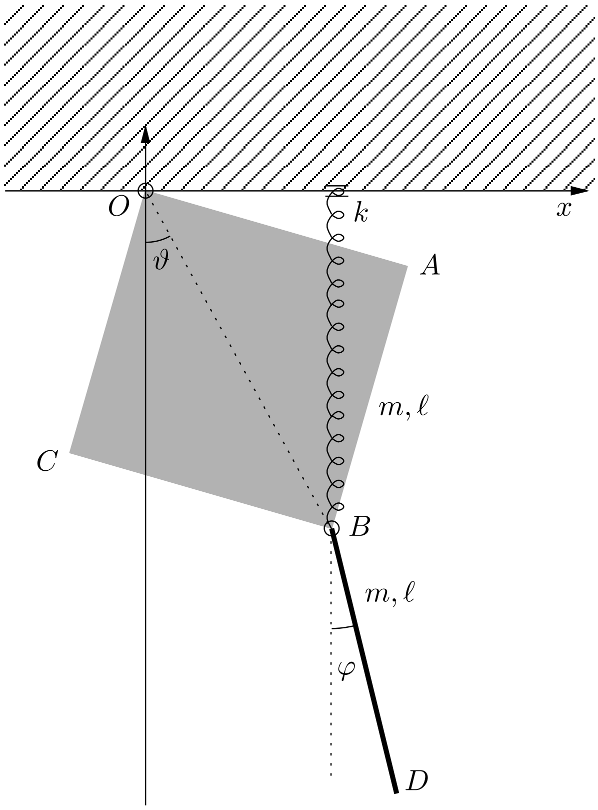
Prova scritta di Meccanica Analitica
Appello del 23 gennaio 2015

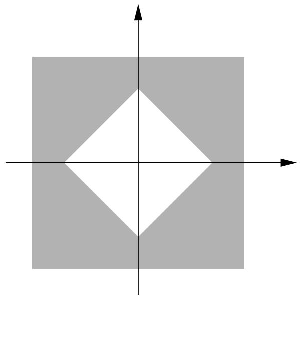
1) Una lamina quadrata omogenea di massa m e lato ℓ è libera di ruotare attorno al suo vertice fisso O, in modo da non occupare mai il semipiano $y > 0$ di un riferimento cartesiano ortogonale Oxy. Al vertice B della lamina opposto ad O è agganciato l'estremo di un'asta omogenea BD di massa m e lunghezza ℓ, che può ruotare liberamente attorno a B.

Su tutto il sistema agisce la forza peso e sul vertice B agisce una forza elastica sempre verticale di coefficiente $k > 0$ e polo sull'asse x. Supposti i vincoli lisci, si chiede di:

1. trovare le posizioni di equilibrio ordinarie del sistema;
2. discuterne la stabilità;
3. trovare le eventuali posizioni di confine;
4. determinare l'energia cinetica del sistema.



2) In una lamina quadrata omogenea di lato ℓ è praticato un foro quadrato concentrico, di lato $\ell/2$, ruotato di $45°$ rispetto alla lamina. Sapendo che la massa della parte rimanente vale m, se ne calcoli la matrice d'inerzia rispetto al sistema di riferimento indicato.



Soluzione della prova scritta di Meccanica Analitica del 23 gennaio 2015 a cura di Sara Mastaglio

A) Come già indicato in figura i gradi di libertà sono due e i parametri lagrangiani sono tali che $\vartheta \in \left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$ e $\varphi \in [0; 2\pi)$.
Calcoliamo le coordinate del baricentro G della lamina quadrata, G_1 dell'asta e $(B - K)$ (dove K è l'estremo della molla sull'asse x):

$$(G - O) = \frac{\sqrt{2}}{2}\ell \sin\vartheta \boldsymbol{e}_1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\ell \cos\vartheta \boldsymbol{e}_2$$

$$(G_1 - O) = \left(\frac{\ell}{2}\sin\varphi + \sqrt{2}\ell \sin\vartheta\right)\boldsymbol{e}_1 - \left(\frac{\ell}{2}\cos\varphi + \sqrt{2}\ell\cos\vartheta\right)\boldsymbol{e}_2$$

$$(B - K) = -\sqrt{2}\ell\cos\vartheta \boldsymbol{e}_2$$

1) Il potenziale è dato da:

$$U = -mgy_G - mgy_{G_1} - \frac{k}{2}|B - K|^2 =$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2}mg\ell\cos\vartheta + mg\frac{\ell}{2}\cos\varphi + \sqrt{2}mg\ell\cos\vartheta - k\ell^2\cos^2\vartheta.$$

Ora calcoliamo le posizioni di equilibrio:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial\vartheta} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}mg\ell\sin\vartheta - \sqrt{2}mg\ell\sin\vartheta + 2k\ell^2\cos\vartheta\sin\vartheta = 0 \\ \dfrac{\partial U}{\partial\varphi} = -mg\dfrac{\ell}{2}\sin\varphi = 0 \end{cases}$$

Dalla seconda segue subito $\sin\varphi = 0$ da cui $\varphi = 0$ oppure $\varphi = \pi$.
Dalla prima invece

$$\sin\vartheta\left(-\frac{3}{2}\sqrt{2}mg\ell + 2k\ell^2\cos\vartheta\right) = 0$$

da cui $\sin\vartheta = 0$ quindi $\vartheta = 0$ oppure $\vartheta = \pi$ che però non è accettabile dato che $\vartheta \in \left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$; abbiamo poi

$$\cos\vartheta = \frac{3\sqrt{2}mg}{4k\ell}$$

quindi $\vartheta = \pm\arccos\left(\frac{3\sqrt{2}mg}{4k\ell}\right)$ accettabile se

$$\frac{\sqrt{2}}{2} < \frac{3\sqrt{2}mg}{4k\ell} \leq 1,$$

cioè $3\frac{\sqrt{2}}{2}mg \leq 2k\ell < 3mg$.
Riassumendo:

- $P_1\left(0,0\right)$,

- $P_2\left(0,\pi\right)$,

- $P_{3/4}\left(\pm\arccos\left(\frac{3\sqrt{2}mg}{4k\ell}\right),0\right)$,

- $P_{5/6}\left(\pm\arccos\left(\frac{3\sqrt{2}mg}{4k\ell}\right),\pi\right)$,

con $3\frac{\sqrt{2}}{2}mg \leq 2k\ell < 3mg$.
2) Valutiamo la stabilità delle posizioni di equilibrio appena trovate.

$$\frac{\partial^2 U}{\partial\vartheta^2} = -\frac{3}{2}\sqrt{2}mg\ell\cos\vartheta - 2k\ell^2\sin^2\vartheta + 2k\ell^2\cos^2\vartheta,$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial\vartheta\partial\varphi} = 0, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial\varphi^2} = -mg\frac{\ell}{2}\cos\varphi$$

Valutiamo l'hessiano nei punti di equilibrio.

$$H\left(P_1\right) = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2}\sqrt{2}mg\ell + 2k\ell^2 & 0 \\ 0 & -mg\frac{\ell}{2} \end{bmatrix}$$

quindi P_1 è di equilibrio stabile solo se i due autovalori sono entrambi negativi, cioè se $-\frac{3}{2}\sqrt{2}mg\ell + 2k\ell^2 < 0$, da cui $3\sqrt{2}mg > 4k\ell$.

$$H\left(P_2\right) = \begin{bmatrix} \frac{3}{2}\sqrt{2}mg\ell + 2k\ell^2 & 0 \\ 0 & mg\frac{\ell}{2} \end{bmatrix}$$

$H\left(P_2\right)$ ha due autovalori positivi, quindi P_2 è una posizione di equilibrio instabile.
Passiamo a $P_{3/4}$.

$$H\left(P_{3/4}\right) = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2}\sqrt{2}mg\ell\left(\frac{3\sqrt{2}mg}{4k\ell}\right) - 2k\ell^2 + 4k\ell^2\left(\frac{3\sqrt{2}mg}{4k\ell}\right)^2 & 0 \\ 0 & -mg\frac{\ell}{2} \end{bmatrix}$$

$P_{3/4}$ sono stabili se

$$-\frac{3}{2}\sqrt{2}mg\ell\left(\frac{3\sqrt{2}mg}{4k\ell}\right) - 2k\ell^2 + 4k\ell^2\left(\frac{3\sqrt{2}mg}{4k\ell}\right)^2 < 0$$

che, facendo qualche conto, equivale a

$$9m^2g^2 < 8k^2\ell^2$$

ed estraendo la radice

$$3mg < 2\sqrt{2}k\ell$$

che è verificata dato che deve valere la condizione $3\frac{\sqrt{2}}{2}mg \leq 2k\ell < 3mg$.
Passiamo a $P_{5/6}$

$$H\left(P_{5/6}\right) = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2}\sqrt{2}mg\ell\left(\frac{3\sqrt{2}mg}{4k\ell}\right) - 2k\ell^2 + 4k\ell^2\left(\frac{3\sqrt{2}mg}{4k\ell}\right)^2 & 0 \\ 0 & mg\frac{\ell}{2} \end{bmatrix}$$

di cui un autovalore è positivo quindi le posizioni di equilibrio $P_{5/6}$ sono instabili.
3) Cerchiamo le posizioni di equilibrio per $\vartheta = -\frac{\pi}{4}$ e $\vartheta = \frac{\pi}{4}$ e φ arbitrario.
Cominciamo da $\left(-\frac{\pi}{4}, \varphi\right)$. Innanzitutto $w_\vartheta \geq 0$ e $w_\varphi \in \mathbb{R}$, quindi si dovrà avere

$$
\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial \vartheta} \leq 0 \\ \dfrac{\partial U}{\partial \varphi} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{3}{2}\sqrt{2}\dfrac{\sqrt{2}}{2}mg\ell - 2k\ell^2\dfrac{\sqrt{2}}{2}\dfrac{\sqrt{2}}{2} \leq 0 \\ -mg\dfrac{\ell}{2}\sin\varphi = 0 \end{cases}
$$

dalla prima risulta $3mg \leq 2k\ell$, dalla seconda troviamo $\varphi = 0$ oppure $\varphi = \pi$. Quindi se vale la condizione $3mg \leq 2k\ell$, allora $\left(-\frac{\pi}{4}, 0\right)$ e $\left(-\frac{\pi}{4}, \pi\right)$ sono posizioni di equilibrio di confine.

Vediamo ora $\left(\frac{\pi}{4}, \varphi\right)$. Questa volta $w_\vartheta \leq 0$ e $w_\varphi \in \mathbb{R}$, quindi

$$
\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial \vartheta} \geq 0 \\ \dfrac{\partial U}{\partial \varphi} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\dfrac{3}{2}\sqrt{2}\dfrac{\sqrt{2}}{2}mg\ell + 2k\ell^2\dfrac{\sqrt{2}}{2}\dfrac{\sqrt{2}}{2} \geq 0 \\ -mg\dfrac{\ell}{2}\sin\varphi = 0 \end{cases}
$$

dalla prima risulta ancora $3mg \leq 2k\ell$, dalla seconda troviamo $\varphi = 0$ oppure $\varphi = \pi$. Quindi se vale la condizione $3mg \leq 2k\ell$, allora $\left(\frac{\pi}{4}, 0\right)$ e $\left(\frac{\pi}{4}, \pi\right)$ sono posizioni di equilibrio di confine.

4) L'energia cinetica è data da

$$
K = \frac{1}{2}J_O^{33}\dot{\vartheta}^2 + \frac{1}{2}mv_{G_1}^2 + \frac{1}{2}J_{G_1}^{33}\dot{\varphi}^2
$$

dato che O è un punto fisso e che la velocità angolare della lamina quadrata è $\boldsymbol{\omega}_Q = \dot{\vartheta}\boldsymbol{e}_3$ e quella dell'asta è $\boldsymbol{\omega}_A = \dot{\varphi}\boldsymbol{e}_3$.

Calcoliamo la velocità di G_1

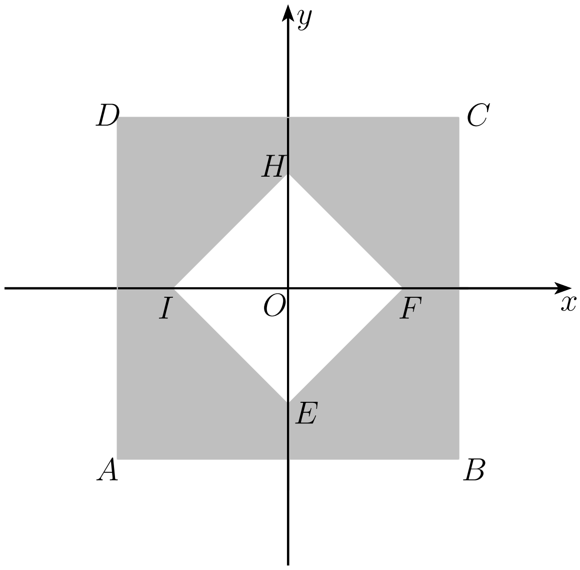
$$
\boldsymbol{v}_{G_1} = \left(\frac{\ell}{2}\dot{\varphi}\cos\varphi + \sqrt{2}\ell\dot{\vartheta}\cos\vartheta\right)\boldsymbol{e}_1 + \left(\frac{\ell}{2}\dot{\varphi}\sin\varphi + \sqrt{2}\ell\dot{\vartheta}\sin\vartheta\right)\boldsymbol{e}_2
$$

e quindi $v_{G_1}^2 = \dfrac{\ell^2}{4}\dot{\varphi}^2 + 2\ell^2\dot{\vartheta}^2 + \sqrt{2}\ell^2\dot{\vartheta}\dot{\varphi}\cos\varphi\cos\vartheta + \sqrt{2}\ell^2\dot{\vartheta}\dot{\varphi}\sin\varphi\sin\vartheta$.

Ora, dato che $J_O^{33} = \dfrac{2}{3}m\ell^2$ e $J_{G_1}^{33} = \dfrac{m\ell^2}{12}$, otteniamo

$$
\begin{aligned}
K &= \frac{1}{3}m\ell^2\dot{\vartheta}^2 + \frac{1}{2}m\left(\frac{\ell^2}{4}\dot{\varphi}^2 + 2\ell^2\dot{\vartheta}^2 + \sqrt{2}\ell^2\dot{\vartheta}\dot{\varphi}\cos\varphi\cos\vartheta + \sqrt{2}\ell^2\dot{\vartheta}\dot{\varphi}\sin\varphi\sin\vartheta\right) + \frac{m\ell^2}{24}\dot{\varphi}^2 = \\
&= \frac{1}{3}m\ell^2\dot{\vartheta}^2 + \frac{m\ell^2}{24}\dot{\varphi}^2 + \frac{m\ell^2}{8}\dot{\varphi}^2 + m\ell^2\dot{\vartheta}^2 + \frac{\sqrt{2}}{2}m\ell^2\dot{\vartheta}\dot{\varphi}\left(\cos\varphi\cos\vartheta + \sin\varphi\sin\vartheta\right) = \\
&= \frac{4}{3}m\ell^2\dot{\vartheta}^2 + \frac{m\ell^2}{6}\dot{\varphi}^2 + \frac{\sqrt{2}}{2}m\ell^2\dot{\vartheta}\dot{\varphi}\cos\left(\varphi - \vartheta\right)
\end{aligned}
$$

B)



Il corpo è rigido piano, quindi $J_{11} + J_{22} = J_{33}$, i piani xy, yz e xz sono di simmetria materiale, quindi $J_{12} = J_{13} = J_{23} = 0$ e per simmetria si ha $J_{11} = J_{22}$.
Vediamo la figura scomposta nel quadrato $ABCD$ (figura 1) e nel quadrato $EFHI$ (figura 2).
La densità di massa è

$$\rho = \frac{m}{\ell^2 - \dfrac{\ell^2}{4}} = \frac{4m}{3\ell^2}$$

e le masse sono

$$m_1 = \rho \overline{AB}^2 = \frac{4m\ell^2}{3\ell^2} = \frac{4}{3}m, \qquad m_2 = \rho \overline{EF}^2 = \frac{4m}{3\ell^2}\frac{\ell^2}{4} = \frac{1}{3}m$$

(per l'additività delle masse $m = m_1 - m_2$).
I momenti d'inerzia della lamina $ABCD$ di massa m_1 e lato ℓ sono:

$$J_{11}^1 = J_{22}^1 = \frac{m_1\ell^2}{12} = \frac{4m}{3}\frac{\ell^2}{12} = \frac{m\ell^2}{9}.$$

I momenti d'inerzia della lamina $EFHI$ di massa m_2 e lato $\ell/2$, dato che il quadrato ha una struttura giroscopica, sono:

$$J_{11}^2 = J_{22}^2 = \frac{m_2\ell^2}{12 \cdot 4} = \frac{m}{3}\frac{\ell^2}{48} = \frac{m\ell^2}{144}.$$

Quindi

$$J_{11} = J_{22} = J_{11}^1 - J_{11}^2 = \frac{m\ell^2}{9} - \frac{m\ell^2}{144} = \frac{5}{48} m\ell^2, \quad J_{33} = 2J_{11} = \frac{5}{24} m\ell^2.$$

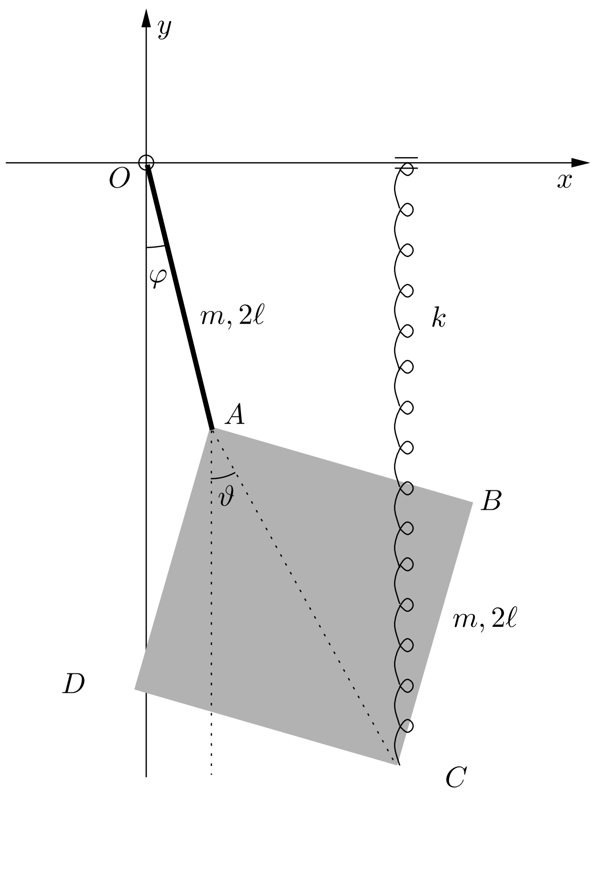
La matrice d'inerzia risulta

$$\mathsf{J}_O = \frac{5}{48} m\ell^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

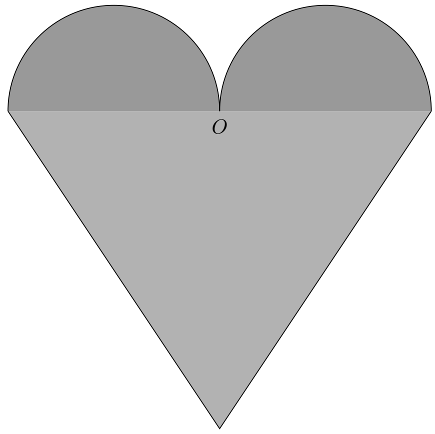
Prova scritta di Meccanica Analitica
Appello del 13 febbraio 2015

1) Un'asta omogenea OA di massa m e lunghezza 2ℓ è libera di ruotare attorno al suo estremo fisso O, centrato in un riferimento cartesiano ortogonale Oxy. All'estremo A dell'asta è agganciato il vertice di una lamina quadrata omogenea di massa m e lato 2ℓ, che può ruotare liberamente attorno a A. Su tutto il sistema agisce la forza peso e sul vertice C della lamina agisce una forza elastica sempre verticale di coefficiente $k > 0$ e polo sull'asse x. Supposti i vincoli lisci, si chiede di:

1. trovare le posizioni di equilibrio ordinarie del sistema;
2. discuterne la stabilità;
3. determinare l'energia cinetica del sistema;
4. nel caso $mg = 10k\ell$, scrivere la lagrangiana approssimata attorno ad una posizione di equilibrio stabile.



2) Una lamina piana è formata da due semicerchi omogenei di raggio R e massa m tangenti in O e da un triangolo isoscele omogeneo di altezza $3R$ e massa $2m$ disposto come in figura. Si calcoli la matrice d'inerzia della lamina rispetto a un opportuno sistema di riferimento centrato in O.

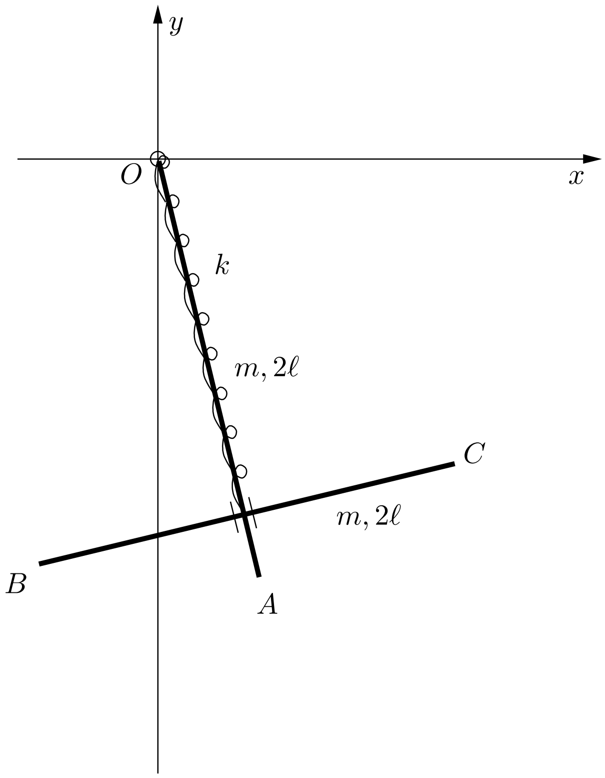


Prova scritta di Meccanica Analitica
Appello del 5 giugno 2015

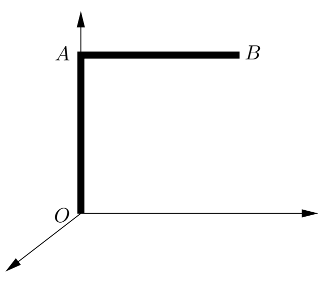
1) In un sistema piano, un'asta omogenea OA di massa m e lunghezza 2ℓ è libera di ruotare attorno al suo estremo fisso O, centrato in un riferimento cartesiano ortogonale Oxy. Sull'asta OA scorre il centro G di una seconda asta BC uguale alla prima e che resta sempre ortogonale a OA, come in figura.

Su tutto il sistema agisce la forza peso e su G agisce una forza elastica di coefficiente $k > 0$ e polo l'origine. Supposti i vincoli lisci, si chiede di:

1. trovare le posizioni di equilibrio ordinarie del sistema e discuterne la stabilità in funzione di $\lambda = mg/k\ell$;
2. trovare le eventuali posizioni di equilibrio di confine;
3. determinare l'energia cinetica del sistema;
4. nel caso $\lambda = 1$, trovare le pulsazioni delle piccole oscillazioni attorno alla posizione di equilibrio stabile.



2) Si calcoli la matrice d'inerzia del corpo rigido formato da due aste omogenee di massa m e lunghezza ℓ saldate ad angolo retto in un loro estremo, rispetto al sistema di riferimento indicato in figura.



Prova scritta di Meccanica Analitica
Appello del 26 giugno 2015

1) Un corpo rigido è formato da due aste omogenee OA e AB, entrambe di massa m e lunghezza 2ℓ, saldate ad angolo retto nell'estremo A. Il corpo si muove in modo che l'asta OA stia nel piano orizzontale xy di un sistema di riferimento $Oxyz$ e il punto O sia fisso nell'origine.

