogeneo di massa m e raggio R e da un'asta omogenea di massa m e lunghezza incognita. L'asta è saldata al centro del diametro del semidisco, ortogonalmente al diametro stesso e dalla parte opposta rispetto al semidisco.
Tale corpo rigido si può muovere in modo che gli estremi A e B del diametro del semidisco si muovano rispettivamente sull'asse x e sull'asse y di un sistema cartesiano ortogonale.
Inoltre un punto materiale P di massa M può scorrere sulla parte circolare del bordo del semidisco.
Sull'estremo A del diametro agisce una forza elastica di coefficiente $k > 0$ e polo il punto O.
Il sistema è soggetto alla forza peso e tutti i vincoli sono lisci. Si chiede di:

1. determinare la lunghezza dell'asta in modo che il baricentro del corpo rigido si trovi esattamente nel centro C del semidisco;
2. trovare le posizioni di equilibrio ordinarie e di confine del sistema;
3. studiare la stabilità delle posizioni di equilibrio ordinarie;
4. determinare le equazioni di Lagrange del moto del sistema.

Nota: si è cosi sicuri che tutti ne sono ampiamente a conoscenza, che non viene neanche in mente di scrivere che il baricentro del semidisco omogeneo si trova a distanza $\frac{4R}{3\pi}$ dal diametro.



2) Data la trasformazione

$$\begin{cases} Q = \sqrt{\dfrac{1-p}{p}} - kq \\ P = -p + hq \end{cases}$$

se ne trovino i valori di $h, k \in \mathbb{R}$ per cui è canonica.
Si trovi poi una funzione generatrice del tipo $F(q, Q)$.

Risoluzione della prova del 30 marzo 2010

1) 1. Questo punto è immediato: sapendo che il baricentro del semidisco sta a $\frac{4R}{3\pi}$ da C sul prolungamento dell'asta, è sufficiente chiedere che anche il baricentro dell'asta stia a $\frac{4R}{3\pi}$ da C, e quindi l'asta risulta lunga $\ell = \frac{8R}{3\pi}$.

2. Il sistema ha due gradi di libertà: usiamo gli angoli ϑ e φ suggeriti nel disegno del tema. Si ha $\vartheta \in [0, 2\pi]$ e $\varphi \in [0, \pi]$, quindi esistono delle posizioni di confine per $\varphi = 0$ e per $\varphi = \pi$.
Supponiamo $\varphi \in (0, \pi)$ e scriviamo il potenziale: le forze agenti sono il peso sul corpo rigido, il peso sul punto, la forza elastica. Poiché dal primo punto si ha che il baricentro del corpo rigido sta in C, il potenziale del peso del corpo rigido è $-2mgR\cos\vartheta$. Anche il potenziale elastico è subito calcolato: $-\frac{1}{2}k(2R\sin\vartheta)^2$. Per calcolare la quota di P, conviene osservare che l'angolo formato dal raggio CP con la verticale discendente è $\vartheta + \varphi$, e quindi l'angolo di CP con l'orizzontale è $\vartheta + \varphi - \frac{\pi}{2}$. Quindi

$$(P-O)_y = (P-C)_y + (C-O)_y = R\sin\left(\vartheta + \varphi - \frac{\pi}{2}\right) + R\cos\vartheta = R\left(\cos\vartheta - \cos(\vartheta+\varphi)\right).$$

Allora il potenziale complessivo è

$$U(\vartheta, \varphi) = -2mgR\cos\vartheta - 2kR^2\sin^2\vartheta - MgR\left(\cos\vartheta - \cos(\vartheta+\varphi)\right).$$