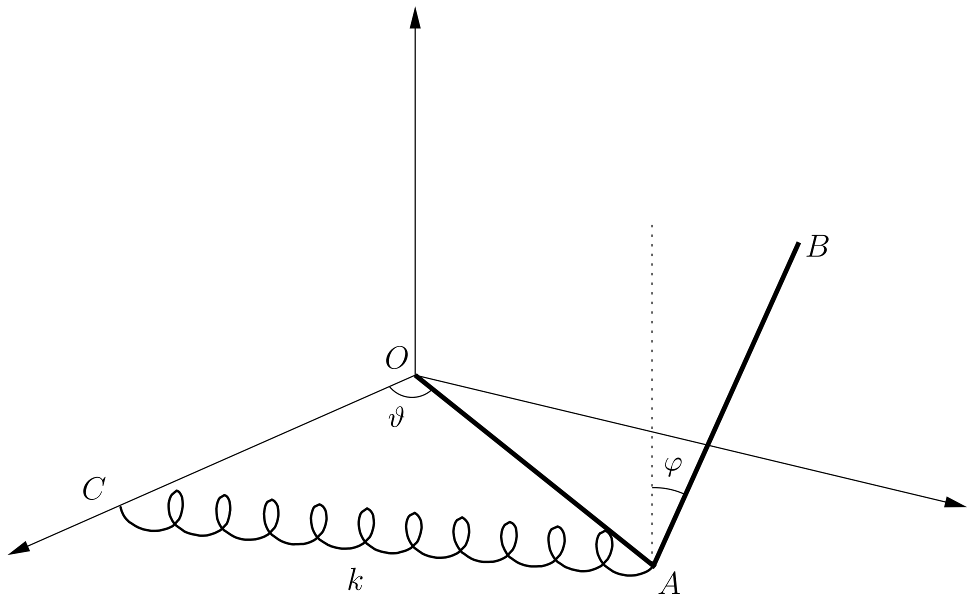
Sull'estremo A dell'asta agisce una forza elastica di coefficiente $k > 0$ e polo il punto C di coordinate $(2\ell, 0, 0)$.

Il sistema è soggetto alla forza peso e tutti i vincoli sono lisci. Si chiede di:

1. trovare le posizioni di equilibrio del sistema e discuterne la stabilità;

2. determinare l'energia cinetica del sistema;

3. trovare le equazioni del moto linearizzate attorno a una posizione di equilibrio stabile.



2) Determinare per quali valori di $a, b \in \mathbb{R}$ la trasformazione

$$\begin{cases} Q(q,p) = ae^q + bp^2e^{-q} \\ P(q,p) = \arctan \dfrac{p}{e^q} \end{cases}$$

è canonica e trovarne una funzione generatrice del tipo $F(q, P)$.

Soluzione della prova scritta di Meccanica Analitica del 26 giugno 2015 a cura di Sara Mastaglio

1) Indicando con G il baricentro dell'asta AB e con G_1 quello dell'asta OA, troviamo

$$(G_1 - O) = \ell \cos\vartheta \boldsymbol{e}_1 + \ell \operatorname{sen}\vartheta \boldsymbol{e}_2$$

$$(G - O) = (2\ell\cos\vartheta - \ell \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\vartheta)\, \boldsymbol{e}_1 + (2\ell \operatorname{sen}\vartheta + \ell \operatorname{sen}\varphi\cos\vartheta)\, \boldsymbol{e}_2 + \ell\cos\varphi\, \boldsymbol{e}_3,$$

inoltre,

$$(A - C) = 2\ell\,(\cos\vartheta - 1)\, \boldsymbol{e}_1 + 2\ell \sin\vartheta \boldsymbol{e}_2.$$

1. Per trovare le posizioni di equilibrio del sistema calcoliamo il potenziale:

$$\begin{aligned}
U =& - mgz_{G_1} - mgz_G - \frac{k}{2}\,|A - C|^2 = \\
=& - mg\cdot 0 - mg\ell\cos\varphi - \frac{k}{2} 4\ell^2 \left(1 + \cos^2\vartheta - 2\cos\vartheta + \operatorname{sen}^2\vartheta\right) = \\
=& - mg\ell\cos\varphi - 4k\ell^2\,(1 - \cos\vartheta) = \\
=& - mg\ell\cos\varphi + 4k\ell^2\cos\vartheta + c.
\end{aligned}$$

Le posizioni di equilibrio sono date da:

$$\begin{cases}
\dfrac{\partial U}{\partial\vartheta} = -4k\ell^2 \operatorname{sen}\vartheta = 0 \\
\dfrac{\partial U}{\partial\varphi} = mg\ell \operatorname{sen}\varphi = 0
\end{cases}$$

Dalla prima segue $\operatorname{sen}\vartheta = 0$, da cui $\vartheta = 0; \pi$; dalla seconda $\operatorname{sen}\varphi = 0$, da cui $\varphi = 0; \pi$. Dato che $\vartheta, \varphi \in [0, 2\pi]$, le posizioni di equilibrio sono, quindi,

$$P_1(0,0), \quad P_2(0,\pi), \quad P_3(\pi,0), \quad P_4(\pi,\pi).$$

Valutiamo la stabilità delle posizioni di equilibrio trovate.

$$\frac{\partial^2 U}{\partial\vartheta^2} = -4k\ell^2\cos\vartheta, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial\vartheta\partial\varphi} = 0, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial\varphi^2} = mgl\cos\varphi;$$

ora calcoliamo l'hessiano nelle posizioni di equilibrio.

$$\mathcal{H}\,(P_1) = \begin{bmatrix} -4k\ell^2 & 0 \\ 0 & mg\ell \end{bmatrix}$$

quindi P_1 è una posizione di equilibrio instabile.

$$\mathcal{H}(P_2) = \begin{bmatrix} -4k\ell^2 & 0 \\ 0 & -mg\ell \end{bmatrix}$$

quindi P_2 è una posizione di equilibrio stabile.

$$\mathcal{H}(P_3) = \begin{bmatrix} 4k\ell^2 & 0 \\ 0 & mg\ell \end{bmatrix}$$

quindi P_3 è una posizione di equilibrio instabile.

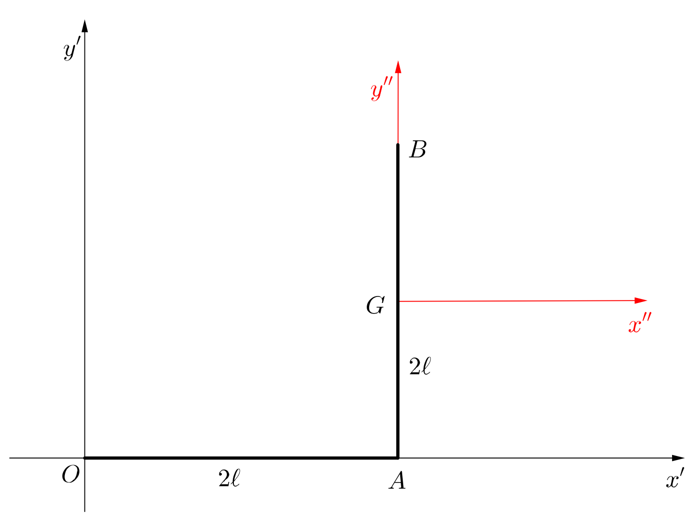
$$\mathcal{H}(P_4) = \begin{bmatrix} 4k\ell^2 & 0 \\ 0 & -mg\ell \end{bmatrix}$$

quindi P_4 è una posizione di equilibrio instabile.

2. L'energia cinetica del corpo rigido, dato che O è un punto fisso, è data da

$$K = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega} \cdot \mathsf{J}_O \boldsymbol{\omega}.$$

Dobbiamo quindi calcolare la matrice d'inerzia J_O del corpo rigido e la sua velocità angolare. Cominciamo con la matrice d'inerzia. Come prima cosa scegliamo un opportuno sistema di riferimento, come quello in figura,



e calcoliamo la matrice d'inerzia rispetto all'origine O. La matrice J_O sarà data dalla somma delle matrici d'inerzia delle due aste rispetto al sistema di riferimento indicato in figura. La matrice d'inerzia della lamina OA è

$$\mathsf{J}_O^1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4}{3}m\ell^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3}m\ell^2 \end{bmatrix}$$

mentre quella dell'asta AB si ottiene utilizzando la formula di Huygens-Steiner, spostandosi al sistema di riferimento $Ox'y'z'$ da quello baricentrale $Gx''y''z''$, per cui la matrice d'inerzia, tenuto conto che il lato misura 2ℓ, è $\operatorname{diag}[m\ell^2/3, 0, m\ell^2/3]$:

$$\mathsf{J}_O^2 = \begin{bmatrix} m\frac{\ell^2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m\frac{\ell^2}{3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} m\ell^2 & -2m\ell^2 & 0 \\ -2m\ell^2 & 4m\ell^2 & 0 \\ 0 & 0 & 5m\ell^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{3}m\ell^2 & -2m\ell^2 & 0 \\ -2m\ell^2 & 4m\ell^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{16}{3}m\ell^2 \end{bmatrix}.$$

Quindi, essendo $\mathsf{J}_O = \mathsf{J}_O^1 + \mathsf{J}_O^2$, otteniamo

$$\mathsf{J}_O = \begin{bmatrix} \frac{4}{3}m\ell^2 & -2m\ell^2 & 0 \\ -2m\ell^2 & \frac{16}{3}m\ell^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{20}{3}m\ell^2 \end{bmatrix}.$$

Ci resta da calcolare la velocità angolare. Considerando il sistema di riferimento $Ox'y'z'$ solidale alla lamina (come nella figura precedente), di versori $\{\boldsymbol{e}'_x, \boldsymbol{e}'_y, \boldsymbol{e}'_z\}$, la velocità angolare è data da

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\vartheta}\boldsymbol{e}_z - \dot{\varphi}\boldsymbol{e}'_x;$$

il versore $\boldsymbol{e}_z$, espresso a partire dalla terna $\{\boldsymbol{e}'_x, \boldsymbol{e}'_y, \boldsymbol{e}'_z\}$, è

$$\boldsymbol{e}_z = \cos\varphi\boldsymbol{e}'_y + \operatorname{sen}\varphi\boldsymbol{e}'_z,$$

quindi la velocità angolare risulta

$$\boldsymbol{\omega} = -\dot{\varphi}\boldsymbol{e}'_x + \dot{\vartheta}\cos\varphi\boldsymbol{e}'_y + \dot{\vartheta}\operatorname{sen}\varphi\boldsymbol{e}'_z.$$

Dopo qualche conto si può verificare che l'energia cinetica risulta

$$K = \frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}m\ell^2\dot{\varphi}^2 + \frac{4}{3}m\ell^2\left(4 + \operatorname{sen}^2\varphi\right)\dot{\vartheta}^2 + 4m\ell^2\cos\varphi\,\dot{\vartheta}\dot{\varphi}\right).$$

Osservazione. Per calcolare l'energia cinetica avremmo anche potuto considerare separatamente le energie cinetiche delle due aste e poi sommarle. L'energia cinetica dell'asta OA, dato che O è un punto fisso, è

$$K_{OA} = \frac{1}{2} J_O^{zz} \dot{\vartheta}^2,$$

mentre quella dell'asta AB è

$$K_{AB} = \frac{1}{2} m v_G^2 + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}_{AB} \cdot \mathsf{J}_G \boldsymbol{\omega}_{AB},$$

dove la velocità angolare $\boldsymbol{\omega}_{AB}$ va espressa con i versori di un opportuno sistema di riferimento baricentrale solidale all'asta e J_G è la matrice d'inerzia dell'asta rispetto a tale sistema di riferimento.
3. Determiniamo le equazioni del moto linearizzate attorno all'unica posizione di equilibrio stabile $P_2(0, \pi)$. Dapprima calcoliamo la lagrangiana linearizzata

$$\widetilde{L} = \frac{1}{2} \dot{\boldsymbol{q}}^{\mathsf{T}} \mathsf{J}\left(\overline{\boldsymbol{q}}\right) \dot{\boldsymbol{q}} + \frac{1}{2} (\boldsymbol{q} - \overline{\boldsymbol{q}})^{\mathsf{T}} \mathcal{H}\left(\overline{\boldsymbol{q}}\right) \left(\boldsymbol{q} - \overline{\boldsymbol{q}}\right)$$

con $\boldsymbol{q} = [\vartheta, \varphi]^{\mathsf{T}}$, $\dot{\boldsymbol{q}} = [\dot{\vartheta}, \dot{\varphi}]^{\mathsf{T}}$ e $\overline{\boldsymbol{q}} = [0, \pi]^{\mathsf{T}}$,

$$\mathsf{J}\left(\boldsymbol{q}\right) = \begin{bmatrix} \frac{4}{3} m\ell^2 \left(4 + \operatorname{sen}^2 \varphi\right) & 2m\ell^2 \cos\varphi \\ 2m\ell^2 \cos\varphi & \frac{4}{3} m\ell^2 \end{bmatrix}$$

e quindi

$$\mathsf{J}\left(\overline{\boldsymbol{q}}\right) = \begin{bmatrix} \frac{16}{3} m\ell^2 & -2m\ell^2 \\ -2m\ell^2 & \frac{4}{3} m\ell^2 \end{bmatrix}.$$

avendo già calcolato $\mathcal{H}\left(\overline{\boldsymbol{q}}\right)$ in precedenza, la lagrangiana linearizzata risulta

$$\widetilde{L} = \frac{8}{3} m\ell^2 \dot{\vartheta}^2 - 2m\ell^2 \dot{\vartheta}\dot{\varphi} + \frac{2}{3} m\ell^2 \dot{\varphi}^2 - 2k\ell^2 \theta^2 - \frac{1}{2} mg\ell\varphi^2 + mg\ell\pi\varphi.$$

Andando a scrivere

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \widetilde{L}}{\partial \dot{\boldsymbol{q}}} = \frac{\partial \widetilde{L}}{\partial \boldsymbol{q}}$$

otteniamo le equazioni del moto linearizzate attorno alla posizione di equilibrio stabile P_2:

$$\begin{cases} \frac{16}{3} m\ell^2 \ddot{\vartheta} - 2m\ell^2 \ddot{\varphi} = -4k\ell^2 \vartheta \\ 2m\ell^2 \ddot{\vartheta} - \frac{4}{3} m\ell^2 \ddot{\varphi} = mg\ell\varphi - mg\ell\pi \end{cases}.$$

2) Per ottenere una trasformazione canonica poniamo le parentesi di Poisson uguali a 1:

$$[Q, P] = \frac{\partial Q}{\partial q}\frac{\partial P}{\partial p} - \frac{\partial Q}{\partial p}\frac{\partial P}{\partial q} = 1$$

con

$$\frac{\partial Q}{\partial q} = ae^q - bp^2 e^{-q}, \quad \frac{\partial Q}{\partial p} = 2bpe^{-q}, \quad \frac{\partial P}{\partial q} = -\frac{pe^q}{e^{2q} + p^2}, \quad \frac{\partial P}{\partial p} = \frac{e^q}{e^{2q} + p^2} \ .$$

Dopo qualche conto risulta

$$\frac{(a-1)\, e^{2q} + (b-1)\, p^2}{e^{2q} + p^2} = 0$$

da cui otteniamo $a = 1$ e $b = 1$.

La trasformazione, quindi, diventa

$$\begin{cases} Q = Q(q, p) = e^q + p^2 e^{-q} \\ P = P(q, p) = \arctan \dfrac{p}{e^q} \end{cases} .$$

Troviamo ora una funzione generatrice $F(q, P)$:

$$p = \frac{\partial F}{\partial q} \qquad \text{e} \qquad Q = \frac{\partial F}{\partial P}$$

quindi $p = e^q \tan P = \dfrac{\partial F}{\partial q}$, da cui si può ricavare $F(q, P) = e^q \tan P + g(P)$. Ora

$$e^q \left(1 + \tan^2 P\right) + g'(P) = \frac{\partial F}{\partial P} = Q = e^q + e^{-q} \left(e^q \tan P\right)^2 = e^q \left(1 + \tan^2 P\right)$$

da cui, confrontando il primo e l'ultimo termine, risulta che $g'(P) = 0$ e quindi $g(P) = \text{costante}$. In definitiva

$$F(q, P) = e^q \tan P + \text{costante},$$

in particolare, scegliendo la costante $= 0$, troviamo

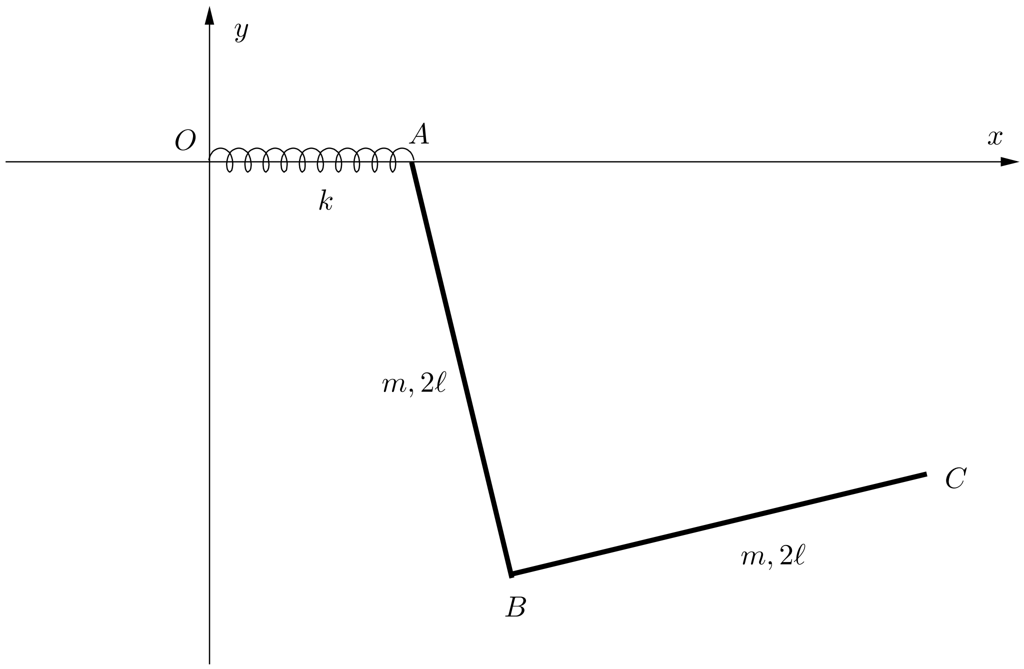
$$F(q, P) = e^q \tan P.$$

Prova scritta di Meccanica Analitica
Appello del 10 luglio 2015

1) Un corpo rigido è formato da due aste omogenee AB e BC, entrambe di massa m e lunghezza 2ℓ, saldate ad angolo retto nell'estremo B. Tale corpo si muove in un piano ruotando attorno al suo estremo A, che può scorrere sull'asse orizzontale di un riferimento cartesiano ortogonale Oxy.

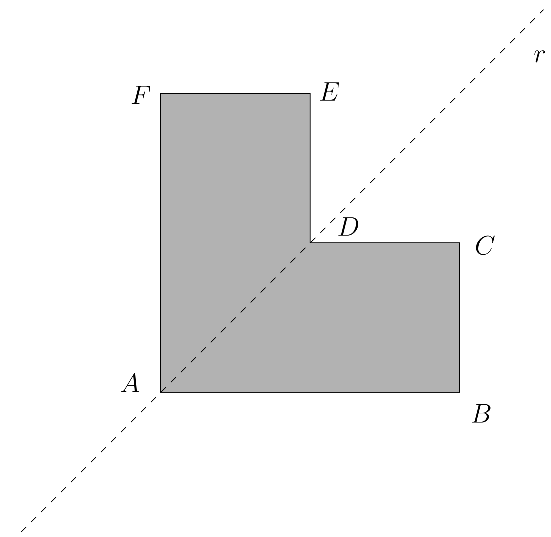
Su tutto il sistema agisce la forza peso e su A agisce una forza elastica di coefficiente $k > 0$ e polo l'origine O. Supposti i vincoli lisci, si chiede di:

1. trovare le posizioni di equilibrio del sistema e discuterne la stabilità;
2. determinare l'energia cinetica del sistema;
3. scrivere le pulsazioni delle piccole oscillazioni attorno a una posizione di equilibrio stabile.



2) Si calcoli la matrice d'inerzia dela lamina piana omogenea di massa m rappresentata in figura rispetto a un opportuno sistema di riferimento centrato in A, sapendo che $AB = AF = 2\ell$ e $BC = CD = DE = EF = \ell$.

Si calcoli poi il momento d'inerzia della lamina rispetto all'asse r tratteggiato in figura.



Soluzione della prova scritta di Meccanica Analitica del 10 luglio 2015 a cura di Sara Mastaglio

1) Innanzitutto indichiamo con G_1 e G_2 i baricentri delle aste AB e BC e scegliamo come parametri lagrangiani

$$\xi := x_A \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad \vartheta := y^- \widehat{A} B \in [\,0, 2\pi\,)\,.$$

Calcoliamo i vettori principali

$$(A - O) = \xi \boldsymbol{e}_1$$

$$(G_1 - O) = (\xi + \ell \operatorname{sen} \vartheta)\, \boldsymbol{e}_1 - \ell \cos \vartheta \boldsymbol{e}_2$$

$$(G_2 - O) = (\xi + 2\ell \operatorname{sen} \vartheta + \ell \cos \vartheta)\, \boldsymbol{e}_1 + (\ell \operatorname{sen} \vartheta - 2\ell \cos \vartheta)\, \boldsymbol{e}_2.$$

1. Per determinare le posizioni di equilibrio calcoliamo innanzitutto il pontenziale:

$$U = -mgy_{G_1} - mgy_{G_2} - \frac{k}{2} |A - C|^2 = 3mg\ell \cos \vartheta - mg\ell \operatorname{sen} \vartheta - \frac{k}{2}\xi^2 + c.$$

Le posizioni di equilibrio sono date da

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial \xi} = -k\xi = 0 \\ \dfrac{\partial U}{\partial \vartheta} = -3mg\ell \operatorname{sen} \vartheta - mg\ell \cos \vartheta = 0 \end{cases},$$

dalla prima troviamo subito $\xi = 0$, mentre dalla seconda troviamo $\operatorname{tg} \vartheta = -\dfrac{1}{3}$ da cui

$$\vartheta = -\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{3}\right) \text{ e } \vartheta = \pi - \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{3}\right);$$

otteniamo quindi le due posizioni di equilibrio

$$P_1\left(0, -\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{3}\right)\right) \text{ e } P_2\left(0, \pi - \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{3}\right)\right).$$

Per il calcolo della stabilità determiniamo l'hessiano:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} = -k, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \vartheta} = 0, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial \vartheta^2} = -3mg\ell \cos \vartheta + mg\ell \operatorname{sen} \vartheta,$$

quindi

$$\mathcal{H}(\xi, \vartheta) = \begin{bmatrix} -k & 0 \\ 0 & -3mg\ell \cos \vartheta + mg\ell \operatorname{sen} \vartheta \end{bmatrix}.$$

Ora valutiamo l'hessiano nelle posizioni di equilibrio:

$$\mathcal{H}(P_1) = \begin{bmatrix} -k & 0 \\ 0 & -\sqrt{10}\, mg\ell \end{bmatrix}$$

quindi, dato che i due autovalori sono entrambi negativi, la posizione P_1 è di equilibrio stabile;

$$\mathcal{H}(P_2) = \begin{bmatrix} -k & 0 \\ 0 & \sqrt{10}\, mg\ell \end{bmatrix}$$

quindi, dato che ho un autovalore positivo e uno negativo, la posizione P_2 è di equilibrio instabile.

2. L'energia cinetica è

$$K = \frac{1}{2} m v_{G_1}^2 + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}_1 \cdot \mathsf{J}_{G_1} \boldsymbol{\omega}_1 + \frac{1}{2} m v_{G_2}^2 + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}_2 \cdot \mathsf{J}_{G_2} \boldsymbol{\omega}_2$$

con $\boldsymbol{\omega}_1 = \boldsymbol{\omega}_2 = \dot{\vartheta} \boldsymbol{e}_3$; per un opportuno sistema di riferimento, tenuto conto che le aste misurano 2ℓ sia ha

$$\mathsf{J}_{G_1} = \mathsf{J}_{G_2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{m\ell^2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{m\ell^2}{3} \end{bmatrix}$$

e

$$\boldsymbol{v}_{G_1} = \left(\dot{\xi} + \ell \dot{\vartheta} \cos \vartheta \right) \boldsymbol{e}_1 + \ell \dot{\vartheta} \operatorname{sen} \vartheta \boldsymbol{e}_2$$

$$\boldsymbol{v}_{G_2} = \left(\dot{\xi} + 2\ell \dot{\vartheta} \cos \vartheta - \ell \dot{\vartheta} \operatorname{sen} \vartheta \right) \boldsymbol{e}_1 + \left(\ell \dot{\vartheta} \cos \vartheta + 2\ell \dot{\vartheta} \operatorname{sen} \vartheta \right) \boldsymbol{e}_2;$$

dopo un po' di conti l'energia cinetica risulta

$$K = \frac{m}{2} \left(2\dot{\xi}^2 + \frac{20}{3} \ell^2 \dot{\vartheta}^2 + 2\ell \dot{\xi} \dot{\vartheta} \left(3 \cos \vartheta - \operatorname{sen} \vartheta \right) \right)$$

3. Per determinare le pulsazioni delle piccole oscillazioni attorno alla posizione di equilibrio stabile P_1 dobbiamo calcolare

$$\det \left(\omega^2 \mathsf{J}(\overline{\boldsymbol{q}}) + \mathcal{H}(\overline{\boldsymbol{q}}) \right) = 0,$$

con $\overline{\boldsymbol{q}} = \left(0, -\operatorname{arctg} \left(\dfrac{1}{3} \right) \right)$. Calcoliamo $\mathsf{J}(\overline{\boldsymbol{q}})$:

$$\mathsf{J}(\boldsymbol{q}) = \begin{bmatrix} 2m & m\ell \left(3 \cos \vartheta - \operatorname{sen} \vartheta \right) \\ m\ell \left(3 \cos \vartheta - \operatorname{sen} \vartheta \right) & \dfrac{20}{3} m\ell^2 \end{bmatrix}$$

quindi calcolata nella posizione di equilibrio stabile diventa

$$\mathsf{J}\left(\overline{\boldsymbol{q}}\right) = \begin{bmatrix} 2m & \sqrt{10}\, m\ell \\ \sqrt{10}\, m\ell & \dfrac{20}{3} m\ell^2 \end{bmatrix};$$

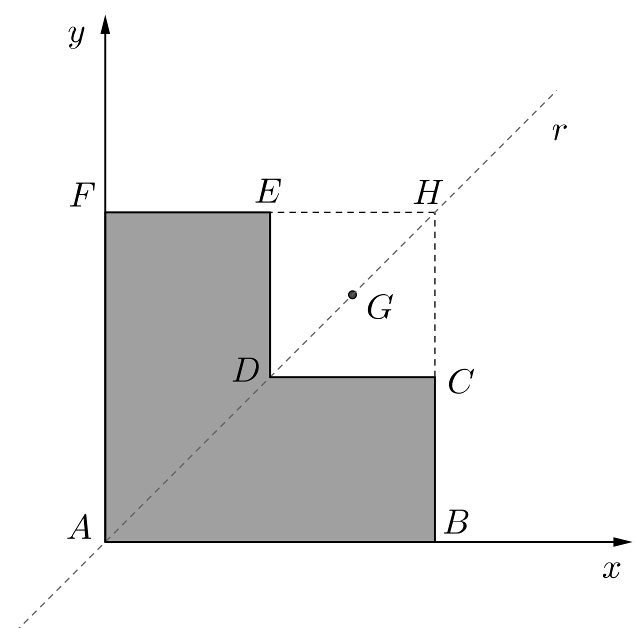
dato che $\mathcal{H}\left(\overline{\boldsymbol{q}}\right)$ è già stata determinata per lo studio della stabilità, possiamo subito calcolare

$$\det \begin{bmatrix} 2m\omega^2 - k & \sqrt{10}\, m\ell\omega^2 \\ \sqrt{10}\, m\ell\omega^2 & \dfrac{20}{3} m\ell^2\omega^2 - \sqrt{10} mg\ell \end{bmatrix} = 0.$$

Quindi le pulsazioni delle piccole oscillazioni attorno alla posizione di equilibrio stabile sono soluzioni dell'equazione

$$\frac{10}{3} m^2\ell^2\omega^4 - \left(2\sqrt{10}\, m^2 g\ell + \frac{20}{3} m\ell^2 k\right)\omega^2 + \sqrt{10}\, mg\ell k = 0.$$

2) Per calcolare la matrice d'inerzia della lamina L consideriamo la differenza tra la matrice d'inerzia



della lamina quadrata piena $ABHF$ (che chiameremo P) e quella della lamina quadrata vuota $DCHE$ (che chiameremo V) entrambe rispetto al sistema di riferimento $Axyz$ indicato in figura.

Cominciamo con il calcolo delle masse delle lamine P e V. La lamina P ha massa $m_P = 4\ell^2\rho$, mentre la lamina V ha massa $m_V = \ell^2\rho$, dove ρ è la densità di massa. Per l'additività delle masse la lamina L, che ha massa m, è data da

$$m = m_P - m_V = \rho\left(4\ell^2 - \ell^2\right)$$

da cui si può ricavare la densità di massa

$$\rho = \frac{m}{3\ell^2};$$

sostituendo ρ nelle espressioni di m_P e m_V otteniamo

$$m_P = \frac{4}{3}m, \quad m_V = \frac{m}{3}.$$

La matrice d'inerzia della lamina P rispetto al punto A, tenuto conto che la lamina quadrata ha lato 2ℓ, è

$$\mathsf{J}_A^P = \begin{bmatrix} \frac{16}{9}m\ell^2 & -\frac{4}{3}m\ell^2 & 0 \\ -\frac{4}{3}m\ell^2 & \frac{16}{9}m\ell^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{32}{9}m\ell^2 \end{bmatrix},$$

La matrice d'inerzia della lamina V rispetto al punto G è

$$\mathsf{J}_G^V = \begin{bmatrix} \frac{m\ell^2}{36} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m\ell^2}{36} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m\ell^2}{18} \end{bmatrix}$$

quindi, rispetto al punto A, utilizzando Huygens-Steiner, è

$$\mathsf{J}_A^V = \begin{bmatrix} \frac{m\ell^2}{36} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m\ell^2}{36} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m\ell^2}{18} \end{bmatrix} + \frac{m}{3}\begin{bmatrix} \frac{9}{4}\ell^2 & -\frac{9}{4}\ell^2 & 0 \\ -\frac{9}{4}\ell^2 & \frac{9}{4}\ell^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{9}{2}\ell^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{7}{9}m\ell^2 & -\frac{3}{4}m\ell^2 & 0 \\ -\frac{3}{4}m\ell^2 & \frac{7}{9}m\ell^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{14}{9}m\ell^2 \end{bmatrix}.$$

La matrice d'inerzia cercata è quindi data dalla differenza $\mathsf{J}_A^P - \mathsf{J}_A^V$:

$$\mathsf{J}_A^L = \begin{bmatrix} m\ell^2 & -\frac{7}{12}m\ell^2 & 0 \\ -\frac{7}{12}m\ell^2 & m\ell^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2m\ell^2 \end{bmatrix}. \tag{0.1}$$

Infine, il momento d'inerzia della lamina rispetto alla retta r è dato da $J_r = \boldsymbol{r} \cdot \mathsf{J}_A^L \boldsymbol{r}$ con $\boldsymbol{r}$ il versore dell'asse r; essendo $B\widehat{A}D = \frac{\pi}{4}$, il versore risulta $\boldsymbol{r} = \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right]^{\mathsf{T}}$ e quindi il momento d'inerzia, dopo alcuni conti è

$$J_r = \frac{5}{12}m\ell^2.$$

Prova scritta di Meccanica Analitica
Appello dell'11 settembre 2015

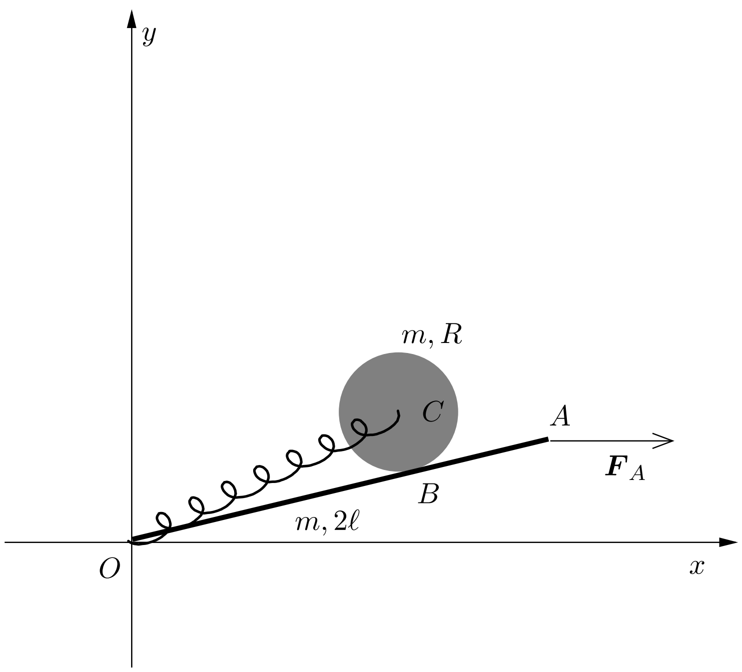
1) Un'asta omogenea OA di massa m e lunghezza 2ℓ è libera di ruotare attorno all'origine di un sistema di riferimento piano Oxy. Un disco omogeneo di massa m e raggio R rotola senza strisciare sull'asta, in modo che il punto di contatto B non esca dall'asta.

Si denoti con ξ la distanza del punto B dall'origine e con θ l'angolo tra la parte positiva dell'asse delle ascisse e l'asta.

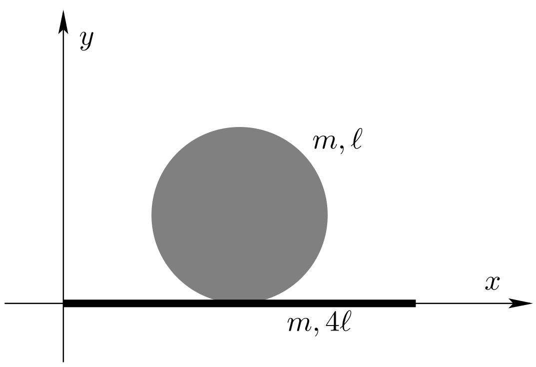
Su tutto il sistema agisce la forza peso e sul centro C del disco agisce una forza elastica di coefficiente $k > 0$ e polo il punto O. Inoltre, sull'estremo A dell'asta agisce una forza $\boldsymbol{F}_A$ di potenziale $U_A = mgR\cos\theta$.

Supposti i vincoli lisci, si chiede di:

1. trovare le posizioni di equilibrio ordinarie del sistema e discuterne la stabilità in funzione di $\lambda = \frac{k\ell}{mg}$;
2. trovare le eventuali posizioni di equilibrio di confine;
3. determinare l'energia cinetica del sistema;
4. nel caso $\lambda = 1$ trovare le pulsazioni delle piccole oscillazioni attorno alla posizione di equilibrio stabile.



2) Si calcoli la matrice d'inerzia del corpo rigido piano in figura, formato da un'asta omogenea di massa m e lunghezza 4ℓ e un disco di massa m e raggio ℓ, in cui un punto del bordo del disco è saldato al baricentro dell'asta, rispetto al sistema di riferimento indicato.



Soluzione della prova scritta di Meccanica Analitica
dell'11 settembre 2015
a cura di Sara Mastaglio

1) Il campo di variabilità dei parametri lagrangiani è dato da $\xi \in [0, 2\ell]$ e $\vartheta \in [\,0, 2\pi\,)$.
I vettori principali, avendo denotato con G il baricentro dell'asta, sono dati da

$$(G - O) = \ell \cos\vartheta \boldsymbol{e}_1 + \ell \operatorname{sen}\vartheta \boldsymbol{e}_2,$$

$$(B - O) = \xi \cos\vartheta \boldsymbol{e}_1 + \xi \operatorname{sen}\vartheta \boldsymbol{e}_2,$$

$$(C - O) = (\xi \cos\vartheta - R \operatorname{sen}\vartheta)\, \boldsymbol{e}_1 + (\xi \operatorname{sen}\vartheta + R\cos\vartheta)\, \boldsymbol{e}_2.$$

1. Per determinare le configurazioni di equilibrio calcoliamo innanzitutto il potenziale:

$$U = -mgy_G - mgy_C - \frac{k}{2}|C - O|^2 + U_A = -mg\ell \operatorname{sen}\vartheta - mg\xi \operatorname{sen}\vartheta - \frac{k}{2}\xi^2 + c.$$

Le posizioni di equilibrio sono quindi date da

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial \xi} = -mg \operatorname{sen}\vartheta - k\xi = 0 \\ \dfrac{\partial U}{\partial \vartheta} = -mg\ell \cos\vartheta - mg\xi \cos\vartheta = 0; \end{cases}$$

dalla prima equazione troviamo $\xi = -\dfrac{mg}{k} \operatorname{sen}\vartheta$, dalla seconda invece, sostituendo la ξ così trovata

$$\cos\vartheta \left(\frac{mg}{k} \operatorname{sen}\vartheta - \ell \right) = 0,$$

da cui troviamo $\vartheta_1 = \dfrac{\pi}{2}$, $\vartheta_2 = \dfrac{3}{2}\pi$ e ϑ_3, ϑ_4 dati da $\operatorname{sen}\vartheta = \dfrac{k\ell}{mg}$; quest'ultima soluzione chiaramente esiste se $\dfrac{k\ell}{mg} < 1$, cioè, posto $\lambda = \dfrac{k\ell}{mg}$, $\lambda < 1$. Le posizioni di equilibrio, dopo aver calcolato le ξ corrispondenti ad ogni angolo trovato, sono:

- $\left(-\dfrac{mg}{k}, \dfrac{\pi}{2} \right)$ che però non è accettabile in quanto la ξ deve essere compresa tra 0 e 2ℓ, quindi in particolare deve essere positiva;

- $\left(\dfrac{mg}{k}, \dfrac{3}{2}\pi \right)$ accettabile se $\xi_2 = \dfrac{mg}{k} \in [0, 2\ell]$: chiaramente $\xi_2 > 0$, se imponiamo poi $\xi_2 < 2\ell$, troviamo la condizione $\lambda > \dfrac{1}{2}$;

- $(-\ell, \operatorname{arcsen}\lambda)$ che non è accettabile in quanto $\xi_3 = -\ell < 0$;
- $(-\ell, \pi - \operatorname{arcsen}\lambda)$ non accettabile per lo stesso motivo.

L'unica posizione di equilibrio è quindi

$$P\left(\frac{mg}{k}, \frac{3}{2}\pi\right),$$

con la condizione $\lambda > \frac{1}{2}$. Studiamone la stabilità, determinando innanzitutto l'hessiano, le cui componenti sono:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} = -k, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \vartheta} = -mg\cos\vartheta, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial \vartheta^2} = mg\,(l+\xi)\operatorname{sen}\vartheta$$

e quindi

$$\mathcal{H}(\xi,\vartheta) = \begin{bmatrix} -k & -mg\cos\vartheta \\ -mg\cos\vartheta & mg\,(\ell+\xi)\operatorname{sen}\vartheta \end{bmatrix},$$

che calcolato nell'unica configurazione di equilibrio P dà

$$\mathcal{H}(P) = \begin{bmatrix} -k & 0 \\ 0 & -mg\left(\ell + \frac{mg}{k}\right) \end{bmatrix}.$$

La posizione P è di equilibrio stabile se entrambi gli autovalori sono negativi e, quindi, essendo $-k$ sempre negativa, la condizione per avere la stabilità è data da $-mg\left(\ell + \frac{mg}{k}\right) < 0$; ricordando che $\lambda = \frac{k\ell}{mg}$, tale condizione fornisce $\lambda > -1$ e considerando che per definizione $\lambda > 0$, si ha stabilità per ogni valore di λ. Come determinato in precedenza, la posizione di equilibrio P esiste solo se $\lambda > \frac{1}{2}$, quindi in definitiva la posizione $P\left(\frac{mg}{k}, \frac{3}{2}\pi\right)$ è di equilibro stabile per ogni $\lambda > \frac{1}{2}$.

2. Le posizioni di confine si hanno per $\xi = 0$ e $\xi = 2\ell$ e per un generico $\overline{\vartheta}$.

   - Per la posizione $\left(0, \overline{\vartheta}\right)$ le velocità virtuali sono $w_\xi \geq 0$ e $w_\vartheta \in \mathbb{R}$, quindi si deve avere

   $$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial \xi} \leq 0 \\ \dfrac{\partial U}{\partial \vartheta} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -mg\operatorname{sen}\overline{\vartheta} \leq 0 \\ -mg\ell\cos\overline{\vartheta} = 0 \end{cases}$$

   che ci fornisce come unica soluzione ammissibile $\overline{\vartheta} = \frac{\pi}{2}$ e quindi la posizione $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ è di equilibrio di confine.

- Per la posizione $\left(2\ell, \overline{\vartheta}\right)$ le velocità virtuali sono $w_\xi \leq 0$ e $w_\vartheta \in \mathbb{R}$, quindi si deve avere

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial \xi} \geq 0 \\ \dfrac{\partial U}{\partial \vartheta} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -mg \operatorname{sen} \overline{\vartheta} - 2k\ell \leq 0 \\ -mg\ell \cos \overline{\vartheta} - 2mg\ell \cos \overline{\vartheta} = 0 \end{cases}.$$

  La seconda equazione ci fornisce le soluzioni $\dfrac{\pi}{2}$ e $\dfrac{3}{2}\pi$, la prima invece dà $\operatorname{sen} \overline{\vartheta} \leq -2\lambda$; considerando il fatto che λ sia sempre strettamente positivo, la soluzione $\overline{\vartheta} = \dfrac{\pi}{2}$ non è accettabile mentre $\overline{\vartheta} = \dfrac{3}{2}\pi$ lo è chiaramente se $-2\lambda \geq -1$, cioè se $\lambda \leq \dfrac{1}{2}$. In definitiva la posizione $\left(2\ell, \dfrac{3}{2}\pi\right)$ è di confine se $\lambda \leq \dfrac{1}{2}$.

3. L'energia cinetica è data da

$$K = K_A + K_D$$

dove K_A e K_D sono i contributi dell'energia cinetica rispettivamente dell'asta e del disco; per il calcolo teniamo conto del fatto che il punto O è fisso per l'asta, quindi, utilizzando il teorema di König, otteniamo

$$K_A = \frac{1}{2} \mathsf{J}_O^A \boldsymbol{\omega}_A \cdot \boldsymbol{\omega}_A$$
$$K_D = \frac{1}{2} m v_C^2 + \frac{1}{2} \mathsf{J}_C^D \boldsymbol{\omega}_D \cdot \boldsymbol{\omega}_D.$$

Dato che l'asta misura 2ℓ, la sua matrice d'inerzia è

$$\mathsf{J}_O^A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4}{3}m\ell^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3}m\ell^2 \end{bmatrix}$$

mentre quella del disco è

$$\mathsf{J}_C^D = \begin{bmatrix} \dfrac{mR^2}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{mR^2}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{mR^2}{2} \end{bmatrix}$$

e le velocità angolari sono $\boldsymbol{\omega}_A = \dot{\vartheta} \boldsymbol{e}_3$ e $\boldsymbol{\omega}_D = \left(\dot{\vartheta} + \dfrac{\dot{\xi}}{R}\right) \boldsymbol{e}_3$ dove il termine $\dfrac{\dot{\xi}}{R}$ è dato dal puro rotolamento per cui vale $\dot{\xi} = R\dot{\varphi}$ dove φ è l'angolo di rotazione propria del disco. Resta da calcolare la velocità di C:

$$\boldsymbol{v}_C = \left(\dot\xi\cos\vartheta - \xi\dot\vartheta\,\mathrm{sen}\,\vartheta - R\dot\vartheta\cos\vartheta\right)\boldsymbol{e}_1 + \left(\dot\xi\,\mathrm{sen}\,\vartheta + \xi\dot\vartheta\cos\vartheta - R\dot\vartheta\,\mathrm{sen}\,\vartheta\right)\boldsymbol{e}_2$$

e quindi $v_C^2 = \dot\xi^2 + \xi^2\dot\vartheta^2 + R^2\dot\vartheta^2 - 2R\dot\xi\dot\vartheta$.
Dopo qualche conto risulta

$$K = \frac{m}{2}\left[\frac{3}{2}\dot\xi^2 - R\dot\xi\dot\vartheta + \left(\frac{3}{2}R^2 + \frac{4}{3}\ell^2 + \xi^2\right)\dot\vartheta^2\right].$$

4. Poniamo $\lambda = 1$. La posizione di equilibrio risulta in questo caso $\left(\ell, \frac{3}{2}\pi\right)$. Per determinare le pulsazioni delle piccole oscillazioni calcoliamo

$$\det\left(\omega^2 \mathsf{J}\left(\overline{\boldsymbol{q}}\right) + \mathcal{H}\left(\overline{\boldsymbol{q}}\right)\right) = 0,$$

con $\overline{\boldsymbol{q}} = \left(\ell, \frac{3}{2}\pi\right)$. La matrice associata alla forma quadratica dell'energia cinetica è

$$\mathsf{J}\left(\boldsymbol{q}\right) = \begin{bmatrix} \frac{3}{2}m & -m\frac{R}{2} \\ -m\frac{R}{2} & m\left(\frac{3}{2}R^2 + \frac{4}{3}\ell^2 + \xi^2\right) \end{bmatrix}$$

che calcolata nella pozione di equilibrio stabile diventa

$$\mathsf{J}\left(\overline{\boldsymbol{q}}\right) = \begin{bmatrix} \frac{3}{2}m & -m\frac{R}{2} \\ -m\frac{R}{2} & m\left(\frac{3}{2}R^2 + \frac{7}{3}\ell^2\right) \end{bmatrix};$$

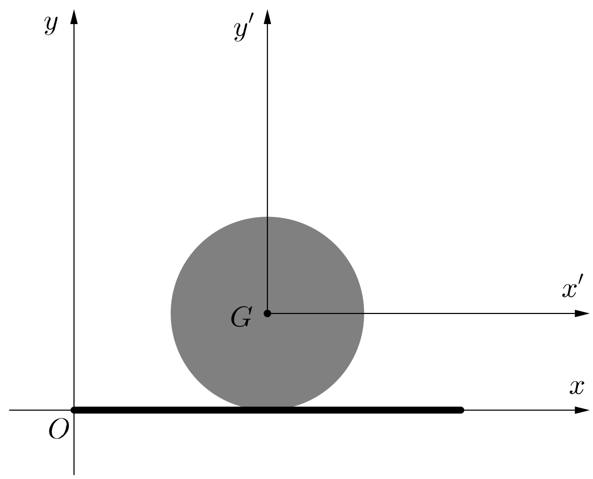
la matrice hessiana è stata calcolata in precedenza e con $\lambda = 1$ risulta

$$\mathcal{H}\left(\overline{\boldsymbol{q}}\right) = \begin{bmatrix} -k & 0 \\ 0 & -2mg\ell \end{bmatrix}.$$

Dopo aver calcolato il determinante e imposto che sia nullo, risulta che le pulsazioni delle piccole oscillazioni sono soluzioni dell'equazione

$$\left(\frac{5}{2}mR^2 + \frac{7}{2}m\ell^2\right)\omega^4 - \left(\frac{3}{2}\frac{mg}{l}R^2 + \frac{16}{3}mg\ell\right)\omega^2 + 2mg^2 = 0.$$

2) Per determinare la matrice d'inerzia del corpo rigido dato sfruttiamo la proprietà di additività dei momenti d'inerzia e calcoliamo separatamente le matrici d'inerzia dell'asta e del disco rispetto al sistema di riferimento $Oxyz$ indicato in figura.



La matrice d'inerzia J_O^A dell'asta, lunga 4ℓ, è

$$\mathsf{J}_O^A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{16}{3}m\ell^2 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{16}{3}m\ell^2 \end{bmatrix}.$$

Per il calcolo della matrice d'inerzia J_O^D del disco procediamo prima al calcolo di J_G^D:

$$\mathsf{J}_G^D = \begin{bmatrix} \dfrac{m\ell^2}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{m\ell^2}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{m\ell^2}{2} \end{bmatrix};$$

calcoliamo le componenti della matrice J_O^D con il teorema di Huygens per passare dal sistema di riferimento $Gx'y'z'$ a $Oxyz$:

$$J_O^{11} = \frac{m\ell^2}{4} + m\ell^2 = \frac{5}{4}m\ell^2$$

$$J_O^{22} = \frac{m\ell^2}{4} + 4m\ell^2 = \frac{17}{4}m\ell^2$$

$$J_O^{33} = J_O^{11} + J_O^{22} = \frac{5}{4}m\ell^2 + \frac{17}{4}m\ell^2 = \frac{11}{2}m\ell^2$$
$$J_O^{12} = 0 - 2m\ell^2 = -2m\ell^2,$$

dove per il calcolo di J_O^{33} abbiamo sfruttato il fatto che la lamina sia piana; la matrice d'inerzia è quindi

$$\mathsf{J}_O^D = \begin{bmatrix} \frac{5}{4}m\ell^2 & -2m\ell^2 & 0 \\ -2m\ell^2 & \frac{17}{4}m\ell^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{11}{2}m\ell^2 \end{bmatrix}.$$

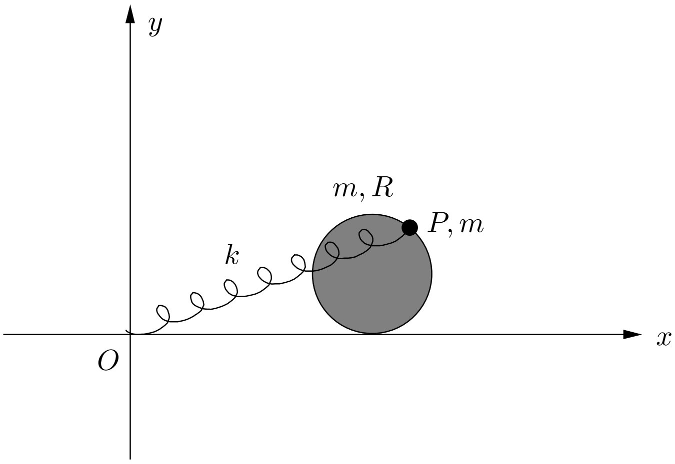
Infine la matrice cercata è

$$\mathsf{J}_O = \mathsf{J}_O^A + \mathsf{J}_O^D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{16}{3}m\ell^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{16}{3}m\ell^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{5}{4}m\ell^2 & -2m\ell^2 & 0 \\ -2m\ell^2 & \frac{17}{4}m\ell^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{11}{2}m\ell^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{4}m\ell^2 & -2m\ell^2 & 0 \\ -2m\ell^2 & \frac{115}{12}m\ell^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{65}{6}m\ell^2 \end{bmatrix}.$$

Prova scritta di Meccanica Analitica
Appello del 29 settembre 2015

1) Un disco omogeneo di massa m e raggio R rotola senza strisciare sull'asse orizzontale di un sistema di riferimento piano Oxy. Sul bordo del disco scorre senza attrito un punto materiale P di massa m.
Su tutto il sistema agisce la forza peso e sul punto P agisce una forza elastica di coefficiente $k > 0$ e polo il punto O.
Si chiede di:

1. trovare le posizioni di equilibrio del sistema;
2. discuterne la stabilità delle posizioni di equilibrio;
3. determinare le equazioni differenziali del moto;
4. scrivere le equazioni del moto linearizzate attorno a una posizione di equilibrio stabile.