Il sistema dei punti critici è

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial \vartheta} = 2mgR\sin\vartheta - 4kR^2\sin\vartheta\cos\vartheta + MgR\left(\sin\vartheta - \sin(\vartheta+\varphi)\right) = 0 \\ \dfrac{\partial U}{\partial \varphi} = -MgR\sin(\vartheta+\varphi) = 0\,, \end{cases}$$

da cui $R\sin\vartheta(2mg + Mg - 4kR\cos\vartheta) = 0$ e $\sin(\vartheta+\varphi) = 0$. La prima ha soluzioni

$$\vartheta_{1,2} = 0, \pi \quad \vartheta_{3,4} = \alpha, 2\pi - \alpha, \qquad \alpha = \arccos\left(\frac{(2m+M)g}{4kR}\right)$$

con la condizione $(2m+M)g < 4kR$ per l'esistenza di $\vartheta_{3,4}$. Notiamo che ϑ_3 sta nel primo quadrante e ϑ_4 nel quarto quadrante (quando esistono). La seconda dà $\varphi = h\pi - \vartheta$, $h \in \mathbb{N}$, da cui, ricordando che $0 < \varphi < \pi$,

$$\varphi_3 = \pi - \alpha, \quad \varphi_4 = \alpha \qquad \text{nel caso } (2m+M)g < 4kR.$$

Quindi ci sono al più due posizioni di equilibrio ordinarie, e solo nel caso $(2m+M)g < 4kR$.
Discutiamo le posizioni di confine: se $\varphi = 0$ si ha $w_\varphi \geqslant 0$ e dunque deve essere

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial \vartheta} = 2mgR\sin\vartheta - 4kR^2\sin\vartheta\cos\vartheta + MgR\left(\sin\vartheta - \sin\vartheta\right) = 0 \\ \dfrac{\partial U}{\partial \varphi} = -MgR\sin\vartheta \leqslant 0 \end{cases}$$

che è soddisfatto dalle soluzioni ϑ che stanno nei primi due quadranti, quindi $\vartheta = 0, \pi$ e $\vartheta = \arccos\left(\frac{mg}{2kR}\right)$ nel caso $mg < 2kR$. Abbiamo allora al più tre posizioni di equilibrio di confine $(\vartheta, 0)$:

$$(0,0), \quad (\pi, 0), \quad \left(\arccos\left(\frac{mg}{2kR}\right), 0\right).$$

Nel caso $\varphi = \pi$, si ha $w_\varphi \leqslant 0$, dunque

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial \vartheta} = 2mgR\sin\vartheta - 4kR^2\sin\vartheta\cos\vartheta + MgR\left(\sin\vartheta - \sin(\vartheta+\pi)\right) = 0 \\ \dfrac{\partial U}{\partial \varphi} = -MgR\sin(\vartheta+\pi) \geqslant 0 \end{cases}$$

da cui di nuovo ϑ deve stare nei primi due quadranti e dunque $\vartheta = 0, \pi$ e $\vartheta = \arccos\left(\frac{(M+m)g}{2kR}\right)$ nel caso $(M+m)g < 2kR$. Abbiamo troviamo al più altre tre posizioni di equilibrio di confine (ϑ, π):

$$(0,\pi), \quad (\pi,\pi), \quad \left(\arccos\left(\frac{(M+m)g}{2kR}\right), \pi\right).$$

3. Ci dobbiamo porre nel caso $(2m+M)g < 4kR$ per avere posizioni di equilibrio ordinarie. Calcoliamo l'hessiano:

$$\mathcal{H}(\vartheta,\varphi) = \begin{bmatrix} (2m+M)gR\cos\vartheta - 4kR^2(2\cos^2\vartheta - 1) - MgR\cos(\vartheta+\varphi) & -MgR\cos(\vartheta+\varphi) \\ -MgR\cos(\vartheta+\varphi) & -MgR\cos(\vartheta+\varphi) \end{bmatrix}.$$