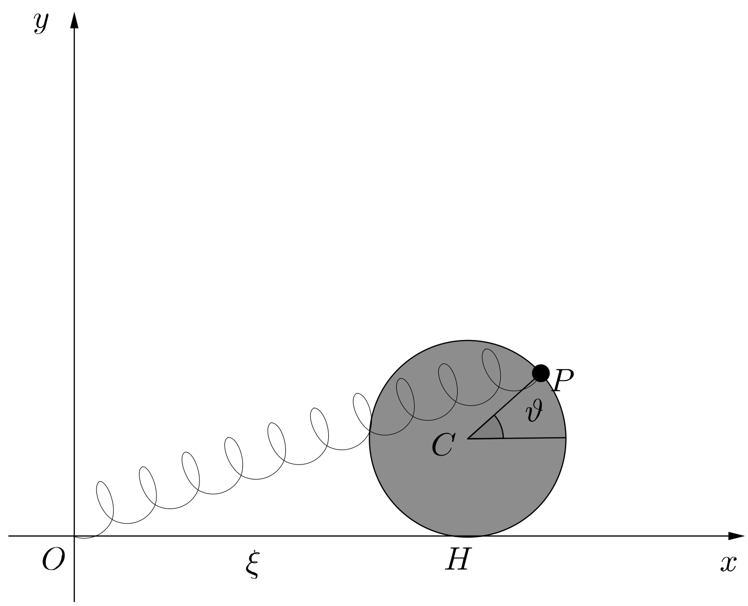
2) Data la trasformazione

$$\begin{cases} Q(q,p) = \dfrac{k}{p} e^{2q} \\ P(q,p) = p^2 e^{-2q} \end{cases}$$

determinare per quali $k > 0$ è canonica e trovarne una funzione generatrice del tipo $F(q, P)$.

Soluzione della prova scritta di Meccanica Analitica del 29 settembre 2015 a cura di Sara Mastaglio

1) Possiamo scegliere come parametri lagrangiani $\xi := |H - O| \in \mathbb{R}$ e $\vartheta := x^+ \widehat{C} P \in [\,0, 2\pi\,)$ proprio come indicato in figura.



Ora calcoliamo i vettori fondamentali per il nostro sistema:

$$(C - O) = \xi \boldsymbol{e}_1 + R\boldsymbol{e}_2$$

$$(P - O) = (\xi + R\cos\vartheta)\,\boldsymbol{e}_1 + (R + R\,\mathrm{sen}\,\vartheta)\,\boldsymbol{e}_2.$$

1. Per calcolare le posizioni di equilibrio del sistema procediamo al calcolo del potenziale, che risulta

$$U = -mgy_C - mgy_P - \frac{k}{2}|P - O|^2 = -mgR\,\mathrm{sen}\,\vartheta - \frac{k}{2}\xi^2 - kR\xi\cos\vartheta - kR^2\,\mathrm{sen}\,\vartheta + c.$$

Le posizioni di equilibrio sono date da

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial \xi} = -k\xi - kR\cos\vartheta = 0 \\ \dfrac{\partial U}{\partial \vartheta} = -mgR\cos\vartheta + kR\xi\,\mathrm{sen}\,\vartheta - kR^2\cos\vartheta = 0 \end{cases}$$

da cui si ricava subito $\xi = -R\cos\vartheta$, che sostituito nella seconda equazione dà

$$\cos\vartheta\left(-mg - kR\,\mathrm{sen}\,\vartheta - kR\right) = 0;$$

da $\cos\vartheta = 0$ troviamo $\vartheta_1 = \dfrac{\pi}{2}$ e $\vartheta_2 = \dfrac{3}{2}\pi$, mentre il secondo fattore uguagliato a 0 ci fornisce

$$\mathrm{sen}\,\vartheta = -\frac{mg + kR}{kR} = -\frac{mg}{kR} - 1 < -1,$$

che quindi non dà alcuna soluzione.
Calcolando la ξ per i due valori degli angoli trovati otteniamo le due configurazioni di equilibrio

$$P_1\left(0, \frac{\pi}{2}\right) \quad \text{e} \quad P_2\left(0, \frac{3}{2}\pi\right).$$

2. Per studiare la stabilità determiniamo l'hessiano, le cui componenti sono

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} = -k, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \vartheta} = kR\,\mathrm{sen}\,\vartheta, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial \vartheta^2} = mgR\,\mathrm{sen}\,\vartheta + kR\xi\cos\vartheta + kR^2\,\mathrm{sen}\,\vartheta$$

e quindi

$$\mathcal{H}(\xi, \vartheta) = \begin{bmatrix} -k & kR\,\mathrm{sen}\,\vartheta \\ kR\,\mathrm{sen}\,\vartheta & mgR\,\mathrm{sen}\,\vartheta + kR\xi\cos\vartheta + kR^2\,\mathrm{sen}\,\vartheta \end{bmatrix}.$$

Valutiamo la matrice hessiana nelle due posizioni di equilibrio trovate:

$$\mathcal{H}(P_1) = \begin{bmatrix} -k & kR \\ kR & mgR + kR^2 \end{bmatrix},$$

da cui si può subito calcolare il determinante che risulta minore di zero, quindi P_1 è una configurazione di equilibrio instabile;

$$\mathcal{H}(P_2) = \begin{bmatrix} -k & -kR \\ -kR & -mgR - kR^2 \end{bmatrix}$$

che ha traccia negativa e determinante positivo quindi P_2 è una posizione di equilibrio stabile.

3. Per determinare le equazioni differenziali del moto dobbiamo calcolare la lagrangiana; avendo già determinato il potenziale, non ci resta che calcolare l'energia cinetica K del sistema che ha due contributi K_P relativa al punto materiale P e K_D che è quella del disco:

$$K = K_P + K_D,$$

con $K_P = \frac{1}{2}mv_P^2$ e, sfruttando il fatto che il punto di contatto H abbia velocità nulla, $K_D = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}\cdot \mathsf{J}_H\boldsymbol{\omega}$; la velocità angolare del disco è data da $\boldsymbol{\omega} = -\dot{\varphi}\boldsymbol{e}_3$, dove φ è l'angolo di rotazione propria del disco, e per l'ipotesi di puro rotolamento sappiamo che $\dot{\varphi} = \frac{\dot{\xi}}{R}$, così otteniamo $K_D = \frac{1}{2}J_H^{33}\omega^2$. La velocità del punto P è

$$v_P = \left(\dot{\xi} - R\dot{\vartheta}\operatorname{sen}\vartheta\right)\boldsymbol{e}_1 + R\dot{\vartheta}\cos\vartheta\boldsymbol{e}_2$$

e quindi $v_P^2 = \dot{\xi}^2 + R^2\dot{\vartheta}^2 - 2R\dot{\xi}\dot{\vartheta}\operatorname{sen}\vartheta$; il momento d'inerzia è $J_H^{33} = \frac{3}{2}mR^2$. Dopo alcuni conti otteniamo

$$K = \frac{1}{2}m\left(\frac{5}{2}\dot{\xi}^2 - 2R\dot{\xi}\dot{\vartheta}\operatorname{sen}\vartheta + R^2\dot{\vartheta}^2\right).$$

Ora è possibile calcolare la lagrangiana:

$$\mathcal{L} = K + U = \frac{5}{4}m\dot{\xi}^2 - mR\dot{\xi}\dot{\vartheta}\operatorname{sen}\vartheta + \frac{1}{2}mR^2\dot{\vartheta}^2 - mgR\operatorname{sen}\vartheta - \frac{k}{2}\xi^2 - kR\xi\cos\vartheta - kR^2\operatorname{sen}\vartheta.$$

Per determinare le equazioni differenziali del moto dovremo calcolare per ognuno dei due parametri lagrangiani $q = \xi, \vartheta$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q}.$$

Cominciando da ξ abbiamo

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\xi} = -k\xi - kR\cos\vartheta,$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\xi}} = \frac{5}{2}m\dot{\xi} - mR\dot{\vartheta}\operatorname{sen}\vartheta,$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\xi}} = \frac{5}{2}m\ddot{\xi} - mR\ddot{\vartheta}\operatorname{sen}\vartheta - mR\dot{\vartheta}^2\cos\vartheta,$$

da cui si ricava la prima equazione differenziale del moto

$$\frac{5}{2}m\ddot{\xi} - mR\ddot{\vartheta}\operatorname{sen}\vartheta - mR\dot{\vartheta}^2\cos\vartheta = -k\xi - kR\cos\vartheta;$$

ripetiamo lo stesso procedimento per ϑ:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vartheta} = -mR\dot{\xi}\dot{\vartheta}\cos\vartheta - mgR\cos\vartheta + kR\xi\operatorname{sen}\vartheta - kR^2\cos\vartheta,$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\vartheta}} = -mR\dot{\xi}\operatorname{sen}\vartheta + mR^2\dot{\vartheta},$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\vartheta}} = -mR\ddot{\xi}\operatorname{sen}\vartheta - mR\dot{\xi}\dot{\vartheta}\cos\vartheta + mR^2\ddot{\vartheta},$$

da cui si ricava la seconda equazione differenziale del moto

$$-mR\ddot{\xi}\operatorname{sen}\vartheta - mR\dot{\xi}\dot{\vartheta}\cos\vartheta + mR^2\ddot{\vartheta} = -mR\dot{\xi}\dot{\vartheta}\cos\vartheta - mgR\cos\vartheta + kR\xi\operatorname{sen}\vartheta - kR^2\cos\vartheta.$$

4. Determiniamo le equazioni del moto linearizzate attorno alla posizione di equilibrio stabile $P_2\left(0, \frac{3}{2}\pi\right)$. Dapprima calcoliamo la lagrangiana linearizzata

$$\widetilde{\mathcal{L}} = \frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{q}}^{\mathsf{T}}\mathsf{J}\left(\overline{\boldsymbol{q}}\right)\dot{\boldsymbol{q}} + \frac{1}{2}(\boldsymbol{q} - \overline{\boldsymbol{q}})^{\mathsf{T}}\mathcal{H}\left(\overline{\boldsymbol{q}}\right)(\boldsymbol{q} - \overline{\boldsymbol{q}})$$

con $\boldsymbol{q} = [\xi, \vartheta]^{\mathsf{T}}$, $\dot{\boldsymbol{q}} = [\dot{\xi}, \dot{\vartheta}]^{\mathsf{T}}$ e $\overline{\boldsymbol{q}} = \left[0, \frac{3}{2}\pi\right]^{\mathsf{T}}$,

$$\mathsf{J}\left(\boldsymbol{q}\right) = \begin{bmatrix} \frac{5}{2}m & -mR\operatorname{sen}\vartheta \\ -mR\operatorname{sen}\vartheta & mR^2 \end{bmatrix}$$

e quindi

$$\mathsf{J}\left(\overline{\boldsymbol{q}}\right) = \begin{bmatrix} \frac{5}{2}m & mR \\ mR & mR^2 \end{bmatrix}.$$

Avendo già calcolato $\mathcal{H}\left(\overline{\boldsymbol{q}}\right)$ in precedenza, la lagrangiana linearizzata risulta, dopo qualche conto,

$$\widetilde{L} = \frac{5}{4}m\dot{\xi}^2 + \frac{1}{2}mR^2\dot{\vartheta}^2 + mR\dot{\xi}\dot{\vartheta} - \frac{k}{2}\xi^2 - kR\xi\vartheta - R\left(mg + kR\right)\vartheta^2 + 3\pi R\left(mg + kR\right)\vartheta.$$

Per determinare le equazioni del moto linearizzate basta ripetere il procedimento del punto 3. e otteniamo

$$\frac{5}{2}m\ddot{\xi} + mR\ddot{\vartheta} = -k\xi - kR\vartheta,$$

$$mR^2\ddot{\vartheta} + mR\ddot{\xi} = -kR\xi - 2R\,(mg + kR)\,\vartheta + 3\pi R\,(mg + kR)\,.$$

2) La trasformazione

$$\begin{cases} Q(q,p) = \dfrac{k}{p}e^{2q} \\ P(q,p) = p^2 e^{-2q} \end{cases}$$

è canonica quando

$$[Q,P] = \frac{\partial Q}{\partial q}\frac{\partial P}{\partial p} - \frac{\partial Q}{\partial p}\frac{\partial P}{\partial q} = 1.$$

Calcoliamo quindi le derivate parziali

$$\frac{\partial Q}{\partial q} = \frac{2k}{p}e^{2q}, \quad \frac{\partial Q}{\partial p} = -\frac{k}{p^2}e^{2q}, \quad \frac{\partial P}{\partial q} = -2p^2e^{-2q}, \quad \frac{\partial P}{\partial p} = 2pe^{-2q}.$$

Andando quindi a imporre che la parentesi di Poisson sia uguale a 1 troviamo subito $4k - 2k = 1$ e cioè $k = \frac{1}{2}$. La trasformazione per tale valore di k diventa

$$\begin{cases} Q(q,p) = \dfrac{1}{2p}e^{2q} \\ P(q,p) = p^2 e^{-2q} \end{cases}.$$

Vogliamo ora trovare una funzione generatrice. Sfruttiamo il fatto che

$$p = \frac{\partial F}{\partial q} \quad \text{e} \quad Q = \frac{\partial F}{\partial P}$$

quindi $p = \sqrt{P}e^q = \dfrac{\partial F}{\partial q}$, da cui si può ricavare $F(q,P) = \sqrt{P}e^q + g(P)$. Inoltre

$$\frac{1}{2\sqrt{P}}e^q + g'(P) = \frac{\partial F}{\partial P} = Q = \frac{1}{2\sqrt{P}}e^q;$$

uguagliando il primo e l'ultimo termine risulta subito che $g'(P) = 0$ e quindi $g(P) = \text{costante}$. Dunque

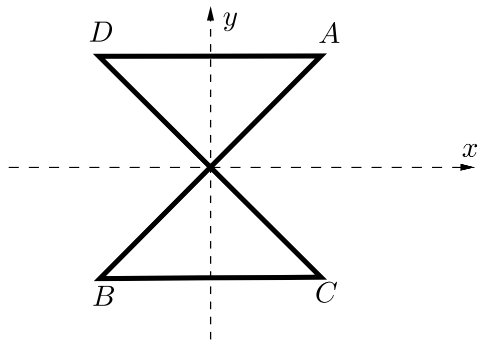
$$F(q,P) = \sqrt{P}e^q + \text{costante}$$

e scegliendo la costante $= 0$ troviamo

$$F(q, P) = \sqrt{P} e^q.$$

Prova scritta di Meccanica Analitica
Appello del 26 gennaio 2016

1) Un corpo rigido è formato da due aste AD e BC di massa m e lunghezza ℓ e due aste AB e CD di massa m e lunghezza $\ell\sqrt{2}$, disposte in un poligono intrecciato come in figura. Si calcoli la matrice d'inerzia del corpo rigido rispetto al sistema di riferimento indicato (l'asse z è ortogonale al foglio).



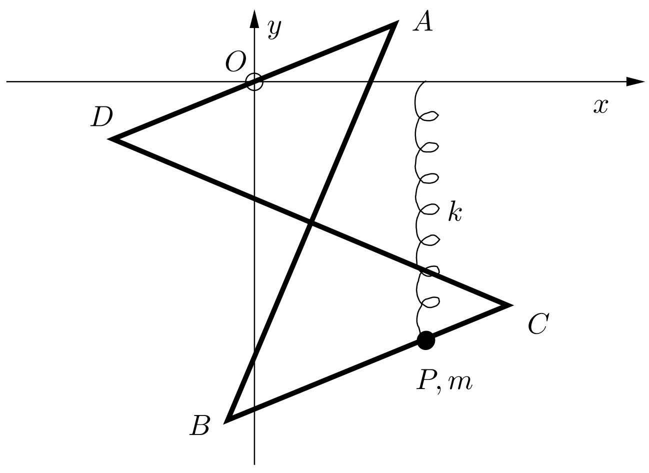
2) Il corpo rigido dell'esercizio precedente è vincolato a mantenere il punto medio dell'asta AD nell'origine di un sistema di riferimento piano Oxy ed è libero di ruotare attorno ad esso. Sull'asta BC scorre senza attrito un punto materiale P di massa m.
Il sistema giace in un piano **orizzontale** e sul punto P agisce una forza elastica di coefficiente $k > 0$ e polo sull'asse x, che si mantiene sempre parallela all'asse y.
Si chiede di:

A) trovare le posizioni di equilibrio ordinarie del sistema;

B) trovare le posizioni di confine;

C) discutere la stabilità delle posizioni di equilibrio ordinarie;

D) determinare la lagrangiana del sistema.



[Nota: non c'è bisogno di dirvi che "piano orizzontale" significa assenza di forza peso]

Prova scritta di Meccanica Analitica
Appello del 12 febbraio 2016

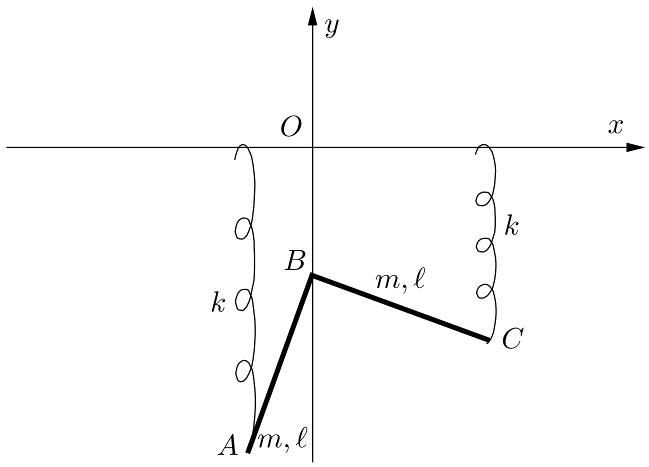
1) Un corpo rigido è formato da due aste omogenee AB e BC di massa m e lunghezza ℓ saldate ad angolo retto nell'estremo comune B. Tale corpo è libero di ruotare attorno al punto B, che si muove sull'asse verticale di un sistema di riferimento piano Oxy.
Su tutto il sistema agisce la forza peso e sui punti A e C agiscono due forze elastiche sempre verticali di coefficiente $k > 0$ e poli sull'asse delle x.
Si chiede di:

A) trovare le posizioni di equilibrio del sistema;

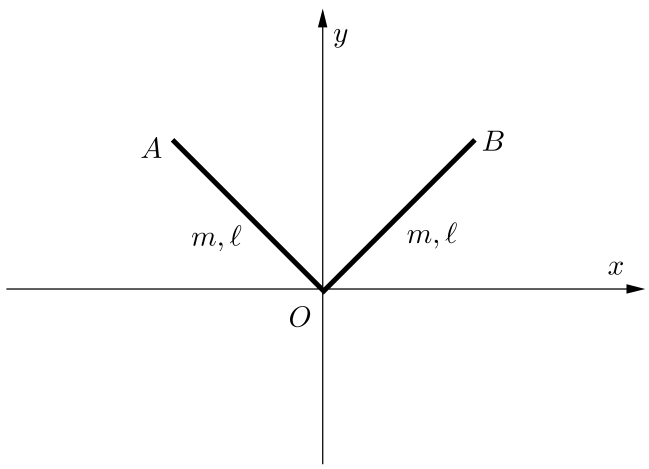
B) discuterne la stabilità delle posizioni di equilibrio;

C) determinare le equazioni differenziali del moto;

D) scrivere le equazioni del moto linearizzate attorno a una posizione di equilibrio stabile.



2) Si calcoli la matrice d'inerzia di un corpo rigido formato da due aste omogenee AO e OB di massa m e lunghezza ℓ saldate ad angolo retto nel punto O, disposte a 45° rispetto al sistema di riferimento indicato in figura (l'asse z è ortogonale al foglio).



Soluzione della prova scritta di Meccanica Analitica del 12 febbraio 2016 a cura di Sara Mastaglio

1) Definiamo i seguenti parametri lagrangiani:

$$\xi := |B-O| \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad \vartheta := y^{-}\widehat{B}C \in [0, 2\pi).$$

Indichiamo con G_1 il baricentro dell'asta AB, con G_2 quello dell'asta BC e con H e K le proiezioni sull'asse x rispettivamente di A e C; determiniamo ora i vettori che ci serviranno in seguito:

$$(G_1-O) = -\frac{\ell}{2}\cos\vartheta\boldsymbol{e}_1 - \left(\xi + \frac{\ell}{2}\operatorname{sen}\vartheta\right)\boldsymbol{e}_2,$$

$$(G_2-O) = \frac{\ell}{2}\operatorname{sen}\vartheta\boldsymbol{e}_1 - \left(\xi + \frac{\ell}{2}\cos\vartheta\right)\boldsymbol{e}_2,$$

$$(A-H) = -\left(\xi + \ell\operatorname{sen}\vartheta\right)\boldsymbol{e}_2,$$

$$(C-K) = -\left(\xi + \ell\cos\vartheta\right)\boldsymbol{e}_2.$$

A) Per trovare le posizioni di equilibrio del sistema calcoliamo innanzitutto il potenziale:

$$\begin{aligned}U &= -mgy_{G_1} - mgy_{G_2} - \frac{k}{2}|A-K|^2 - \frac{k}{2}|C-H|^2 = \\ &= mg\left(\xi + \frac{\ell}{2}\cos\vartheta\right) + mg\left(\xi + \frac{\ell}{2}\operatorname{sen}\vartheta\right) - \frac{k}{2}|\xi + \ell\operatorname{sen}\vartheta|^2 - \frac{k}{2}|\xi + \ell\cos\vartheta|^2 = \\ &= 2mg\xi - k\xi^2 + \left(\frac{1}{2}mg\ell - k\ell\xi\right)(\cos\vartheta + \operatorname{sen}\vartheta) + c.\end{aligned}$$

Le posizioni di equilibrio sono date da:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial \xi} = 2mg - 2k\xi - k\ell(\operatorname{sen}\vartheta + \cos\vartheta) = 0 \\ \dfrac{\partial U}{\partial \vartheta} = \left(\dfrac{1}{2}mg\ell - k\ell\xi\right)(\cos\vartheta - \operatorname{sen}\vartheta) = 0 \end{cases};$$

dalla seconda otteniamo immediatamente $\operatorname{tg}\vartheta = 1$ da cui $\vartheta_{1/2} = \pi/4;\ 5\pi/4$, che sostituiti nella prima equazione ci danno i relativi valori per delle ξ e quindi due posizioni di equilibrio sono

$$P_1\left(\frac{mg}{k} - \frac{\sqrt{2}}{2}\ell, \frac{\pi}{4}\right) \quad \text{e} \quad P_2\left(\frac{mg}{k} + \frac{\sqrt{2}}{2}\ell, \frac{5}{4}\pi\right);$$

sempre dalla seconda equazione troviamo $\xi = \dfrac{mg}{2k}$, valore che sostituito nella prima equazione ci dà

$$\operatorname{sen}\vartheta + \cos\vartheta - \frac{mg}{k\ell} = 0,$$

da cui

$$\operatorname{sen}\left(\vartheta + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{mg}{k\ell}$$

e per avere soluzioni si deve avere la condizione $-1 < \dfrac{\sqrt{2}}{2}\dfrac{mg}{k\ell} < 1$, quindi $-\sqrt{2} < \dfrac{mg}{k\ell} < \sqrt{2}$; inoltre $\dfrac{mg}{k\ell} > 0$, quindi $0 < \dfrac{mg}{k\ell} < \sqrt{2}$; troviamo infine gli angoli

$$\vartheta_3 = \arcsen\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{mg}{k\ell}\right) - \frac{\pi}{4} \quad \text{e} \quad \vartheta_4 = \frac{3}{4}\pi - \arcsen\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{mg}{k\ell}\right).$$

Riassumendo otteniamo quattro posizioni di equilibrio:

$$P_1\left(\frac{mg}{k} - \frac{\sqrt{2}}{2}\ell, \frac{\pi}{4}\right), \quad P_2\left(\frac{mg}{k} + \frac{\sqrt{2}}{2}\ell, \frac{5}{4}\pi\right), \quad P_3\left(\frac{mg}{2k}, \vartheta_3\right), \quad P_4\left(\frac{mg}{2k}, \vartheta_4\right).$$

B) Per calcolare la stabilità delle posizioni di equilibrio appena trovate, dobbiamo determinare l'hessiano:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} = -2k, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \vartheta} = -k\ell(\cos\vartheta - \operatorname{sen}\vartheta), \quad \frac{\partial^2 U}{\partial \vartheta^2} = \left(k\ell\xi - \frac{1}{2}mg\ell\right)(\operatorname{sen}\vartheta + \cos\vartheta),$$

quindi

$$\mathcal{H}(\xi, \vartheta) = \begin{bmatrix} -2k & -k\ell(\cos\vartheta - \operatorname{sen}\vartheta) \\ -k\ell(\cos\vartheta - \operatorname{sen}\vartheta) & \left(k\ell\xi - \frac{1}{2}mg\ell\right)(\operatorname{sen}\vartheta + \cos\vartheta) \end{bmatrix}.$$

Calcoliamolo nelle posizioni di equilibrio:

$$\mathcal{H}(P_1) = \begin{bmatrix} -2k & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2}mg\ell - k\ell^2 \end{bmatrix}$$

e troviamo quindi che P_1 è stabile se $\dfrac{\sqrt{2}}{2}mg\ell - k\ell^2 < 0$, cioè se $k > \dfrac{\sqrt{2}}{2}\dfrac{mg}{\ell}$. Passiamo alla stabilità di P_2:

$$\mathcal{H}(P_2) = \begin{bmatrix} -2k & 0 \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2}mg\ell - k\ell^2 \end{bmatrix}$$

e dato che otteniamo due autovalori negativi, troviamo che P_2 è una posizione di equilibrio stabile. Per quanto riguarda P_3, l'hessiano è

$$\mathcal{H}(P_3) = \begin{bmatrix} -2k & -\sqrt{2k^2\ell^2 - m^2g^2} \\ -\sqrt{2k^2\ell^2 - m^2g^2} & 0 \end{bmatrix}$$

che ha traccia negativa e determinante negativo, quindi è una posizione di equilibrio instabile. Infine, l'hessiano calcolato in P_4 è

$$\mathcal{H}(P_3) = \begin{bmatrix} -2k & \sqrt{2k^2\ell^2 - m^2g^2} \\ \sqrt{2k^2\ell^2 - m^2g^2} & 0 \end{bmatrix}$$

e anche in questo caso otteniamo traccia negativa e determinante negativo, quindi P_4 è una posizione di equilibrio instabile.

C) Per determinare le equazioni differenziali del moto dobbiamo prima calcolare l'energia cinetica, che è data da

$$K = K_{AB} + K_{BC} = \frac{1}{2}mv_{G_1}^2 + \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}_{AB} \cdot \mathsf{J}_{G_1}\boldsymbol{\omega}_{AB} + \frac{1}{2}mv_{G_2}^2 + \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}_{BC} \cdot \mathsf{J}_{G_2}\boldsymbol{\omega}_{BC}$$

dove J_{G_1} e J_{G_2} sono le matrici d'inerzia delle aste AB e BC calcolate rispetto ad un sistema di riferimento centrato nei baricentri; $\boldsymbol{\omega}_{AB}$ e $\boldsymbol{\omega}_{BC}$ sono le velocità angolari delle due aste. Dato che siamo nel piano il secondo e il quarto termine risultano semplicemente $\frac{1}{2}J_{G_1}^{zz}\omega_{AB}^2$ e $\frac{1}{2}J_{G_2}^{zz}\omega_{BC}^2$. I momenti d'inerzia valgono entrambi $J_{G_1}^{zz} = J_{G_2}^{zz} = m\ell^2/12$ e anche le velocità angolari sono le medesime $\boldsymbol{\omega}_{AB} = \boldsymbol{\omega}_{BC} = \dot{\vartheta}\boldsymbol{e}_3$. Restano da calcolare le velocità dei due baricentri:

$$\boldsymbol{v}_{G_1} = -\frac{\ell}{2}\dot{\vartheta}\,\mathrm{sen}\,\vartheta\boldsymbol{e}_1 - \left(\dot{\xi} + \frac{\ell}{2}\dot{\vartheta}\cos\vartheta\right)\boldsymbol{e}_2 \quad \text{e} \quad \boldsymbol{v}_{G_2} = \frac{\ell}{2}\dot{\vartheta}\cos\vartheta\boldsymbol{e}_1 - \left(\dot{\xi} - \frac{\ell}{2}\dot{\vartheta}\,\mathrm{sen}\,\vartheta\right)\boldsymbol{e}_2,$$

quindi

$$v_{G_1}^2 = \dot{\xi}^2 + \ell\dot{\xi}\dot{\vartheta}\cos\vartheta + \frac{\ell^2}{4}\dot{\vartheta}^2 \quad \text{e} \quad v_{G_2}^2 = \dot{\xi}^2 - \ell\dot{\xi}\dot{\vartheta}\,\mathrm{sen}\,\vartheta + \frac{\ell^2}{4}\dot{\vartheta}^2.$$

L'energia cinetica, dopo qualche calcolo risulta

$$K = \frac{1}{2}\left(2m\dot{\xi}^2 + m\ell\dot{\xi}\dot{\vartheta}\left(\cos\vartheta - \mathrm{sen}\,\vartheta\right) + \frac{2}{3}m\ell^2\dot{\vartheta}^2\right).$$

Possiamo quindi determinare anche la lagrangiana

$$\mathcal{L} = K + U = m\dot{\xi}^2 + \frac{1}{2}m\ell\dot{\xi}\dot{\vartheta}\left(\cos\vartheta - \mathrm{sen}\,\vartheta\right) + \frac{1}{3}m\ell^2\dot{\vartheta}^2 + 2mg\xi - k\xi^2 + \left(\frac{1}{2}mg\ell - k\ell\xi\right)\left(\cos\vartheta + \mathrm{sen}\,\vartheta\right)$$

e da

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q}$$

con $q = \xi, \vartheta$ troviamo le equazioni differenziali del moto. Cominciando dalla ξ troviamo

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \xi} = 2mg - 2k\xi - k\ell(\cos\vartheta + \operatorname{sen}\vartheta),$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\xi}} = 2m\dot{\xi} + \frac{1}{2}m\ell\dot{\vartheta}(\cos\vartheta - \operatorname{sen}\vartheta),$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\xi}} = 2m\ddot{\xi} + \frac{1}{2}m\ell\ddot{\vartheta}(\cos\vartheta - \operatorname{sen}\vartheta) - \frac{1}{2}m\ell\dot{\vartheta}^2(\operatorname{sen}\vartheta + \cos\vartheta),$$

da cui otteniamo la prima equazione differenziale del moto:

$$2m\ddot{\xi} + \frac{1}{2}m\ell\ddot{\vartheta}(\cos\vartheta - \operatorname{sen}\vartheta) + \left(k\ell - \frac{1}{2}m\ell\dot{\vartheta}^2\right)(\operatorname{sen}\vartheta + \cos\vartheta) + 2k\xi = 2mg;$$

per quanto riguarda la ϑ, invece

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vartheta} = -\frac{1}{2}m\ell\dot{\xi}\dot{\vartheta}(\operatorname{sen}\vartheta + \cos\vartheta) + \left(\frac{1}{2}mg\ell - k\ell\xi\right)(\cos\vartheta - \operatorname{sen}\vartheta),$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\vartheta}} = \frac{1}{2}m\ell\dot{\xi}(\cos\vartheta - \operatorname{sen}\vartheta) + \frac{2}{3}m\ell^2\dot{\vartheta},$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\vartheta}} = \frac{1}{2}m\ell\ddot{\xi}(\cos\vartheta - \operatorname{sen}\vartheta) - \frac{1}{2}m\ell\dot{\xi}\dot{\vartheta}(\operatorname{sen}\vartheta + \cos\vartheta) + \frac{2}{3}m\ell^2\ddot{\vartheta},$$

da cui otteniamo la seconda equazione differenziale del moto

$$3\left(m\ddot{\xi} - mg + 2k\xi\right)(\cos\vartheta - \operatorname{sen}\vartheta) + 4m\ell\ddot{\vartheta} = 0.$$

D) L'unica posizione di equilibrio che è sempre stabile è $P_2\left(\frac{mg}{k} + \frac{\sqrt{2}}{2}\ell, \frac{5}{4}\pi\right)$ e quindi determineremo le equazioni del moto linearizzate attorno a P_2. Dapprima calcoliamo la lagrangiana linearizzata

$$\widetilde{\mathcal{L}} = \frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{q}}^{\mathsf{T}}\mathsf{J}\left(\overline{\boldsymbol{q}}\right)\dot{\boldsymbol{q}} + \frac{1}{2}(\boldsymbol{q} - \overline{\boldsymbol{q}})^{\mathsf{T}}\mathcal{H}\left(\overline{\boldsymbol{q}}\right)(\boldsymbol{q} - \overline{\boldsymbol{q}})$$

con $\boldsymbol{q} = [\xi, \vartheta]^{\mathsf{T}}$, $\dot{\boldsymbol{q}} = [\dot{\xi}, \dot{\vartheta}]^{\mathsf{T}}$ e $\overline{\boldsymbol{q}} = \left[\frac{mg}{k} + \frac{\sqrt{2}}{2}\ell, \frac{5}{4}\pi\right]^{\mathsf{T}}$,

$$\mathsf{J}\left(\boldsymbol{q}\right) = \begin{bmatrix} 2m & \frac{1}{2}m\ell(\cos\vartheta - \operatorname{sen}\vartheta) \\ \frac{1}{2}m\ell(\cos\vartheta - \operatorname{sen}\vartheta) & \frac{2}{3}m\ell^2 \end{bmatrix}$$

e quindi

$$\mathsf{J}\left(\overline{\boldsymbol{q}}\right)=\begin{bmatrix}2m & 0\\ 0 & \dfrac{2}{3}m\ell^2\end{bmatrix}.$$

Avendo già calcolato $\mathcal{H}\left(\overline{\boldsymbol{q}}\right)$ in precedenza, la lagrangiana linearizzata risulta, dopo qualche conto,

$$\widetilde{\mathcal{L}}=m\dot{\xi}^2+\frac{1}{3}m\ell^2\dot{\vartheta}^2-k\xi^2+2mg\xi+\sqrt{2}k\ell\xi+\left(\frac{5}{8}\pi k\ell^2-\frac{\sqrt{2}}{4}mg\ell-\frac{k\ell^2}{2}\right)\vartheta^2+$$
$$+\left(\frac{5\sqrt{2}}{8}\pi mg\ell-\frac{5}{8}\pi k\ell^2\right)\vartheta-\frac{m^2g^2}{k}-\sqrt{2}mg\ell-\frac{k\ell^2}{2}-\frac{25\sqrt{2}}{64}\pi^2mg\ell-\frac{25}{32}\pi^2k\ell^2.$$

Per determinare le equazioni del moto linearizzate basta ripetere il procedimento del punto C) e troviamo

$$2m\ddot{\xi}+2k\xi=2mg+\sqrt{2}k\ell$$

e

$$16m\ell\ddot{\vartheta}+\left(24k\ell+12\sqrt{2}mg-30\pi k\ell\right)\vartheta=15\pi\left(\sqrt{2}mg-k\ell\right).$$

2) La matrice d'inerzia del corpo rigido rispetto al sistema di riferimento $Oxyz$ è data da

$$\mathsf{J}_O=\mathsf{J}_O^{OA}+\mathsf{J}_O^{OB}$$

dove J_O^{OA} e J_O^{OB} sono le matrici d'inerzia delle aste OA e OB prese singolarmente (e rispetto al medesimo sistema di riferimento). Dato che il corpo rigido è piano si ottiene $J_O^{11}+J_O^{22}=J_O^{33}$; inoltre, considerando che xy e yz sono piani di simmetria materiale, otteniamo anche $J_O^{12}=J_O^{13}=J_O^{23}=0$. Ora, ricordando che la formula del momento d'inerzia di un'asta inclinata di una angolo α rispetto ad un asse r passante per O è

$$J_r=\frac{m\ell^2}{3}\operatorname{sen}^2\alpha$$

e visto che sia l'asta OA che l'asta OB sono inclinate di $45°$ rispetto agli assi x e y, otteniamo facilmente

$$J_O^{OA,11}=J_O^{OA,22}=J_O^{OB,11}=J_O^{OB,22}=\frac{m\ell^2}{3}\operatorname{sen}^2(45°)=\frac{m\ell^2}{6};$$

infine $J_O^{11}=J_O^{11,OA}+J_O^{11,OB}=\dfrac{m\ell^2}{3}$ e chiaramente $J_O^{22}=J_O^{11}$, da cui

$$\mathsf{J}_O=\begin{bmatrix}\dfrac{m\ell^2}{3} & 0 & 0\\ 0 & \dfrac{m\ell^2}{3} & 0\\ 0 & 0 & \dfrac{2}{3}m\ell^2\end{bmatrix}.$$

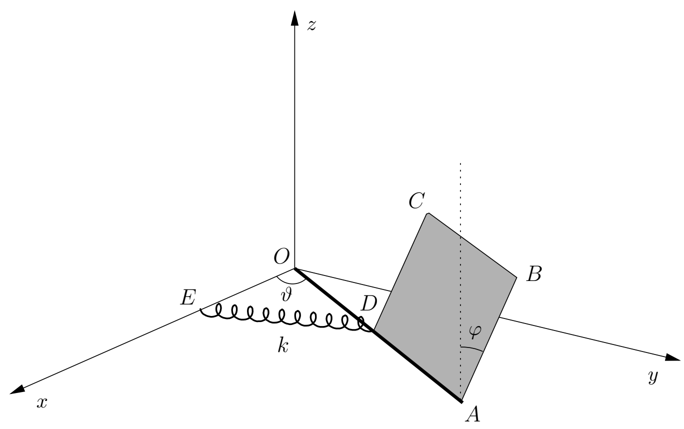
Prova scritta di Meccanica Analitica
Appello del 10 giugno 2016

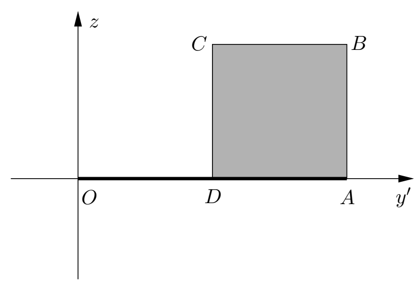
1) Un corpo rigido è formato da un'asta omogenee OA di massa m e lunghezza 2ℓ a cui è saldata una lamina quadrata $ABCD$ di massa m e lato ℓ, come si vede in figura. Il corpo si muove in modo che l'asta OA stia nel piano orizzontale xy di un sistema di riferimento $Oxyz$ e il punto O sia fisso nell'origine. La lamina quadrata si muove in modo da ruotare attorno all'asta OA.

Sull'estremo D della lamina agisce una forza elastica di coefficiente $k > 0$ e polo il punto E di coordinate $(\ell, 0, 0)$.

Il sistema è soggetto alla forza peso e tutti i vincoli sono lisci. Si chiede di:

1. trovare le posizioni di equilibrio del sistema e discuterne la stabilità;
2. trovare la matrice d'inerzia del corpo rigido nel sistema indicato in figura;
3. determinare l'energia cinetica del sistema;
4. trovare le pulsazioni delle piccole oscillazioni attorno a una posizione di equilibrio stabile;
5. scrivere la **quantità di moto** del sistema in funzione dei parametri lagrangiani.





2) Determinare per quali valori di $k \neq 0$ la trasformazione

$$\begin{cases} Q(q,p) = q^2 e^{-\frac{p}{kq}} \\ P(q,p) = e^{\frac{p}{kq}} \end{cases}$$

è canonica e trovarne una funzione generatrice del tipo $F(q, P)$.

Soluzione della prova scritta di Meccanica Analitica del 10 giugno 2016
a cura di Sara Mastaglio

1) Determiniamo innanzitutto

$$(D-O) = \ell\cos\vartheta\boldsymbol{e}_x + \ell\operatorname{sen}\vartheta\boldsymbol{e}_y,$$

$$(D-E) = \ell\left(\cos\vartheta - 1\right)\boldsymbol{e}_x + \ell\operatorname{sen}\vartheta\boldsymbol{e}_y$$

e, detto G il baricentro della lamina quadrata,

$$(G-O) = \frac{\ell}{2}\left(3\cos\vartheta - \operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\vartheta\right)\boldsymbol{e}_x + \frac{\ell}{2}\left(3\operatorname{sen}\vartheta + \operatorname{sen}\varphi\cos\vartheta\right)\boldsymbol{e}_y + \frac{\ell}{2}\cos\varphi\boldsymbol{e}_z.$$

1. Per determinare le posizioni di equilibrio ci serve innanzitutto il potenziale

$$\begin{aligned}U =& -mgz_D - mgz_G - \frac{k}{2}|D-E|^2 = \\ =& -mg\cdot 0 - mg\left(\frac{\ell}{2}\cos\varphi\right) - \frac{k}{2}\left(\ell^2+\ell^2-2\ell^2\cos\vartheta\right) = \\ =& -\frac{1}{2}mg\ell\cos\varphi + k\ell^2\cos\vartheta + c.\end{aligned}$$

Le posizioni di equilibrio sono quindi date dal sistema

$$\begin{cases}\dfrac{\partial U}{\partial\vartheta} = -k\ell^2\operatorname{sen}\vartheta = 0\\ \dfrac{\partial U}{\partial\varphi} = \dfrac{1}{2}mg\ell\operatorname{sen}\varphi = 0,\end{cases}$$

da cui si ricavano subito $\operatorname{sen}\vartheta = \operatorname{sen}\varphi = 0$ che forniscono le seguenti posizioni di equilibrio:

$$P_1(0,0),\quad P_2(0,\pi),\quad P_3(\pi,0),\quad P_4(\pi,\pi).$$

Per discuterne la stabilità calcoliamo

$$\frac{\partial^2 U}{\partial\vartheta^2} = -k\ell^2\cos\vartheta,\quad \frac{\partial^2 U}{\partial\vartheta\partial\varphi} = 0,\quad \frac{\partial^2 U}{\partial\varphi^2} = \frac{1}{2}mgl\cos\varphi,$$

e quindi l'hessiano è

$$\mathcal{H}\left(\vartheta,\varphi\right) = \begin{bmatrix}-k\ell^2\cos\vartheta & 0\\ 0 & \dfrac{1}{2}mgl\cos\varphi\end{bmatrix}.$$

L'hessiano valutato nelle quattro posizioni di equilibrio è

$$\mathcal{H}(P_1) = \begin{bmatrix} -k\ell^2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}mgl \end{bmatrix}, \quad \mathcal{H}(P_2) = \begin{bmatrix} -k\ell^2 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}mgl \end{bmatrix},$$
$$\mathcal{H}(P_3) = \begin{bmatrix} k\ell^2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}mgl \end{bmatrix}, \qquad \mathcal{H}(P_4) = \begin{bmatrix} k\ell^2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}mgl \end{bmatrix},$$

quindi, dato che otteniamo due autovalori negativi solo per P_2, risulta che P_2 è l'unica posizione di equilibrio stabile.

2. La matrice d'inerzia J_O^A dell'asta, tenuto conto del sistema di riferimento $Ox'y'z'$ della figura (con $z \equiv z'$ e l'asse x' ortogonale agli altri due e uscente dal foglio) e della lunghezza 2ℓ dell'asta è

$$\mathsf{J}_O^A = \begin{bmatrix} \frac{4}{3}m\ell^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3}m\ell^2 \end{bmatrix}.$$

Per determinare la matrice d'inerzia J_O^Q della lamina quadrata dobbiamo utilizzare il teorema di Huygens-Steiner, ossia $\mathsf{J}_O^Q = \mathsf{J}_G^Q + m\left(d^2\mathsf{I} - \boldsymbol{d} \otimes \boldsymbol{d}\right)$, con $\boldsymbol{d} = (G - O) = \left(0, \frac{3}{2}\ell, \frac{\ell}{2}\right)$ e

$$\mathsf{J}_G^Q = \begin{bmatrix} \frac{m\ell^2}{6} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m\ell^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m\ell^2}{12} \end{bmatrix},$$

dove J_G^Q è la matrice d'inerzia della lamina quadrata rispetto ad un sistema di riferimento centrato nel baricentro G della lamina e con assi paralleli a quelli indicati in figura (x', y', z'); la matrice d'inerzia cercata è dunque

$$\mathsf{J}_O^Q = \begin{bmatrix} \frac{m\ell^2}{6} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m\ell^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m\ell^2}{12} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{5}{2}m\ell^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m\ell^2}{4} & -\frac{3}{4}m\ell^2 \\ 0 & -\frac{3}{4}m\ell^2 & \frac{9}{4}m\ell^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{8}{3}m\ell^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m\ell^2}{3} & -\frac{3}{4}m\ell^2 \\ 0 & -\frac{3}{4}m\ell^2 & \frac{7}{3}m\ell^2 \end{bmatrix}.$$

Otteniamo infine la matrice d'inerzia J_O dell'intero corpo rigido per additività:

$$\mathsf{J}_O = \mathsf{J}_O^A + \mathsf{J}_O^Q = \begin{bmatrix} 4m\ell^2 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{m\ell^2}{3} & -\dfrac{3}{4}m\ell^2 \\ 0 & -\dfrac{3}{4}m\ell^2 & \dfrac{11}{3}m\ell^2 \end{bmatrix}.$$

3. Considerando che O per il corpo rigido è un punto fisso, possiamo scrivere l'energia cinetica come

$$K = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega} \cdot \mathsf{J}_O\boldsymbol{\omega},$$

dove $\boldsymbol{\omega}$ è la velocità angolare del corpo rigido. Dato che J_O è stata calcolata nel punto precedente ci resta da calcolare la velocità angolare, che è data da $\boldsymbol{\omega} = \dot{\vartheta}\boldsymbol{e}_z - \dot{\varphi}\boldsymbol{e}_{y'}$, con $\boldsymbol{e}_z = \operatorname{sen}\varphi \boldsymbol{e}_{x'} + \cos\varphi \boldsymbol{e}_{z'}$ e quindi, espressa rispetto al sistema di riferimento solidale al corpo rigido, diventa

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\vartheta}\operatorname{sen}\varphi \boldsymbol{e}_{x'} - \dot{\varphi}\boldsymbol{e}_{y'} + \dot{\vartheta}\cos\varphi \boldsymbol{e}_{z'}.$$

Dopo qualche conto l'energia cinetica risulta

$$K = \frac{1}{2}\left(\left(4 - \frac{1}{3}\cos^2\varphi\right)m\ell^2\dot{\vartheta}^2 + \frac{3}{2}m\ell^2\cos\varphi\,\dot{\vartheta}\dot{\varphi} + \frac{m\ell^2}{3}\dot{\varphi}^2\right).$$

4. Determiniamo le pulsazioni delle piccole oscillazioni attorno alla posizione di equilibrio stabile $P_2(0,\pi)$. Calcoliamo

$$\det\left(\omega^2\mathsf{J}\left(\overline{\boldsymbol{q}}\right) + \mathcal{H}\left(\overline{\boldsymbol{q}}\right)\right) = 0,$$

con $\overline{\boldsymbol{q}} = (0,\pi)$:

$$\mathsf{J}\left(\boldsymbol{q}\right) = \begin{bmatrix} 4m\ell^2 - \dfrac{1}{3}m\ell^2\cos^2\varphi & \dfrac{3}{4}m\ell^2\cos\phi \\ \dfrac{3}{4}m\ell^2\cos\varphi & \dfrac{m\ell^2}{3} \end{bmatrix}$$

che calcolata in $(0,\pi)$ diventa

$$\mathsf{J}\left(\overline{\boldsymbol{q}}\right) = \begin{bmatrix} \dfrac{11}{3}m\ell^2 & -\dfrac{3}{4}m\ell^2 \\ -\dfrac{3}{4}m\ell^2 & \dfrac{m\ell^2}{3} \end{bmatrix};$$

avendo già calcolato l'hessiano nel primo punto, otteniamo

$$\det\begin{bmatrix} \dfrac{11}{3}m\ell^2\omega^2 - k\ell^2 & -\dfrac{3}{4}m\ell^2\omega^2 \\ -\dfrac{3}{4}m\ell^2\omega^2 & \dfrac{m\ell^2}{3}\omega^2 - \dfrac{1}{2}mg\ell \end{bmatrix} = 0,$$

che ci dà l'equazione

$$95m\ell\omega^4 - 24\,(11mg + 2k\ell)\,\omega^2 + 72gk = 0.$$

5. La quantità di moto del sistema è data da

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}_A + \boldsymbol{P}_Q = m\boldsymbol{v}_D + m\boldsymbol{v}_G;$$

le due velocità sono

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{v}_D =& -\ell\dot{\vartheta}\operatorname{sen}\vartheta\boldsymbol{e}_x + \ell\dot{\vartheta}\cos\vartheta\boldsymbol{e}_y,\\
\boldsymbol{v}_G =& \frac{\ell}{2}\left(-3\dot{\vartheta}\operatorname{sen}\vartheta - \dot{\varphi}\cos\varphi\operatorname{sen}\vartheta - \dot{\vartheta}\operatorname{sen}\varphi\cos\vartheta\right)\boldsymbol{e}_x +\\
&+\frac{\ell}{2}\left(3\dot{\vartheta}\cos\vartheta + \dot{\varphi}\cos\varphi\cos\vartheta - \dot{\vartheta}\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\vartheta\right)\boldsymbol{e}_y - \frac{\ell}{2}\dot{\varphi}\operatorname{sen}\varphi\boldsymbol{e}_z,
\end{aligned}$$

e quindi la quantità di moto è

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{P} =& -\frac{m\ell}{2}\left(5\dot{\vartheta}\operatorname{sen}\vartheta + \dot{\varphi}\cos\varphi\operatorname{sen}\vartheta + \dot{\vartheta}\operatorname{sen}\varphi\cos\vartheta\right)\boldsymbol{e}_x +\\
+&\frac{m\ell}{2}\left(5\dot{\vartheta}\cos\vartheta + \dot{\varphi}\cos\varphi\cos\vartheta - \dot{\vartheta}\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\vartheta\right)\boldsymbol{e}_y - \frac{m\ell}{2}\dot{\varphi}\operatorname{sen}\varphi\,\boldsymbol{e}_z.
\end{aligned}$$

2) Per ottenere una trasformazione canonica poniamo le parentesi di Poisson uguali a 1:

$$[Q,P] = \frac{\partial Q}{\partial q}\frac{\partial P}{\partial p} - \frac{\partial Q}{\partial p}\frac{\partial P}{\partial q} = 1$$

con

$$\frac{\partial Q}{\partial q} = 2qe^{-\frac{p}{kq}} + \frac{p}{k}e^{-\frac{p}{kq}}, \quad \frac{\partial Q}{\partial p} = -\frac{q}{k}e^{-\frac{p}{kq}}, \quad \frac{\partial P}{\partial q} = -\frac{p}{kq^2}e^{\frac{p}{kq}}, \quad \frac{\partial P}{\partial p} = \frac{1}{kq}e^{\frac{p}{kq}}\ ,$$

che ci fornisce subito $k = 2$.