Si ha

$$\mathcal{H}(\alpha,\pi-\alpha) = \begin{bmatrix} (2m+M)gR\left(\frac{(2m+M)g}{4kR}\right) - 4kR^2\left(2\left(\frac{(2m+M)g}{4kR}\right)^2 - 1\right) + MgR & MgR \\ MgR & MgR \end{bmatrix}$$

e dunque la posizione è instabile, visto che il minore in basso a destra è positivo (dunque il punto può essere solo un minimo o una sella).
Proviamo l'altra posizione:

$$\mathcal{H}(\alpha,\pi-\alpha) = \begin{bmatrix} (2m+M)gR\left(\frac{(2m+M)g}{4kR}\right) - 4kR^2\left(2\left(\frac{(2m+M)g}{4kR}\right)^2 - 1\right) - MgR & -MgR \\ -MgR & -MgR \end{bmatrix}.$$

La posizione è stabile se il determinante è positivo, quindi

$$(2m+M)gR\left(\frac{(2m+M)g}{4kR}\right) < 4kR^2\left(2\left(\frac{(2m+M)g}{4kR}\right)^2 - 1\right)$$

ovvero, dividendo per $4kR^2$,

$$\left(\frac{(2m+M)g}{4kR}\right)^2 < 2\left(\frac{(2m+M)g}{4kR}\right)^2 - 1.$$

Dunque, essendo $(2m+M)g < 4kR$, anche questa posizione è instabile.

4. Determiniamo l'energia cinetica. La posizione di P è data da

$$(P-O) = (P-C) + (C-O) = R(\sin\vartheta + \sin(\vartheta+\varphi))\boldsymbol{e}_1 + R(\cos\vartheta - \cos(\vartheta+\varphi))\boldsymbol{e}_2\,,$$

quindi derivando e facendone il modulo viene

$$|\boldsymbol{v}(P)|^2 = R^2(\dot\vartheta^2 + (\dot\vartheta+\dot\varphi)^2 + 2\dot\vartheta(\dot\vartheta+\dot\varphi)\cos(2\vartheta+\varphi)).$$

La velocità di C, che è il baricentro del corpo rigido, viene immediatamente: $|\boldsymbol{v}(C)|^2 = R^2\dot\vartheta^2$, e il momento d'inerzia del corpo rigido in C lungo l'asse z vale

$$I_3 = \frac{1}{2}mR^2 + \frac{1}{3}m\left(\frac{8R}{3\pi}\right)^2 = \frac{27\pi^2+128}{54\pi^2}mR^2 \quad (\simeq 0.74mR^2)$$

visto che il momento del semidisco è $mR^2/2$ e la lunghezza dell'asta è quella calcolata al punto 1.
Quindi l'energia cinetica totale è

$$K = \frac{1}{2}MR^2(\dot\vartheta^2 + (\dot\vartheta+\dot\varphi)^2 + 2\dot\vartheta(\dot\vartheta+\dot\varphi)\cos(2\vartheta+\varphi)) + mR^2\dot\vartheta^2 + \frac{1}{2}\frac{27\pi^2+128}{54\pi^2}mR^2\dot\vartheta^2.$$

Da qui si possono ricavare la lagrangiana e le equazioni del moto.

2) Dobbiamo imporre $[Q, P] = 1$, quindi

$$k - h\frac{1}{2}\sqrt{\frac{p}{1-p}}\,\frac{-p-(1-p)}{p} = k + h\frac{1}{2p^2}\sqrt{\frac{p}{1-p}} = 1.$$

L'unico modo per cui questa quantità sia costante (quindi indipendente da p) e uguale a 1 è che $h = 0$ e $k = 1$. Quindi la trasformazione canonica è

$$\begin{cases} Q = \sqrt{\dfrac{1-p}{p}} - q \\ P = -p \end{cases}$$

Per trovarne una funzione generatrice del primo tipo ricaviamo p, P in funzione di q, Q:

$$(Q+q)^2 = \frac{1}{p} - 1, \qquad p = \frac{1}{1+(Q+q)^2}, \qquad P = -\frac{1}{1+(Q+q)^2}.$$

Ora imponiamo $p = \frac{\partial F}{\partial q}$, da cui

$$F(q, Q) = \int \frac{1}{1+(Q+q)^2}\,dq + g(Q) = \arctan(Q+q) + g(Q).$$

Imponendo poi che $P = -\frac{\partial F}{\partial Q}$ si ottiene

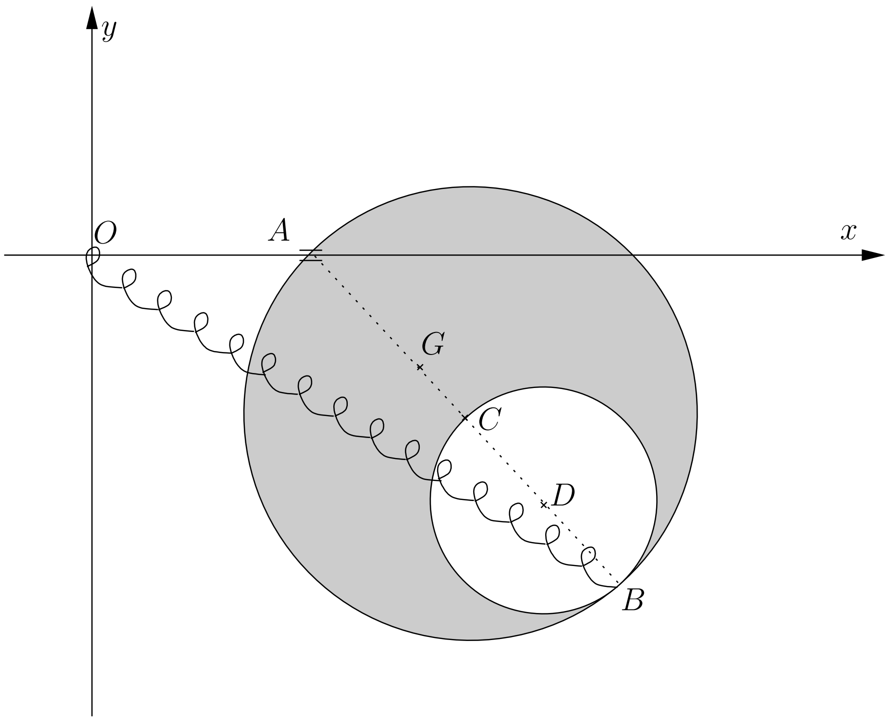
$$-\frac{1}{1+(Q+q)^2} = -\frac{1}{1+(Q+q)^2} + g'(Q)$$

da cui $g(Q) = \text{cost}$. La funzione generatrice è $F(q, Q) = \arctan(Q+q)$.

Prova scritta di Meccanica Analitica
Appello del 13 aprile 2010

1) Una lamina omogenea di massa m ha la forma di un disco di raggio R in cui è stato praticato un foro circolare di raggio $R/2$ tangente internamente al disco. Denotiamo con AB il diametro del disco grande passante per i due centri, come indicato in figura. La lamina si muove in un piano verticale in modo che il punto A scorre sull'asse x di un sistema di riferimento cartesiano ortogonale.
Tutto il sistema è soggetto alla forza di gravità; inoltre, sul punto B agisce una forza elastica di polo l'origine e coefficiente $k > 0$. Si chiede di:

1. trovare le posizioni di equilibrio della lamina;
2. discutere la stabilità delle posizioni di equilibrio in funzione del parametro $\lambda = \frac{mg}{kR}$;
3. determinare la lagrangiana del sistema;
4. scrivere la lagrangiana approssimata attorno a una posizione di equilibrio stabile (si fissi un valore di λ opportuno).



2) Si dica per quali valori del parametro $h \in \mathbb{R}$ l'energia cinetica

$$K(\dot{q}_1, \dot{q}_2) = h\dot{q}_1^2 + 4\dot{q}_1\dot{q}_2 + h\dot{q}_2^2$$

è definita positiva.
Nel caso $h = 3$ si trovi poi l'hamiltoniana associata alla lagrangiana

$$\mathcal{L}(q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2) = K(\dot{q}_1, \dot{q}_2) + \frac{1}{3}q_1^3.$$