La trasformazione, quindi, diventa

$$\begin{cases} Q = Q(q,p) = q^2e^{-\frac{p}{2q}} \\ P = P(q,p) = e^{\frac{p}{2q}} \end{cases}.$$

Troviamo ora una funzione generatrice $F(q,P)$:

$$p = \frac{\partial F}{\partial q} \qquad \text{e} \qquad Q = \frac{\partial F}{\partial P}$$

quindi $p = 2q\log P = \dfrac{\partial F}{\partial q}$, da cui si può ricavare $F(q,P) = q^2\log P + g(P)$. Inoltre

$$\frac{q^2}{P} + g'(P) = \frac{\partial F}{\partial P} = Q = q^2 e^{-\log P} = \frac{q^2}{P}$$

da cui, confrontando il primo e l'ultimo termine, risulta che $g'(P) = 0$ e quindi $g(P) = \text{costante}$. In definitiva

$$F(q, P) = q^2 \log P + \text{costante},$$

in particolare, scegliendo la costante $= 0$, troviamo

$$F(q, P) = q^2 \log P.$$

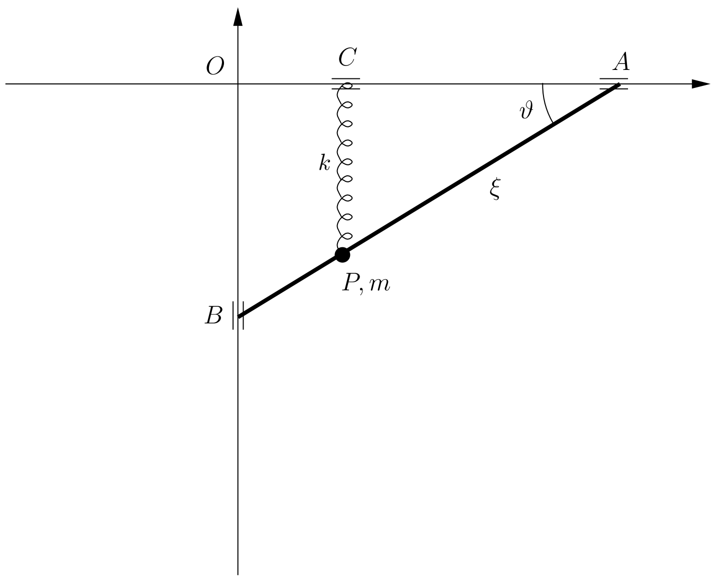
Prova scritta di Meccanica Analitica
Appello del 24 giugno 2016

1) Un'asta omogenea AB di massa m e lunghezza 2ℓ si muove in modo che l'estremo A scorra sull'asse orizzontale e l'estremo B sull'asse verticale di un sistema di riferimento piano verticale Oxy. Sull'asta AB scorre un punto materiale P di massa m.

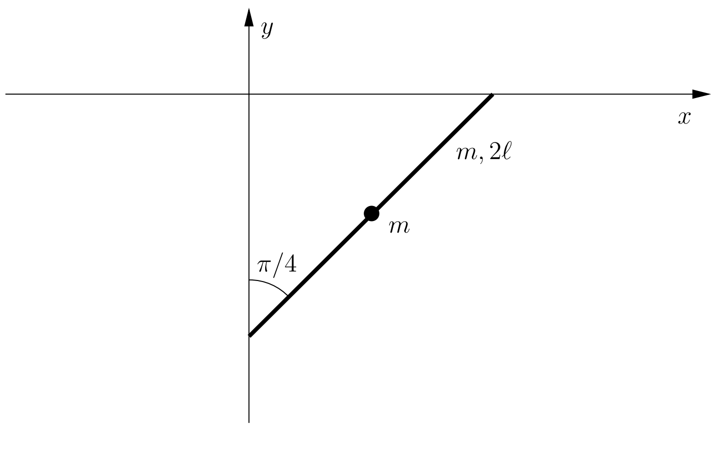
Sul punto P agisce una forza elastica sempre verticale di coefficiente $k > 0$ e polo sull'asse delle ascisse.

Il sistema è soggetto alla forza peso e tutti i vincoli sono lisci. Si chiede di:

1. trovare le posizioni di equilibrio del sistema e discuterne la stabilità;
2. trovare le posizioni di equilibrio di confine;
3. determinare la lagrangiana del sistema;
4. trovare le pulsazioni delle piccole oscillazioni attorno a una posizione di equilibrio stabile.



2) Si calcoli la matrice d'inerzia del corpo rigido formato da un'asta omogenea di massa m e lunghezza 2ℓ e un punto materiale di massa m nel suo baricentro, rispetto al sistema di riferimento indicato in figura.



Soluzione della prova scritta di Meccanica Analitica del 24 giugno 2016 a cura di Sara Mastaglio

1) I parametri lagrangiani, come suggerito dalla figura, sono $\xi := \overline{PA} \in [0, 2\ell]$ e $\vartheta := O\widehat{A}B \in [0, 2\pi)$. Le coordinate significative, posto G il baricentro dell'asta, sono

$$(G - O) = \ell \cos\vartheta \boldsymbol{e}_x - \ell \operatorname{sen}\vartheta \boldsymbol{e}_y,$$

$$(P - O) = (2\ell - \xi)\cos\vartheta \boldsymbol{e}_x - \xi \operatorname{sen}\vartheta \boldsymbol{e}_y,$$

$$(P - C) = -\xi \operatorname{sen}\vartheta \boldsymbol{e}_y.$$

Il potenziale è dato da

$$U = -mgy_P - mgy_G - \frac{k}{2}|P - C|^2 = mg\ell \operatorname{sen}\vartheta + mg\xi \operatorname{sen}\vartheta - \frac{k}{2}\xi^2 \operatorname{sen}^2\vartheta.$$

Le posizioni di equilibrio si trovano dal sistema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial \xi} = mg \operatorname{sen}\vartheta - k\xi \operatorname{sen}^2\vartheta = 0 \\ \dfrac{\partial U}{\partial \vartheta} = (mg\ell + mg\xi)\cos\vartheta - k\xi^2 \operatorname{sen}\vartheta \cos\vartheta = 0, \end{cases}$$

cioè

$$\begin{cases} \operatorname{sen}\vartheta\,(mg - k\xi \operatorname{sen}\vartheta) = 0 \\ \cos\vartheta\,((mg\ell + mg\xi) - k\xi^2 \operatorname{sen}\vartheta) = 0, \end{cases}$$

da cui si ricavano

- $\operatorname{sen}\vartheta = 0$ dà $\xi = -\ell$ che non è accettabile;
- $\cos\vartheta = 0$ e quindi $\vartheta = \dfrac{\pi}{2}$ per cui ottendiamo $\xi = \dfrac{mg}{k}$ che è accettabile solo se $\dfrac{mg}{k} < 2\ell$; per $\vartheta = \dfrac{3}{2}\pi$ otteniamo $\xi = -\dfrac{mg}{k}$, che essendo negativo non è accettabile;
- dalla prima delle due equazioni si ha $\xi \operatorname{sen}\vartheta = \dfrac{mg}{k}$ che sostituita nella seconda dà l'assurdo $mg\ell = 0$.

L'unica posizione di equilibrio è quindi $P\left(\dfrac{mg}{k};\dfrac{\pi}{2}\right)$ con $\dfrac{mg}{k}<2\ell$.
Valutiamo la stabilità di P. L'hessiano è costituito dagli elementi

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2}=-k\operatorname{sen}^2\vartheta,\quad \frac{\partial^2 U}{\partial \xi\partial\vartheta}=mg\cos\vartheta-2k\xi\operatorname{sen}\vartheta\cos\vartheta,\\
&\frac{\partial^2 U}{\partial \vartheta^2}=-(mg\ell+mg\xi)\operatorname{sen}\vartheta-k\xi^2\cos^2\vartheta+k\xi^2\operatorname{sen}^2\vartheta,
\end{aligned}$$

quindi l'hessiano calcolato in P è

$$\mathcal{H}(P)=\begin{bmatrix}-k & 0\\ 0 & -mg\ell\end{bmatrix}$$

che con due autovalori negativi ci dà una posizione di equilibrio stabile.
2) Le posizioni di confine si hanno per $\xi=0$ e $\xi=2\ell$.

- Per la posizione $\overline{P}_1(0,\overline{\vartheta})$ le velocità virtuali sono $w_\xi\geq 0$ e $w_\vartheta\in\mathbb{R}$, quindi si deve avere

$$\begin{cases}\dfrac{\partial U}{\partial \xi}\leq 0\\[2mm] \dfrac{\partial U}{\partial \vartheta}=0\end{cases}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}mg\operatorname{sen}\overline{\vartheta}\leq 0\\ mg\ell\cos\overline{\vartheta}=0\end{cases}$$

  che ci dà la soluzione $\overline{\vartheta}=\dfrac{3}{2}\pi$ e quindi la posizione di equilibrio di confine è $\overline{P}_1\left(0,\dfrac{3}{2}\pi\right)$.

- Per la posizione $\overline{P}_2(2\ell,\overline{\vartheta})$ le velocità virtuali sono $w_\xi\leq 0$ e $w_\vartheta\in\mathbb{R}$, quindi si deve avere

$$\begin{cases}\dfrac{\partial U}{\partial \xi}\geq 0\\[2mm] \dfrac{\partial U}{\partial \vartheta}=0\end{cases}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}\operatorname{sen}\overline{\vartheta}\left(mg-2k\ell\operatorname{sen}\overline{\vartheta}\right)\geq 0\\ \cos\overline{\vartheta}\left(3mg\ell-4k\ell^2\operatorname{sen}\overline{\vartheta}\right)=0\end{cases}$$

che ci dà come unica soluzione accettabile $\overline{\vartheta}=\dfrac{\pi}{2}$ con $k\leq\dfrac{mg}{2\ell}$ e quindi la posizione di equilibrio di confine è $\overline{P}_2\left(2\ell,\dfrac{\pi}{2}\right)$.
3) Per determinare la lagrangiana del sistema dobbiamo prima calcolare l'energia cinetica:

$$K=\frac{1}{2}mv_P^2+\frac{1}{2}mv_G^2+\frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}\cdot\mathsf{J}_G\boldsymbol{\omega}.$$

Calcoliamo le velocità:

$$\boldsymbol{v}_P=\left(-\dot{\xi}\cos\vartheta-(2\ell-\xi)\,\dot{\vartheta}\operatorname{sen}\vartheta\right)\boldsymbol{e}_x-\left(\dot{\xi}\operatorname{sen}\vartheta+\xi\dot{\vartheta}\cos\vartheta\right)\boldsymbol{e}_y$$

e quindi $v_P^2 = \dot\xi^2 + \xi^2\dot\vartheta^2 + 4\ell^2\dot\vartheta^2 \operatorname{sen}^2\vartheta + 4\ell\dot\xi\dot\vartheta \operatorname{sen}\vartheta\cos\vartheta - 4\ell\xi\dot\vartheta^2\operatorname{sen}^2\vartheta$,

$$\boldsymbol{v}_G = -\ell\dot\vartheta \operatorname{sen}\vartheta\,\boldsymbol{e}_x - \ell\dot\vartheta\cos\vartheta\,\boldsymbol{e}_y$$

e quindi $v_G^2 = \ell^2\dot\vartheta^2$; inoltre la velocità angolare è $\boldsymbol{\omega} = \dot\vartheta\boldsymbol{e}_z$ e l'unico momento d'inerzia che ci interessa è $J_G^{33} = \dfrac{m\ell^2}{3}$. L'energia cinetica risulta

$$K = \frac{1}{2}m\left(\dot\xi^2 + 4\ell\operatorname{sen}\vartheta\cos\vartheta\,\dot\xi\dot\vartheta + \left(\xi^2 + \frac{4}{3}\ell^2 + 4\ell^2\operatorname{sen}^2\vartheta - 4\ell\xi\operatorname{sen}^2\vartheta\right)\dot\vartheta^2\right).$$

Infine la lagrangina, che è data da $\mathcal{L} = K + U$, è

$$\begin{aligned}\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\dot\xi^2 + 2m\ell\operatorname{sen}\vartheta\cos\vartheta\,\dot\xi\dot\vartheta + \frac{1}{2}m\xi^2\dot\vartheta^2 + \frac{2}{3}m\ell^2\dot\vartheta^2 + \\ + 2m\ell^2\operatorname{sen}^2\vartheta\dot\vartheta^2 - 2m\ell\xi\operatorname{sen}^2\vartheta\dot\vartheta^2 + mg\ell\operatorname{sen}\vartheta + mg\xi\operatorname{sen}\vartheta - \frac{k}{2}\xi^2\operatorname{sen}^2\vartheta.\end{aligned}$$

4)La posizione di equilibrio stabile è $P\left(\dfrac{mg}{k}, \dfrac{\pi}{2}\right)$. Per determinare le pulsazioni delle piccole oscillazioni calcoliamo

$$\det\left(\omega^2\mathsf{J}\left(\overline{\boldsymbol{q}}\right) + \mathcal{H}\left(\overline{\boldsymbol{q}}\right)\right) = 0,$$

con $\overline{\boldsymbol{q}} = \left(\dfrac{mg}{k}, \dfrac{\pi}{2}\right)$. La matrice associata alla forma quadratica dell'energia cinetica è

$$\mathsf{J}\left(\boldsymbol{q}\right) = \begin{bmatrix} m & 2\ell\operatorname{sen}\vartheta\cos\vartheta \\ 2\ell\operatorname{sen}\vartheta\cos\vartheta & m\left(\xi^2 + \frac{4}{3}\ell^2 + 4\ell^2\operatorname{sen}^2\vartheta - 4\ell\xi\operatorname{sen}^2\vartheta\right)\end{bmatrix},$$

che calcolata nella pozione di equilibrio stabile diventa

$$\mathsf{J}\left(\overline{\boldsymbol{q}}\right) = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m\left(\frac{m^2g^2}{k^2} + \frac{16}{3}\ell^2 - \frac{4mg\ell}{k}\right)\end{bmatrix};$$

la matrice hessiana è stata calcolata in precedenza e quindi dopo aver calcolato il determinante e imposto che sia nullo, risulta che le pulsazioni delle piccole oscillazioni sono soluzioni dell'equazione

$$m\left(3m^2g^2 + 16k^2\ell^2 - 12mg\ell k\right)\omega^4 - \left(3m^2g^2k + 16k^3\ell^2 - 9mg\ell k^2\right)\omega^2 + 3k^3g\ell = 0.$$

2) Per determinare la matrice d'inerzia rispetto al sistema di riferimento $Oxyz$ dobbiamo prima calcolare la matrice d'inerzia baricentrale e spostarci in O con Huygens-Steiner. Pensiamo quindi al sistema di riferimento $Gx'y'z'$ con assi paralleli a x, y, z e centrato nel baricentro G del corpo

rigido. Per applicare Huygens-Steiner notiamo che il corpo rigido è costituito dall'asta e dal punto materiale entrambi di massa m, quindi l'intero corpo rigido ha massa $2m$ e otteniamo

$$\mathsf{J}_O = \mathsf{J}_G + 2m\left(d^2\mathsf{I} - \boldsymbol{d}\otimes\boldsymbol{d}\right).$$

L'asta è inclinata di $\pi/4$ rispetto agli assi x' e y' e quindi

$$J_G^{xx} = \frac{m(2\ell)^2}{12}\operatorname{sen}^2(\pi/4) = \frac{m\ell^2}{6}, \quad J_G^{yy} = \frac{m(2\ell^2)}{12}\cos^2(\pi/4) = \frac{m\ell^2}{6}, \quad J_G^{zz} = J_G^{xx} + J_G^{yy} = \frac{m\ell^2}{3},$$

$$J_G^{xy} = -\frac{m(2\ell)^2}{12}\operatorname{sen}(\pi/4)\cos(\pi/4) = -\frac{m\ell^2}{6}, \quad J_G^{xz} = J_G^{yz} = 0,$$

quindi

$$\mathsf{J}_G = \begin{bmatrix} \frac{m\ell^2}{6} & -\frac{m\ell^2}{6} & 0 \\ -\frac{m\ell^2}{6} & \frac{m\ell^2}{6} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m\ell^2}{3} \end{bmatrix}.$$

Ora ci serve la distanza

$$\boldsymbol{d} = (G-O) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\ell, -\frac{\sqrt{2}}{2}\ell, 0\right)$$

da cui $d^2 = \ell^2$ e

$$\boldsymbol{d}\otimes\boldsymbol{d} = \begin{bmatrix} \frac{\ell^2}{2} & -\frac{\ell^2}{2} & 0 \\ -\frac{\ell^2}{2} & \frac{\ell^2}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Infine otteniamo

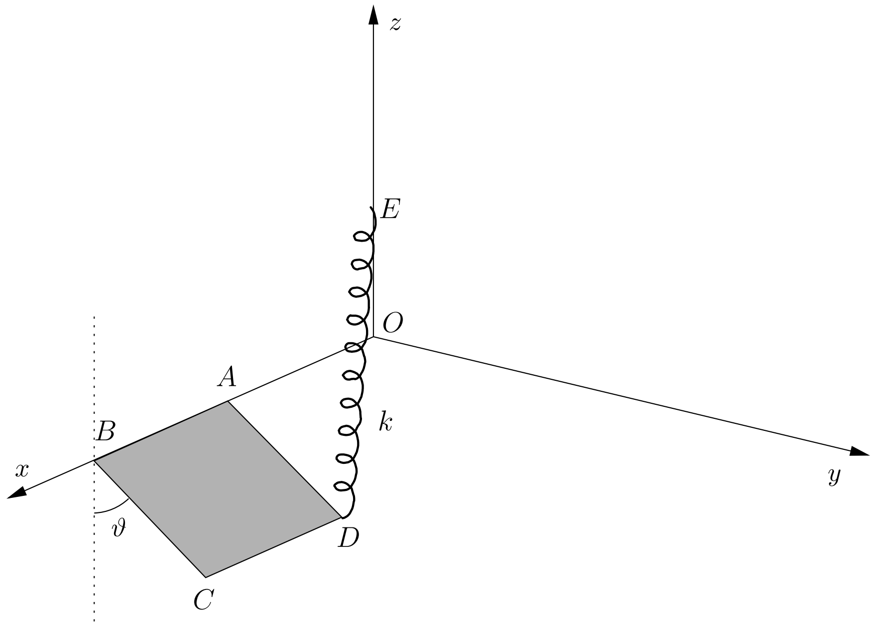
$$\mathsf{J}_O = \begin{bmatrix} \frac{m\ell^2}{6} & -\frac{m\ell^2}{6} & 0 \\ -\frac{m\ell^2}{6} & \frac{m\ell^2}{6} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m\ell^2}{3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} m\ell^2 & m\ell^2 & 0 \\ m\ell^2 & m\ell^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2m\ell^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{7}{6}m\ell^2 & \frac{5}{6}m\ell^2 & 0 \\ \frac{5}{6}m\ell^2 & \frac{7}{6}m\ell^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{7}{3}m\ell^2 \end{bmatrix}.$$

Prova scritta di Meccanica Analitica
Appello del 15 luglio 2016

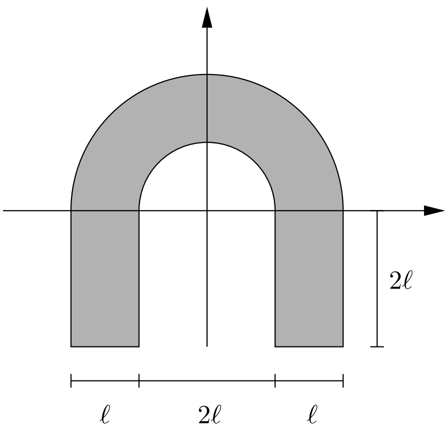
1) Una lamina quadrata omogenea $ABCD$ di massa m e lato ℓ si muove in modo che il lato AB scorra sull'asse x di un sistema di riferimento $Oxyz$. Sull'estremo D della lamina agisce una forza elastica di coefficiente $k > 0$ e polo il punto E di coordinate $(0, 0, \ell)$.

Il sistema è soggetto alla forza peso e tutti i vincoli sono lisci. Si chiede di:

1. trovare le posizioni di equilibrio del sistema;
2. discuterne la stabilità;
3. determinare la lagrangiana del sistema;
4. trovare le equazioni differenziali del moto linearizzate attorno a una posizione di equilibrio stabile.



2) Si trovi la posizione del baricentro della lamina omogenea indicata in figura, formata da due rettangoli di lati $2\ell, \ell$ e una corona semicircolare di raggi $2\ell, \ell$, nel sistema di riferimento indicato.



3) Si trovi la matrice d'inerzia della lamina dell'esercizio 2) nel sistema di riferimento indicato.

Soluzione della prova scritta di Meccanica Analitica del 15 luglio 2016 a cura di Sara Mastaglio

1) Uno dei parametri lagrangiani è già suggerito in figura, cioè $\vartheta := z^- \widehat{B}C \in [\,0, 2\pi\,)$, mentre come secondo parametro lagrangiano possiamo scegliere $\xi := \overline{AO} \in \mathbb{R}$.
Denotiamo con G il baricentro della lamina quadrata; per il seguito ci serviranno

$$z_G = -\frac{\ell}{2}\cos\vartheta$$

$$(D - E) = \xi \boldsymbol{e}_x + \ell \operatorname{sen}\vartheta \boldsymbol{e}_y - (\ell + \ell\cos\vartheta)\,\boldsymbol{e}_z$$

e dunque $|D - E|^2 = \xi^2 + 2\ell^2 + 2\ell^2\cos\vartheta$.
1. Il potenziale risulta

$$U = -mgz_G - \frac{k}{2}|D - E|^2 = \frac{1}{2}mg\ell\cos\vartheta - \frac{k}{2}\xi^2 - k\ell^2\cos\vartheta + c.$$

Le posizioni di equilibrio sono date dal sistema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial \xi} = -k\xi = 0 \\ \dfrac{\partial U}{\partial \vartheta} = \left(-\dfrac{1}{2}mg\ell + k\ell^2\right)\operatorname{sen}\vartheta = 0 \end{cases}$$

che ci dà $\xi = 0$ e $\operatorname{sen}\vartheta = 0$ da cui $\vartheta = 0, \pi$; le due posizioni di equilibrio sono quindi

$$P_1(0,0) \quad \text{e} \quad P_2(0,\pi).$$

2. Determiniamo l'hessiano:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} = -k, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \vartheta} = 0, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial \vartheta^2} = \left(-\frac{1}{2}mg\ell + k\ell^2\right)\cos\vartheta,$$

quindi, calcolato nelle posizioni di equilibrio, otteniamo

$$\mathcal{H}(P_1) = \begin{bmatrix} -k & 0 \\ 0 & -\dfrac{1}{2}mg\ell + k\ell^2 \end{bmatrix}$$

quindi P_1 è una posizione di equilibrio stabile se $\mathcal{H}(P_1)$ ha due autovalori negativi, quindi se $\frac{1}{2}mg\ell - k\ell^2 < 0$, cioè se $k < \dfrac{mg}{2\ell}$;

$$\mathcal{H}(P_2) = \begin{bmatrix} -k & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{2}mg\ell - k\ell^2 \end{bmatrix}$$

quindi P_2 è una posizione di equilibrio stabile se $k > \dfrac{mg}{2\ell}$.