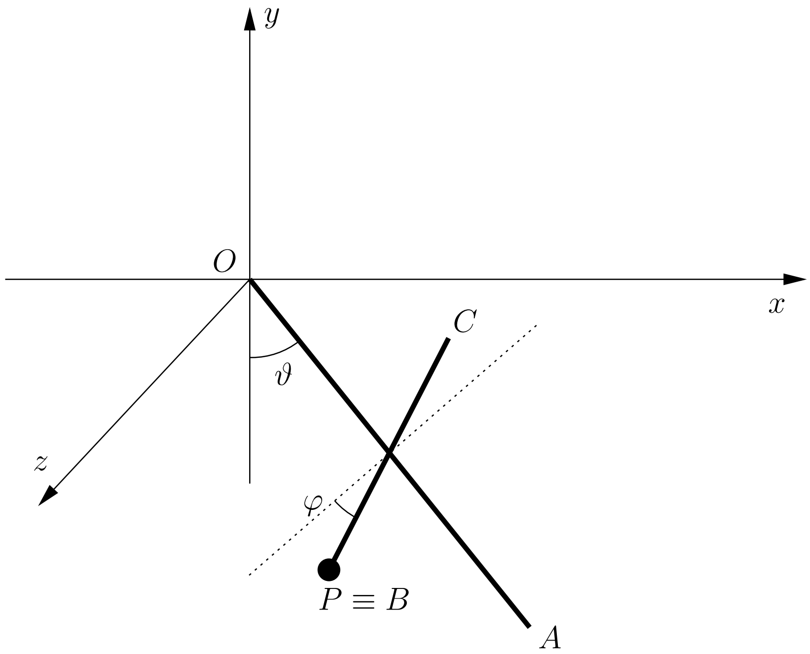
Prova scritta di Meccanica Analitica
Appello del 25 giugno 2010

1) Un corpo rigido è formato da due aste OA e BC, entrambe di massa m e lunghezza 2ℓ, saldate perpendicolarmente nel loro baricentro. Inoltre un punto materiale P di massa m è fissato nell'estremo B della seconda asta.
Fissiamo un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $Oxyz$ in modo che la forza peso sia diretta in senso opposto **all'asse** y. Il corpo rigido si può muovere in modo che l'estremo O sia fisso nell'origine e l'asta OA ruoti attorno ad O mantenendosi nel piano verticale fisso Oxy.
Il sistema è soggetto alla forza peso e tutti i vincoli sono lisci. Si chiede di:

1. trovare le posizioni di equilibrio ordinarie del sistema;

2. studiare la stabilità delle posizioni di equilibrio;

3. determinare la Lagrangiana del moto del sistema.



2) Sia dato un sistema hamiltoniano a vincoli mobili tale che la sua hamiltoniana verifichi la relazione

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = -\mathcal{H}.$$

Dimostrare che la funzione $\mathcal{H}^2$ è positiva e non crescente lungo i moti del sistema.

Prova scritta di Meccanica Analitica
Appello del 20 luglio 2010

1) Un'asta omogenea AB di lunghezza 2ℓ e massa m ha l'estremo B vincolato a passare per un punto della retta $x = \ell$ in un riferimento contenuto in un piano verticale ed è inoltre vincolata a passare per l'origine. I vincoli sono lisci. Sull'asta agisce un momento di forze $\boldsymbol{M} = b \cos\vartheta\, \boldsymbol{e}_z$, dove ϑ è l'angolo delle coordinate polari nel piano e $b > 0$ una costante. Inoltre l'asta è soggetta alla forza peso. Si chiede di:

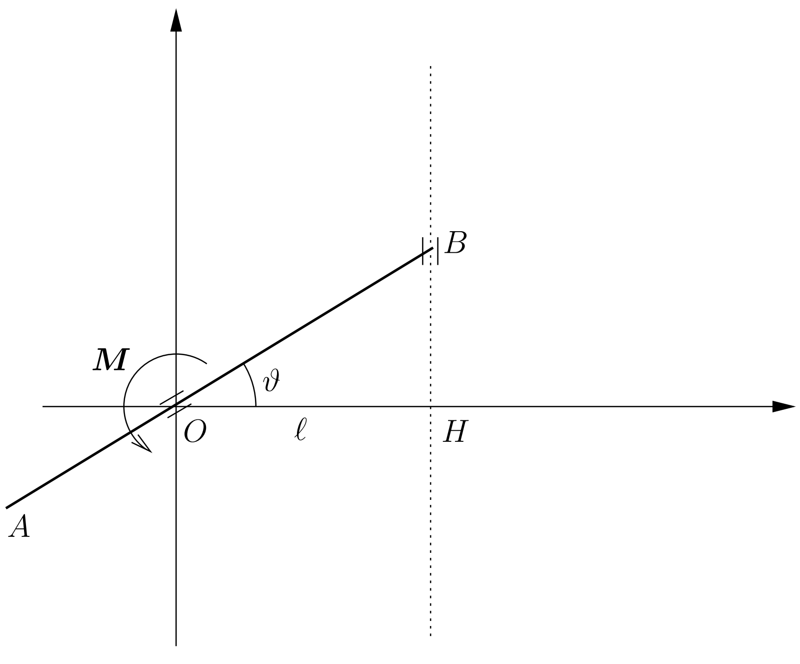
(a) determinare le posizioni di equilibrio *ordinarie* dell'asta e la loro stabilità;

(b) determinare l'equazione del moto dell'asta;

(c) studiare l'equilibrio delle posizioni di confine;

(d) scrivere l'equazione cartesiana della curva che contiene la traiettoria descritta dal baricentro dell'asta durante il suo movimento.

[Ricordiamo che il potenziale di un momento $\boldsymbol{M} = f(\vartheta)\, \boldsymbol{e}_z$ è una primitiva di $f(\vartheta)$.]



2) Trovare per quali valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ la trasformazione

$$\begin{cases} Q = \alpha \log\left(\dfrac{p}{2q}\right) \\ P = -\dfrac{qp}{2} \end{cases}$$

è canonica.

Per tali valori si trovi poi una funzione generatrice della forma $F(q, Q)$.

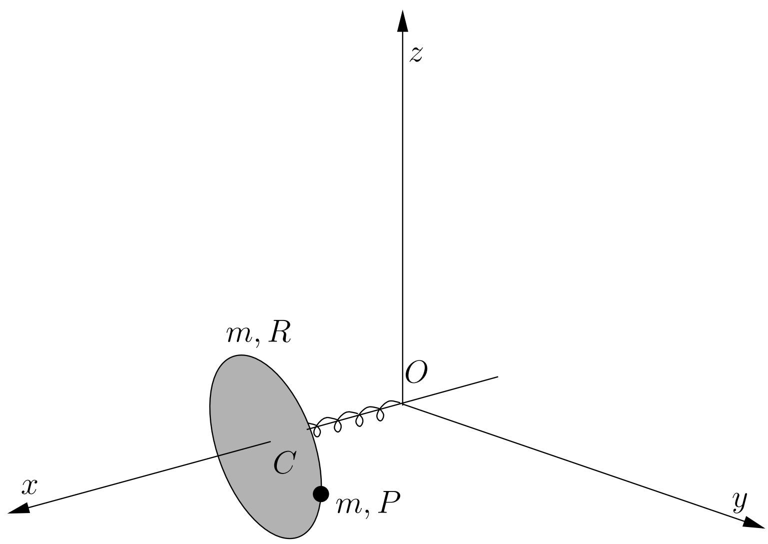
Data infine l'hamiltoniana $\mathcal{H}(q, p) = qp$, scrivere le equazioni di Hamilton nelle nuove variabili Q, P.

Prova scritta di Meccanica Analitica
Appello del 14 settembre 2010

1) Un corpo rigido è formato da un disco omogeneo di massa m e raggio R sul cui bordo è saldato un punto materiale P, anch'esso di massa m. Il centro C del disco è vincolato a scorrere con vincolo liscio sull'asse x di un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $Oxyz$, in modo tale che il corpo rigido resti sempre in un piano parallelo al piano yz. Sul punto C agisce una forza elastica di coefficiente $k > 0$ e polo l'origine O; inoltre il corpo è soggetto alla forza peso.

Si chiede di:

1. trovare le posizioni di equilibrio del corpo rigido e discuterne la stabilità;
2. determinare la lagrangiana del moto;
3. trovare le equazioni del moto linearizzate attorno alla posizione di equilibrio stabile.



2) Si trovino le equazioni di Hamilton associate a

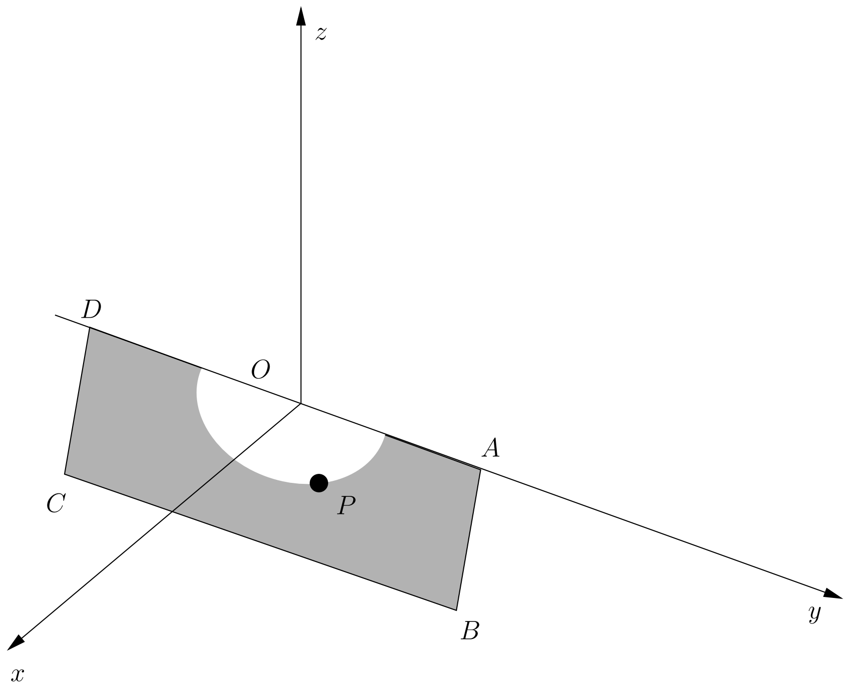
$$\mathcal{H}(q,p) = kq^2 + pq + 2kp^2 \,.$$

Avendo verificato che il sistema ottenuto è lineare, se ne classifichino le orbite al variare di $k \in \mathbb{R}$.

Prova scritta di Meccanica Analitica
Appello del 28 settembre 2010

1) Un corpo rigido piano è ricavato da una lamina rettangolare di lati $AB = 2a$ e $AD = 4a$ ($a > 0$) in cui è praticato un foro semicircolare di raggio a e centro il punto medio del lato AD. La massa della lamina è m. Tale corpo rigido è incernierato all'asse y di un sistema di riferimento cartesiano $Oxyz$ in modo che il lato AD sia fermo e il corpo sia libero di ruotare senza attrito attorno a tale lato. Poniamo per semplicità il punto medio di AD nell'origine. Inoltre sul profilo semicircolare scorre in modo liscio un punto materiale P di massa m. Tutto il sistema è soggetto alla forza peso. Si chiede di:

1. trovare il momento d'inerzia della lamina rispetto al lato AD;
2. trovare le posizioni di equilibrio ordinarie del sistema e discuterne la stabilità;
3. analizzare le posizioni di equilibrio di confine;
4. denotando con I il momento d'inerzia al punto 1, determinare la lagrangiana del moto.