3. Per determinare la lagrangiana del sistema dobbiamo prima calcolare l'energia cinetica, che in questo caso particolare, dato che la velocità di A si mantiene sempre parallela alla velocità angolare, possiamo scrivere come

$$K = \frac{1}{2} m v_A^2 + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathsf{J}_A \boldsymbol{\omega}$$

dove $\boldsymbol{\omega}$ è la velocità angolare della lamina quadrata e J_A è la matrice d'inerzia della lamina calcolata rispetto ad un sistema di riferimento centrato in A. La velocità di A è $\boldsymbol{v}_A = \dot{\xi} \boldsymbol{e}_x$, quindi $v_A^2 = \dot{\xi}^2$, mentre $\boldsymbol{\omega} = \dot{\vartheta} \boldsymbol{e}_x$ e la matrice d'inerzia è

$$\begin{bmatrix} \dfrac{m\ell^2}{3} & -\dfrac{m\ell^2}{4} & 0 \\ -\dfrac{m\ell^2}{4} & \dfrac{m\ell^2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{2}{3} m\ell^2 \end{bmatrix}.$$

L'energia cinetica, dopo qualche semplice conto, risulta

$$K = \frac{1}{2} m \dot{\xi}^2 + \frac{m\ell^2}{6} \dot{\vartheta}^2$$

e quindi la lagrangiana è data da

$$\mathcal{L} = U + K = \frac{1}{2} mg\ell \cos\vartheta - \frac{k}{2} \xi^2 - k\ell^2 \cos\vartheta + \frac{1}{2} m \dot{\xi}^2 + \frac{m\ell^2}{6} \dot{\vartheta}^2.$$

4. Determiniamo le equazioni del moto linearizzate attorno alla posizione $P_1(0,0)$, stabile per $k < mg/2\ell$. Calcoliamo la lagrangiana linearizzata

$$\widetilde{L} = \frac{1}{2} \dot{\boldsymbol{q}}^\mathsf{T} \mathsf{J}\left(\overline{\boldsymbol{q}}\right) \dot{\boldsymbol{q}} + \frac{1}{2} (\boldsymbol{q} - \overline{\boldsymbol{q}})^\mathsf{T} \mathcal{H}\left(\overline{\boldsymbol{q}}\right) (\boldsymbol{q} - \overline{\boldsymbol{q}})$$

con $\boldsymbol{q} = [\vartheta, \varphi]^\mathsf{T}$, $\dot{\boldsymbol{q}} = [\dot{\vartheta}, \dot{\varphi}]^\mathsf{T}$ e $\overline{\boldsymbol{q}} = [0,0]^\mathsf{T}$,

$$\mathsf{J}\left(\boldsymbol{q}\right) = \mathsf{J}(\overline{\boldsymbol{q}}) = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & \dfrac{m\ell^2}{3} \end{bmatrix};$$

avendo già calcolato $\mathcal{H}\left(\overline{\boldsymbol{q}}\right)$ in precedenza, la lagrangiana linearizzata risulta

$$\widetilde{L} = \frac{1}{2} m \dot{\xi}^2 + \frac{m\ell^2}{6} \dot{\vartheta}^2 - \frac{k}{2} \xi^2 + \frac{\ell}{4} \left(2k\ell - mg\right) \vartheta^2.$$

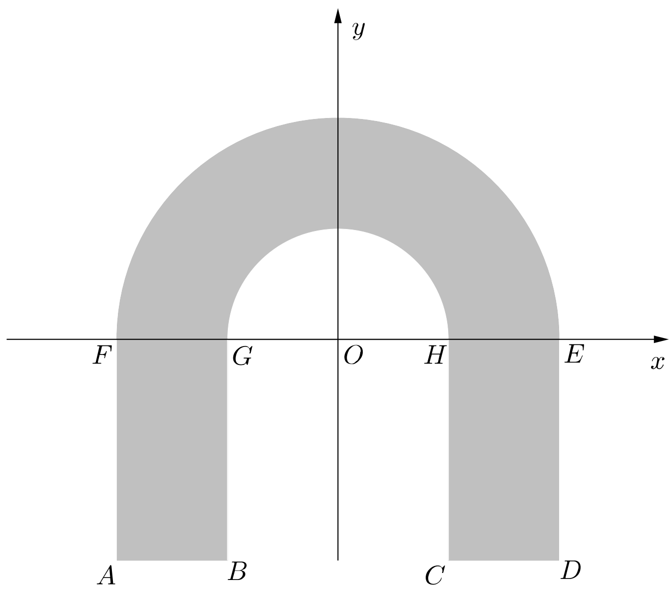
Andando a scrivere

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \widetilde{L}}{\partial \dot{\boldsymbol{q}}} = \frac{\partial \widetilde{L}}{\partial \boldsymbol{q}}$$

otteniamo le equazioni del moto linearizzate:

$$\begin{cases} \ddot{\xi} = -\dfrac{k}{m}\xi \\ \ddot{\vartheta} = \dfrac{3\,(2k\ell - mg)}{2m\ell}\vartheta. \end{cases}$$

2)



Con riferimento alla figura, indichiamo con $\mathcal{L}_1$ il rettangolo $ADEF$, con $\mathcal{L}_2$ il rettangolo $BCHG$, con $\mathcal{L}_3$ il semicerchio di raggio $\overline{OE}$ e con $\mathcal{L}_4$ quello di raggio $\overline{OH}$; in questo modo la lamina data $\mathcal{L}$ è ottenibile per additività (e sottrattività) come $\mathcal{L}_1 - \mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_3 - \mathcal{L}_4$.

Le masse delle quattro lamine, considerando che la lamina $\mathcal{L}$ è omogenea con densità costante ρ, sono

$$m_1 = \rho 8\ell^2,\ m_2 = \rho 4\ell^2,\ m_3 = \rho 2\pi\ell^2,\ m_4 = \rho\frac{\pi\ell^2}{2};$$

l'ascissa del baricentro di $\mathcal{L}$, per ragioni di simmetria, è chiaramente $\overline{x} = 0$, mentre le ordinate dei baricentri delle quattro lamine sono

$$y_1 = -\ell,\ y_2 = -\ell,\ y_3 = \frac{8\ell}{3\pi},\ y_4 = \frac{4\ell}{3\pi}.$$

L'ordinata del baricentro dell'intera lamina $\mathcal{L}$ è

$$\overline{y} = \frac{m_1 y_1 - m_2 y_2 + m_3 y_3 - m_4 y_4}{m}$$

dove la massa totale $m = m_1 - m_2 + m_3 - m_4$; quindi, dopo qualche conto, otteniamo

$$\overline{y} = \frac{4\ell}{3\,(8 + 3\pi)}.$$

Le coordinate del baricentro di $\mathcal{L}$ sono quindi

$$\left(0, \frac{4\ell}{3\,(8 + 3\pi)}\right).$$

3) Procediamo come nell'esercizio 2) sfruttando l'additività delle matrici d'inerzia. Come prima cosa indichiamo con m la massa totale, cioè

$$m = \rho \left(\frac{8 + 3\pi}{2}\right) \ell^2,$$

da cui si può ricavare la densità di massa

$$\rho = \frac{2m}{(8 + 3\pi)\,\ell^2};$$

dato che la densità di massa è la stessa per tutte e quattro le lamine che compongono $\mathcal{L}$ e avendo già calcolato le singole masse nel punto precedente, possiamo sostituire la ρ e ottenere le singole masse in dipedenza da m:

$$m_1 = \frac{16m}{8 + 3\pi},\ m_2 = \frac{8m}{8 + 3\pi},\ m_3 = \frac{4\pi m}{8 + 3\pi},\ m_4 = \frac{\pi m}{8 + 3\pi}.$$

Innanzitutto, per ragioni di simmetria di $\mathcal{L}$ rispetto al piano yz e poiché la lamina è piana, i prodotti d'inerzia sono tutti nulli e quindi la matrice d'inerzia che cerchiamo sarà del tipo

$$\mathsf{J}_O = \begin{bmatrix} J_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & J_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & J_{zz} \end{bmatrix}$$

con $J_{zz} = J_{xx} + J_{yy}$. Occupiamoci di J_{xx} che sarà dato da $J^1_{xx} - J^2_{xx} + J^3_{xx} - J^4_{xx}$, dove questi ultimi momenti d'inerzia sono tutti fatti rispetto al sistema di riferimento $Oxyz$:

$$J^1_{xx} = \frac{4}{3} m_1 \ell^2, \quad J^2_{xx} = \frac{4}{3} m_2 \ell^2, \quad J^3_{xx} = m_3 \ell^2, \quad J^4_{xx} = \frac{m_4 \ell^2}{4},$$

quindi

$$J_{xx} = \frac{4}{3}m_1\ell^2 - \frac{4}{3}m_2\ell^2 + m_3\ell^2 - \frac{m_4\ell^2}{4} = \frac{64m\ell^2}{3(8+3\pi)} - \frac{32m\ell^2}{3(8+3\pi)} + \frac{4\pi m\ell^2}{8+3\pi} - \frac{\pi m\ell^2}{4(8+3\pi)} = \frac{(128+45\pi)}{12(8+3\pi)}m\ell^2.$$

Analogamente J_{yy} sarà dato da $J_{yy}^1 - J_{yy}^2 + J_{yy}^3 - J_{yy}^4$ con

$$J_{yy}^1 = \frac{4}{3}m_1\ell^2, \quad J_{yy}^2 = \frac{m_2\ell^2}{3}, \quad J_{yy}^3 = m_3\ell^2, \quad J_{yy}^4 = \frac{m_4\ell^2}{4},$$

quindi

$$J_{yy} = \frac{4}{3}m_1\ell^2 - \frac{m_2\ell^2}{3} + m_3\ell^2 - \frac{m_4\ell^2}{4} = \frac{64m\ell^2}{3(8+3\pi)} - \frac{8m\ell^2}{3(8+3\pi)} + \frac{4\pi m\ell^2}{8+3\pi} - \frac{\pi m\ell^2}{4(8+3\pi)} = \frac{(224+45\pi)}{12(8+3\pi)}m\ell^2.$$

Infine

$$J_{zz} = J_{xx} + J_{yy} = \frac{(176+45\pi)}{6(8+3\pi)}m\ell^2,$$

quindi

$$\mathsf{J}_O = \frac{m\ell^2}{12(8+3\pi)} \begin{bmatrix} 128+45\pi & 0 & 0 \\ 0 & 224+45\pi & 0 \\ 0 & 0 & 352+90\pi \end{bmatrix}.$$

Prova scritta di Meccanica Analitica
Appello del 2 settembre 2016

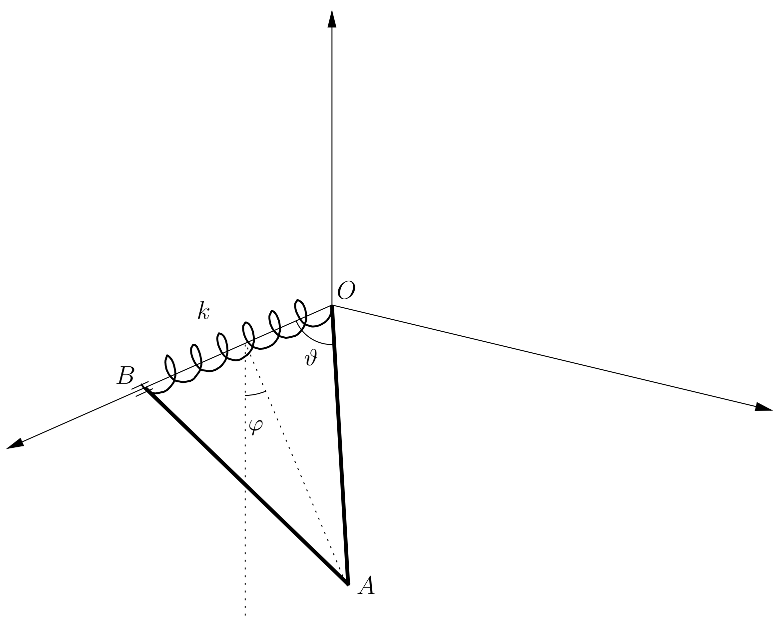
1) Un'asta omogenea OA di massa m e lunghezza 2ℓ è libera di ruotare attorno all'estremo O, fisso in un sistema di riferimento cartesiano $Oxyz$. Una seconda asta AB, identica alla prima, ha l'estremo A vincolato a quello della prima asta e l'estremo B che può scorrere sulla parte positiva dell'asse x.
Su tutto il sistema agisce la forza peso e sul punto B agisce una forza elastica di coefficiente $k > 0$ e polo il punto O.
Si chiede di:

A) trovare le posizioni di equilibrio ordinarie del sistema;

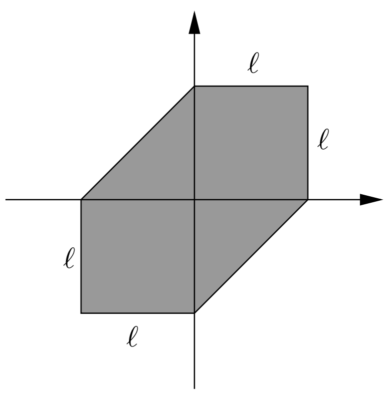
B) discuterne la stabilità delle posizioni di equilibrio ordinarie;

C) trovare le eventuali posizioni di equilibrio di confine;

D) determinare l'energia cinetica del sistema.



2) Si calcoli la matrice d'inerzia della lamina omogenea di massa m mostrata in figura rispetto al sistema di riferimento indicato (l'asse z è ortogonale al foglio).



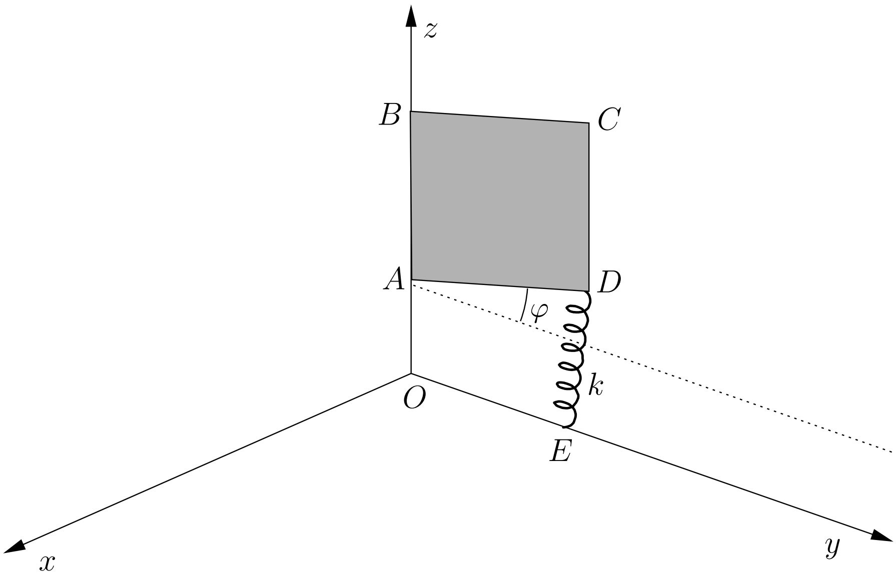
Prova scritta di Meccanica Analitica
Appello del 27 settembre 2016

1) Una lamina quadrata omogenea $ABCD$ di massa m e lato ℓ è libera di ruotare attorno al lato AB, che scorre sull'asse verticale di un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $Oxyz$.
Su tutto il sistema agisce la forza peso e sul punto D agisce una forza elastica di coefficiente $k > 0$ e polo il punto $E(0, \ell, 0)$.
Si chiede di:

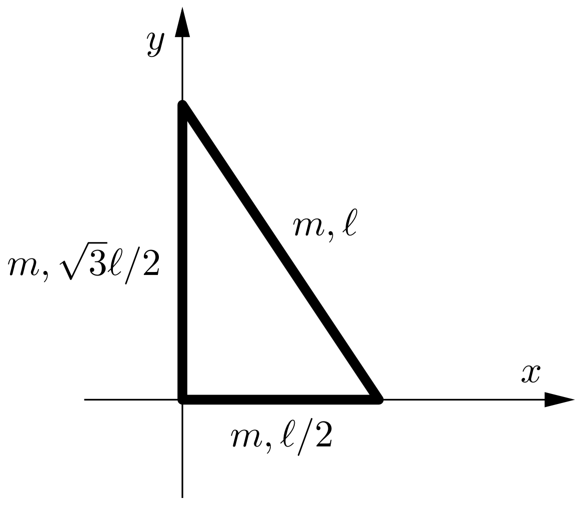
A) trovare le posizioni di equilibrio del sistema e discuterne la stabilità;

B) determinare le equazioni differenziali del moto;

C) scrivere le equazioni del moto linearizzate attorno a una posizione di equilibrio stabile.



2) Si calcoli la matrice d'inerzia della figura composta da tre aste omogenee, tutte di massa m, mostrata in figura rispetto al sistema di riferimento indicato (l'asse z è ortogonale al foglio).

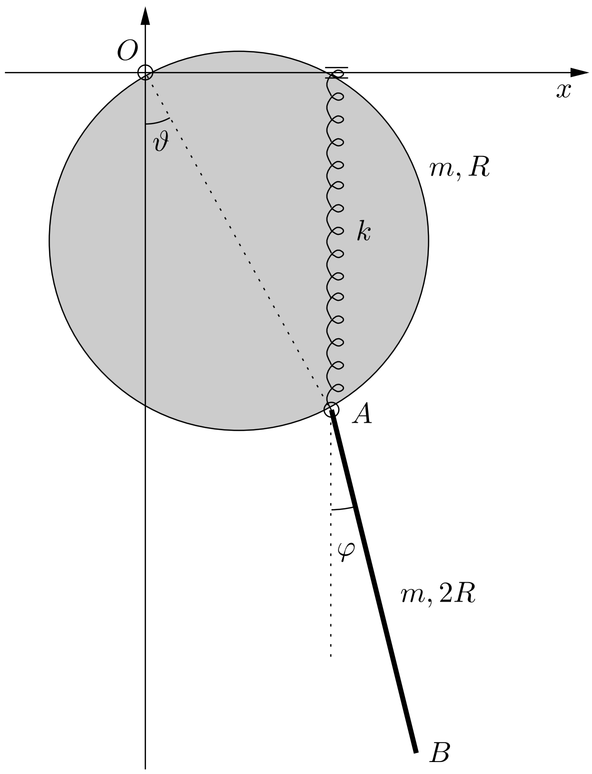


Prova scritta di Meccanica Analitica
Appello del 17 febbraio 2017

1) Una lamina circolare omogenea di massa m e raggio R è libera di ruotare attorno al suo vertice fisso O che è l'origine di un riferimento cartesiano ortogonale Oxy. Al punto A sul bordo della lamina diametralmente opposto ad O è agganciato l'estremo di un'asta omogenea AB di massa m e lunghezza $2R$, che può ruotare liberamente attorno a A.

Su tutto il sistema agisce la forza peso e sul punto A agisce una forza elastica sempre verticale di coefficiente $k > 0$ e polo sull'asse x. Supposti i vincoli lisci, si chiede di:

1. trovare le posizioni di equilibrio ordinarie del sistema;
2. discuterne la stabilità;
3. determinare l'energia cinetica del sistema.
4. scrivere la lagrangiana approssimata attorno a una posizione di equilibrio stabile.



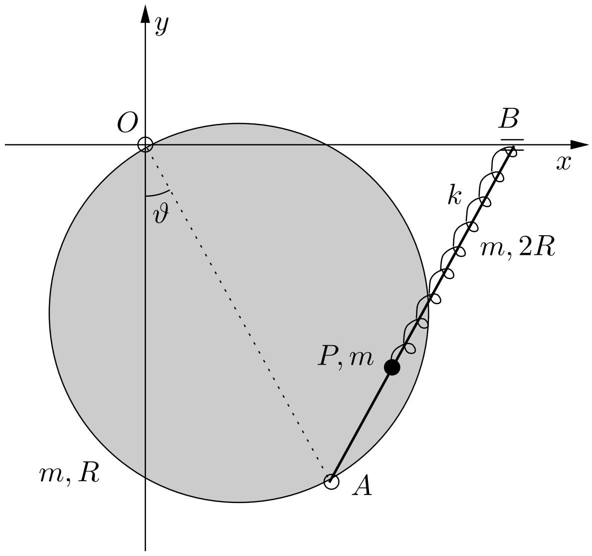
2) In una lamina rettangolare omogenea di lati $a < b$ è praticato un foro circolare nel centro, di raggio $a/2$. Sapendo che la massa della parte rimanente vale m, se ne calcoli la matrice d'inerzia rispetto a un sistema di riferimento baricentrale opportuno.

Prova scritta di Meccanica Analitica
Appello del 9 giugno 2017

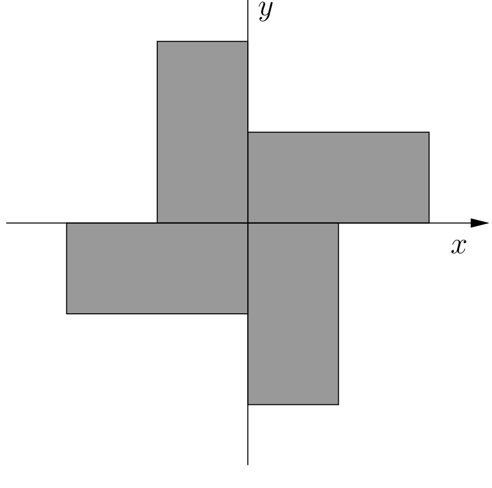
1) Una lamina circolare omogenea di massa m e raggio R è libera di ruotare attorno al suo vertice fisso O che è l'origine di un riferimento cartesiano ortogonale Oxy. Al punto A sul bordo della lamina diametralmente opposto ad O è agganciato l'estremo di un'asta omogenea AB di massa m e lunghezza $2R$, che può ruotare attorno a A. L'estremo B dell'asta è vincolato a scorrere sull'asse x. Inoltre, sull'asta AB scorre un punto materiale P di massa m.

Su tutto il sistema agisce la forza peso e tra il punto P e l'estremo B dell'asta intercorre una forza elastica di coefficiente $k > 0$. Supposti i vincoli lisci, si chiede di:

1. trovare le posizioni di equilibrio ordinarie del sistema e discuterne la stabilità in funzione del parametro meccanico $\lambda = \dfrac{mg}{kR}$;
2. trovare le posizioni di equilibrio di confine;
3. determinare l'energia cinetica del sistema;
4. scrivere la lagrangiana approssimata attorno a una posizione di equilibrio stabile.



2) Una lamina piana omogenea è formata da quattro rettangoli di lati $a, 2a$ disposti come in figura. Sapendo che la massa di ogni rettangolo vale m, se ne calcoli la matrice d'inerzia rispetto al sistema di riferimento indicato.