2) Si trovino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui la trasformazione

$$\begin{cases} Q = \dfrac{p}{2q} \\ P = -(k \log p + \log(2q) + q^2) \end{cases}$$

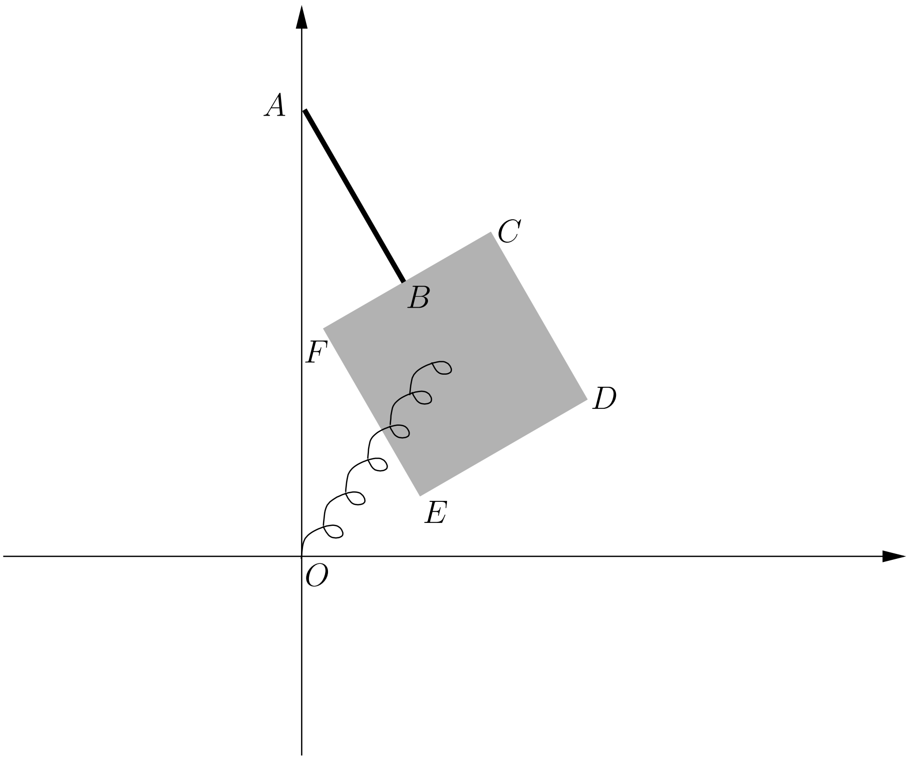
è canonica. Si trovi poi una funzione generatrice del tipo $F(q, P)$.

Prova scritta di Meccanica Analitica
Appello del 14 dicembre 2010

1) Un corpo rigido piano è formato da un'asta omogenea AB, di massa m e lunghezza 2ℓ, con l'estremo B saldato ortogonalmente al centro di un lato di una lamina quadrata $CDEF$, anch'essa omogenea di massa m e lato 2ℓ.
Il corpo si muove in un piano verticale in modo che l'estremo A scorra sull'asse y di un sistema di riferimento Oxy e il corpo sia libero di ruotare attorno ad A.
Sul centro della lamina quadrata agisce una forza elastica di coefficiente $k > 0$ e polo l'origine O; inoltre il corpo è soggetto alla forza peso.

Si chiede di:

1. trovare le posizioni di equilibrio del corpo rigido, e in particolare discuterne l'esistenza al variare del parametro $\lambda = \frac{mg}{k\ell}$;
2. studiare la stabilità delle posizioni di equilibrio al variare di λ;
3. determinare la lagrangiana del moto;
4. fissato $\lambda = 9$, trovare le equazioni del moto linearizzate attorno a una posizione di equilibrio stabile.



2) Data la lagrangiana

$$\mathcal{L}(q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2) = \frac{\dot{q}_1^2}{4} + \frac{\dot{q}_2^2}{8} + \frac{9}{4}q_1^2 + \frac{1}{8}q_2^2 + \frac{3}{2}q_1\dot{q}_1 + \frac{1}{4}q_2\dot{q}_2$$

se ne trovi l'hamiltoniana associata e si risolvano le equazioni di Hamilton.