Soluzione della prova scritta di Meccanica Analitica del 9 giugno 2017 a cura di Sara Mastaglio

1) Un parametro lagrangiano è già fornito dall'esercizio, cioè $\vartheta \in [0, 2\pi]$, mentre come secondo parametro lagrangiano possiamo scegliere $\xi := \overline{PB} \in [0, 2R]$, dove le posizioni $\xi = 0$ e $\xi = 2R$ sono di confine.
Chiamiamo poi C il baricentro del disco, G il baricentro dell'asta e scriviamo i vettori posizione

$$\begin{aligned}
(C-O) &= R \operatorname{sen}\vartheta \boldsymbol{e}_x - R\cos\vartheta \boldsymbol{e}_y, \\
(G-O) &= 3R \operatorname{sen}\vartheta \boldsymbol{e}_x - R\cos\vartheta \boldsymbol{e}_y, \\
(P-O) &= (4R-\xi) \operatorname{sen}\vartheta \boldsymbol{e}_x - \xi\cos\vartheta \boldsymbol{e}_y.
\end{aligned}$$

1. Il potenziale è dato dalla somma del potenziale delle forze peso del disco, dell'asta e del punto e dal potenziale della forza elastica:

$$\begin{aligned}
U = U_{disco} + U_{asta} + U_P + U_{el} &= -mgy_C - mgy_G - mgy_P - \frac{k}{2}|P-B|^2 = \\
&= -mg(-R\cos\vartheta) - mg(-R\cos\vartheta) - mg(-\xi\cos\vartheta) - \frac{k}{2}\xi^2 = \\
&= 2mgR\cos\vartheta + mg\xi\cos\vartheta - \frac{k}{2}\xi^2 + c.
\end{aligned}$$

Troviamo le posizioni di equilibrio:

$$\begin{cases}
\dfrac{\partial U}{\partial \xi} = mg\cos\vartheta - k\xi = 0 \\
\dfrac{\partial U}{\partial \vartheta} = -2mgR\operatorname{sen}\vartheta - mg\xi\operatorname{sen}\vartheta = 0;
\end{cases}$$

dalla prima equazione ricaviamo $\xi := \frac{mg}{k}\cos\vartheta$ che sostituita nella seconda equazione dà

$$mg\operatorname{sen}\vartheta\left(2R + \frac{mg}{k}\cos\vartheta\right) = 0$$

da cui $\operatorname{sen}\vartheta = 0$ e $\cos\vartheta_3 = -\frac{2kR}{mg}$; dalla prima equazione ricaviamo $\vartheta_1 = 0$ e $\vartheta_2 = \pi$ a cui corrispondono $\xi_1 = \frac{mg}{k}$ e $\xi_2 = -\frac{mg}{k}$, che essendo negativa non è accettabile; notiamo che affinché ξ_1 sia accettabile deve valere la condizione $\frac{mg}{k} < 2R$, cioè $\lambda < 2$. Infine, utilizzando la seconda equazione troviamo $\xi_3 = -2R$, che essendo negativo non è accettabile. L'unica posizione di equilibrio ordinaria è dunque

$$P\left(\frac{mg}{k}, 0\right).$$

Calcoliamo ora l'hessiano:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} = -k, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \vartheta} = -mg \operatorname{sen} \vartheta, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial \vartheta^2} = -2mgR \cos \vartheta - mg\xi \cos \vartheta$$

che calcolato in P è

$$\mathcal{H}(P) = \begin{bmatrix} -k & 0 \\ 0 & -2mg - \dfrac{m^2 g^2}{k} \end{bmatrix};$$

dato che $\mathcal{H}(P)$ ha due autovalori negativi, P è una posizione di equilibrio stabile.

2. Cerchiamo le posizioni di confine $\overline{P}_1\left(0, \overline{\vartheta}_1\right)$ e $\overline{P}_2\left(2R, \overline{\vartheta}_2\right)$.

Per quanto riguarda $\overline{P}_1$ le velocità virtuali sono $w_\xi \geq 0$ e $w_\vartheta \in \mathbb{R}$, quindi si dovrà avere

$$\begin{cases} \left.\dfrac{\partial U}{\partial \xi}\right|_{\overline{P}_1} = mg \cos \overline{\vartheta}_1 \leq 0 \\ \left.\dfrac{\partial U}{\partial \vartheta}\right|_{\overline{P}_1} = -2mgR \operatorname{sen} \overline{\vartheta}_1 = 0 \end{cases};$$

tale sistema ha come unica soluzione accettabile $\overline{P}_1(0, \pi)$.

Nel caso di $\overline{P}_2$ le velocità virtuali sono $w_\xi \leq 0$ e $w_\vartheta \in \mathbb{R}$, quindi si dovrà avere

$$\begin{cases} \left.\dfrac{\partial U}{\partial \xi}\right|_{\overline{P}_2} = mg \cos \overline{\vartheta}_2 - 2kR \geq 0 \\ \left.\dfrac{\partial U}{\partial \vartheta}\right|_{\overline{P}_2} = -2mgR \operatorname{sen} \overline{\vartheta}_2 - 2mgR \operatorname{sen} \overline{\vartheta}_2 = 0 \end{cases};$$

tale sistema ci dà come unica soluzione accettabile $\overline{\vartheta} = 0$ con la condizione $\lambda \geq 2$, quindi la posizone di confine è $\overline{P}_2(2R, 0)$ se $\lambda \geq 2$.

3. L'energia cinetica è data dalla somma delle energie cinetiche di disco, asta e punto:

$$K = K_{disco} + K_{asta} + K_P.$$

Le velocità angolari sono $\boldsymbol{\omega}_{disco} = \dot{\vartheta} \boldsymbol{e}_z$ mentre $\boldsymbol{\omega}_{asta} = -\dot{\vartheta} \boldsymbol{e}_z$; le velocità sono

$$\boldsymbol{v}_G = 3R\dot{\vartheta} \cos \vartheta \boldsymbol{e}_x + R\dot{\vartheta} \operatorname{sen} \vartheta \boldsymbol{e}_y,$$

$$\boldsymbol{v}_P = \left(-\dot{\xi} \operatorname{sen} \vartheta + (4R - \xi)\dot{\vartheta} \cos \vartheta\right) \boldsymbol{e}_x + \left(-\dot{\xi} \cos \vartheta + \xi \dot{\vartheta} \operatorname{sen} \vartheta\right) \boldsymbol{e}_y.$$

I tre contributi dell'energia cinetica, tenendo conto che O è un punto fisso per il disco, sono

$$K_{disco} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}_{disco} \cdot \mathsf{J}_O \boldsymbol{\omega}_{disco} = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} mR^2 \dot{\vartheta}^2\right),$$

$$K_{asta} = \frac{1}{2}mv_G^2 + \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}_{asta}\cdot \mathsf{J}_G\boldsymbol{\omega}_{asta} = \frac{1}{2}\left(9R^2\dot\vartheta^2\cos^2\vartheta + R^2\dot\vartheta^2\operatorname{sen}^2\vartheta\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{m(2R)^2}{12}\dot\vartheta^2\right),$$

$$K_P = \frac{1}{2}mv_P^2 = \frac{1}{2}\Big(\dot\xi^2\operatorname{sen}^2\vartheta + (4R-\xi)^2\dot\vartheta^2\cos^2\vartheta + \dot\xi^2\cos^2\vartheta + \xi^2\dot\vartheta^2\operatorname{sen}^2\vartheta + \\ -2(4R-\xi)\dot\xi\dot\vartheta\operatorname{sen}\vartheta\cos\vartheta - 2\xi\dot\xi\dot\vartheta\operatorname{sen}\vartheta\cos\vartheta\Big),$$

che sommati, dopo qualche conto, danno

$$K = \frac{1}{2}\left(\frac{17}{6}mR^2\dot\vartheta^2 + 24mR^2\dot\vartheta^2\cos^2\vartheta + m\dot\xi^2 + \xi^2\dot\vartheta^2 - 8mR\xi\dot\vartheta^2\cos^2\vartheta - 8mR\dot\xi\dot\vartheta\operatorname{sen}\vartheta\cos\vartheta\right).$$

4. La lagrangiana linearizzata si ottiene da

$$\widetilde{\mathcal{L}} = \frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{q}}^{\mathsf{T}}\mathsf{J}\left(\overline{\boldsymbol{q}}\right)\dot{\boldsymbol{q}} + \frac{1}{2}(\boldsymbol{q}-\overline{\boldsymbol{q}})^{\mathsf{T}}\mathcal{H}\left(\overline{\boldsymbol{q}}\right)(\boldsymbol{q}-\overline{\boldsymbol{q}})$$

con $\boldsymbol{q} = [\xi,\vartheta]^{\mathsf{T}}$, $\dot{\boldsymbol{q}} = [\dot\xi,\dot\vartheta]^{\mathsf{T}}$ e $\overline{\boldsymbol{q}} = \left[\frac{mg}{k},0\right]^{\mathsf{T}}$ con $\lambda < 2$,

$$\mathsf{J}\left(\boldsymbol{q}\right) = \begin{bmatrix} m & -4mR\operatorname{sen}\vartheta\cos\vartheta \\ -4R\operatorname{sen}\vartheta\cos\vartheta & \frac{17}{6}mR^2 + 24mR^2\cos^2\vartheta + \xi^2 - 8mR\xi\cos^2\vartheta \end{bmatrix}$$

e quindi

$$\mathsf{J}\left(\overline{\boldsymbol{q}}\right) = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & \frac{161}{6}mR^2 + \frac{m^2g^2}{k} - 8\frac{m^2gR}{k} \end{bmatrix}.$$

Avendo già calcolato $\mathcal{H}\left(\overline{\boldsymbol{q}}\right)$ in precedenza, la lagrangiana linearizzata risulta, dopo qualche conto,

$$\widetilde{L} = \frac{1}{2}\left(-k\xi^2 - \frac{mg}{k} + 2mg\xi - 2mg\vartheta^2 - \frac{m^2g^2}{k}\vartheta^2 + m\dot\xi^2 + \frac{161}{6}mR^2\dot\vartheta^2 + \frac{m^2g^2}{k}\dot\vartheta^2 - 8\frac{m^2gR}{k}\vartheta^2\right).$$

2) La matrice richiesta è data dalla somma delle matrici dei quattro rettangoli, cioè

$$\mathsf{J}_O = \mathsf{J}_O^1 + \mathsf{J}_O^2 + \mathsf{J}_O^3 + \mathsf{J}_O^4,$$

dove la numerazione delle matrici d'inerzia si riferisce ai rettangoli che si trovano rispettivamente nel 1°, 2°, 3° e 4° quadrante.

Essendo una lamina piana possiamo subito dedurre che $J_{13} = J_{23} = 0$. Possiamo anche osservare che

$$J_{12}^1 = J_{12}^3 = -\frac{ma^2}{2},$$

mentre

$$J_{12}^2 = J_{12}^4 = \frac{ma^2}{2}$$

e quindi

$$J_{12} = J_{12}^{1} + J_{12}^{2} + J_{12}^{3} + J_{12}^{4} = 0.$$

Gli altri momenti d'inerzia sono:

$$J_{11}^{1} = J_{11}^{3} = \frac{ma^2}{3}, \qquad J_{22}^{1} = J_{22}^{3} = \frac{4}{3}ma^2,$$

$$J_{11}^{2} = J_{11}^{4} = \frac{4}{3}ma^2, \qquad J_{22}^{2} = J_{22}^{4} = \frac{ma^2}{3},$$

quindi

$$J_{11} = J_{11}^{1} + J_{11}^{2} + J_{11}^{3} + J_{11}^{4} = \frac{10}{3}ma^2$$

$$J_{22} = J_{22}^{1} + J_{22}^{2} + J_{22}^{3} + J_{22}^{4} = \frac{10}{3}ma^2$$

ed infine

$$J_{33} = J_{11} + J_{22} = \frac{10}{3}ma^2 + \frac{10}{3}ma^2 = \frac{20}{3}ma^2,$$

da cui

$$\mathsf{J}_O = \begin{bmatrix} \frac{10}{3}ma^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{10}{3}ma^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{20}{3}ma^2 \end{bmatrix}.$$

Dalla matrice trovata si può dedurre che la lamina ha una struttura giroscopica.

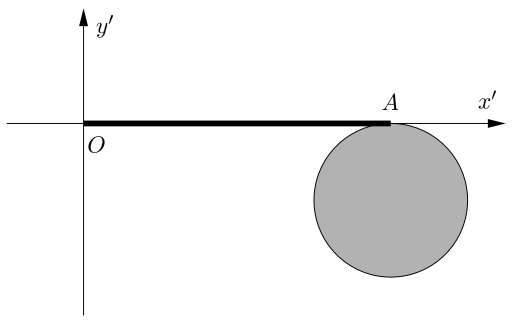
Prova scritta di Meccanica Analitica
Appello del 30 giugno 2017

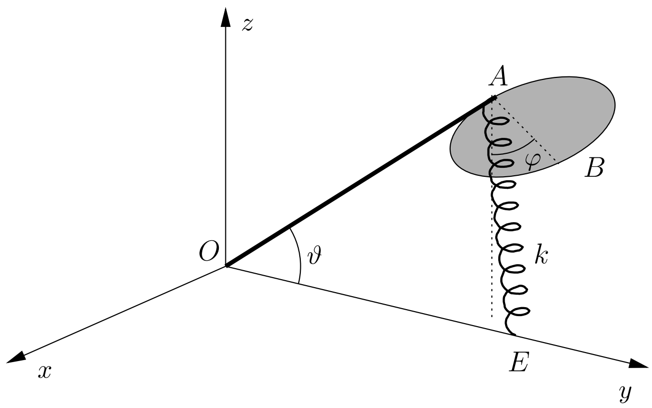
1) Un corpo rigido **piano** è formato da un'asta omogenea OA di massa m e lunghezza $4R$ al cui estremo A è saldato il bordo di una lamina circolare omogenea di massa m e raggio R. Il corpo si muove in modo che l'asta OA stia nel piano verticale yz di un sistema di riferimento $Oxyz$ e il punto O sia fisso nell'origine.

Sul punto A agisce una forza elastica di coefficiente $k > 0$ e polo il punto E di coordinate $(0, 4R, 0)$.

Il sistema è soggetto alla forza peso e tutti i vincoli sono lisci. Posto $\lambda = \frac{mg}{kR}$ si chiede di:

1. trovare la matrice d'inerzia del corpo rigido nel sistema indicato nella prima figura;
2. trovare le posizioni di equilibrio del sistema e discuterne la stabilità;
3. determinare la lagrangiana del sistema.

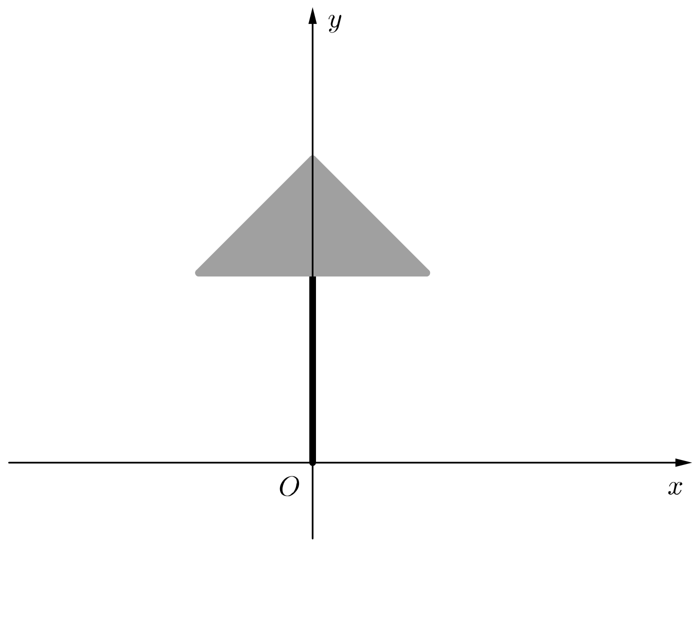




2) Una lamina piana è formata da un'asta lunga ℓ e con densità del tipo

$$\rho(y) = \rho y^n, \ \ \rho \in \mathbb{R}$$

e da una lamina triangolare omogenea con base ℓ e altezza $\ell/2$. Sapendo che entrambe le lamine hanno massa m e che l'ordinata del baricentro dell'asta è $4\ell/5$, si calcoli la matrice d'inerzia del corpo rigido rispetto al sistema di riferimento indicato.



Soluzione della prova scritta di Meccanica Analitica del 30 giugno 2017 a cura di Sara Mastaglio

1) Denotiamo con G il baricentro dell'asta e con C il centro del disco.

1. Per determinare la matrice d'inerzia richiesta dovremo sommare le matrici d'inerzia dell'asta e del disco, ognuna rispetto al sistema di riferimento $Oxyz$.

Quella dell'asta, tenendo conto che è lunga $4R$, è

$$\mathsf{J}_O^{asta} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{16}{3}mR^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{16}{3}mR^2 \end{bmatrix}.$$

Occupiamoci ora della matrice d'inerzia del disco. Rispetto al suo baricentro la matrice è

$$\mathsf{J}_C^{disco} = \begin{bmatrix} \frac{mR^2}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{mR^2}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{mR^2}{2} \end{bmatrix}.$$

Dobbiamo quindi spostarci nel polo O utilizzando la formula di Huygens-Steiner. Abbiamo che

$$\boldsymbol{d} = (C - O) = (4R, -R, 0)$$

e quindi $d^2 = 17R^2$; applicando la formula otteniamo

$$\mathsf{J}_O^{disco} = \mathsf{J}_C^{disco} + m\left(d^2\mathsf{I} - \boldsymbol{d} \otimes \boldsymbol{d}\right) =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{mR^2}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{mR^2}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{mR^2}{2} \end{bmatrix} + m\left(\begin{bmatrix} 17R^2 & 0 & 0 \\ 0 & 17R^2 & 0 \\ 0 & 0 & 17R^2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 16R^2 & -4R^2 & 0 \\ -4R^2 & R^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right).$$

Quindi

$$\mathsf{J}_O^{disco} = \begin{bmatrix} \frac{5}{4}mR^2 & 4mR^2 & 0 \\ 4mR^2 & \frac{65}{4}mR^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{35}{2}mR^2 \end{bmatrix}.$$

Infine

$$\mathsf{J}_O = \mathsf{J}_O^{asta} + \mathsf{J}_O^{disco} = \begin{bmatrix} \frac{5}{4}mR^2 & 4mR^2 & 0 \\ 4mR^2 & \frac{259}{12}mR^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{137}{6}mR^2 \end{bmatrix}.$$

2. Innanzitutto determiniamo le quote dei baricentri:

$$z_G = 2R\operatorname{sen}\vartheta,$$

$$z_C = 4R\operatorname{sen}\vartheta - R\cos\varphi\cos\vartheta$$

e il vettore

$$(A - E) = 4R(\cos\vartheta - 1)\boldsymbol{e}_y + 4R\operatorname{sen}\vartheta\boldsymbol{e}_z,$$

da cui $|A - E|^2 = 32R^2 - 32R^2\cos\vartheta$.

Il potenziale è quindi dato da

$$U = -mgz_G - mgz_C - \frac{k}{2}|A - E|^2 = -6mgR\operatorname{sen}\vartheta + mgR\cos\varphi\cos\vartheta + 16kR^2\cos\vartheta + c$$

da cui

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial\vartheta} = -6mgR\cos\vartheta - mgR\cos\varphi\operatorname{sen}\vartheta - 16kR^2\operatorname{sen}\vartheta = 0 \\ \dfrac{\partial U}{\partial\varphi} = -mgR\operatorname{sen}\varphi\cos\vartheta = 0; \end{cases}$$

andando a risolvere il sistema si trovano le posizioni di equilibrio

$$\begin{gathered} P_1\left(\frac{\pi}{2}; \arccos\left(-\frac{16}{\lambda}\right)\right), \quad P_2\left(\frac{\pi}{2}; -\arccos\left(-\frac{16}{\lambda}\right)\right), \\ P_3\left(\frac{3}{2}\pi; \arccos\left(-\frac{16}{\lambda}\right)\right), \quad P_4\left(\frac{3}{2}\pi; -\arccos\left(-\frac{16}{\lambda}\right)\right), \\ P_5\left(\operatorname{arctg}\left(-\frac{6\lambda}{16+\lambda}\right); 0\right), \quad P_6\left(\pi + \operatorname{arctg}\left(-\frac{6\lambda}{16+\lambda}\right); 0\right), \\ P_7\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{6\lambda}{\lambda-16}\right); \pi\right), \quad P_8\left(\pi + \operatorname{arctg}\left(\frac{6\lambda}{\lambda-16}\right); \pi\right), \end{gathered}$$

con $P_1,\ P_2,\ P_3,\ P_4$ valide se $\lambda > 16$.

Calcoliamo la matrice hessiana per discuterne la stabilità:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial\vartheta^2} = 6mgR\operatorname{sen}\vartheta - mgR\cos\varphi\cos\vartheta - 16kR^2\cos\vartheta,$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial\vartheta\partial\varphi} = mgR \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\vartheta, \qquad \frac{\partial^2 U}{\partial\varphi^2} = -mgR\cos\varphi\cos\vartheta,$$

da cui, valutando l'hessiano nelle varie posizioni di equilibrio, troviamo

$$\mathcal{H}(P_1) = \begin{bmatrix} 6mgR & mgR\sqrt{1-\left(-\frac{16}{\lambda}\right)^2} \\ mgR\sqrt{1-\left(-\frac{16}{\lambda}\right)^2} & 0 \end{bmatrix}$$

quindi P_1 è instabile dato che la traccia è positiva;

$$\mathcal{H}(P_2) = \begin{bmatrix} 6mgR & -mgR\sqrt{1-\left(-\frac{16}{\lambda}\right)^2} \\ -mgR\sqrt{1-\left(-\frac{16}{\lambda}\right)^2} & 0 \end{bmatrix}$$

quindi P_2 è instabile dato che la traccia è positiva;

$$\mathcal{H}(P_3) = \begin{bmatrix} -6mgR & -mgR\sqrt{1-\left(-\frac{16}{\lambda}\right)^2} \\ -mgR\sqrt{1-\left(-\frac{16}{\lambda}\right)^2} & 0 \end{bmatrix}$$

quindi P_3 è instabile dato che il determinante è negativo;

$$\mathcal{H}(P_4) = \begin{bmatrix} -6mgR & mgR\sqrt{1-\left(-\frac{16}{\lambda}\right)^2} \\ mgR\sqrt{1-\left(-\frac{16}{\lambda}\right)^2} & 0 \end{bmatrix}$$

quindi P_4 è instabile dato che il determinante è negativo; posto

$$\gamma := \frac{1}{\sqrt{1+\left(-\frac{6\lambda}{16+\lambda}\right)^2}} > 0,$$

risulta

$$\mathcal{H}(P_5) = \gamma \begin{bmatrix} -\frac{36mgR\lambda}{16+\lambda} - mgR - 16kR^2 & 0 \\ 0 & -mgR \end{bmatrix}$$

e, dato che gli autovalori sono entrambi negativi, P_5 è stabile;

$$\mathcal{H}(P_6) = \gamma \begin{bmatrix} \dfrac{36mgR\lambda}{16+\lambda} + mgR + 16kR^2 & 0 \\ 0 & mgR \end{bmatrix}$$

e, dato che gli autovalori sono entrambi positivi, P_6 è instabile; posto

$$\delta := \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\dfrac{6\lambda}{\lambda - 16}\right)^2}} > 0,$$

risulta, nel caso $\lambda > 16$,

$$\mathcal{H}(P_7) = \delta \begin{bmatrix} \dfrac{36mgR\lambda}{\lambda - 16} + mgR - 16kR^2 & 0 \\ 0 & mgR \end{bmatrix}$$

e, dato che almeno un autovalore è positivo, P_7 è instabile; il caso $\lambda < 16$ è del tutto analogo; nel caso $\lambda > 16$

$$\mathcal{H}(P_8) = \delta \begin{bmatrix} -\dfrac{36mgR\lambda}{\lambda - 16} - mgR + 16kR^2 & 0 \\ 0 & -mgR \end{bmatrix}$$

e, dato che $-\dfrac{36mgR\lambda}{\lambda - 16} - mgR + 16kR^0$ è una quantità sempre negativa e quindi entrambi gli autovalori sono negativi, P_8 è stabile; nel caso $\lambda < 16$

$$\mathcal{H}(P_8) = \delta \begin{bmatrix} -\dfrac{36mgR\lambda}{\lambda - 16} - mgR + 16kR^2 & 0 \\ 0 & -mgR \end{bmatrix}$$

e, dato $-\dfrac{36mgR\lambda}{\lambda - 16} - mgR + 16kR^2$ è una quantità sempre positiva, gli autovalori sono uno positivo e uno negativo, quindi P_8 è instabile.

3. Per calcolare la lagrangiana dobbiamo prima calcolare l'energia cinetica. Dato che O è un punto fisso per il corpo rigido, possiamo calcolare l'energia cinetica proprio in O:

$$K = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega} \cdot \mathsf{J}_O \boldsymbol{\omega},$$

dove J_O è la matrice d'inerzia calcolata nel punto 1. rispetto ad un sistema di riferimento solidale con il corpo rigido e centrato in O, mentre $\boldsymbol{\omega}$ è la velocità angolare, data da

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\vartheta}\boldsymbol{e}_x - \dot{\varphi}\boldsymbol{e}_{x'},$$

con $\boldsymbol{e}_x = -\cos\varphi \boldsymbol{e}_{y'} + \operatorname{sen}\varphi \boldsymbol{e}_{z'}$ e quindi

$$\boldsymbol{\omega} = -\dot{\varphi}\boldsymbol{e}_{x'} - \dot{\vartheta}\cos\varphi \boldsymbol{e}_{y'} + \dot{\vartheta}\operatorname{sen}\varphi \boldsymbol{e}_{z'}.$$

Dopo qualche conto l'energia cinetica risulta

$$K = \frac{mR^2}{12}\left(274 - 15\cos^2\vartheta\right)\dot{\vartheta} + 4mR^2\dot{\vartheta}\dot{\varphi}\cos\varphi + \frac{5}{8}mR^2\dot{\varphi}^2.$$

La lagrangiana è infine data da

$$\mathcal{L} = K + U,$$

dove l'energia cinetica K è appena stata calcolata e il potenziale U è stato calcolato nel punto 2.

2) Denotiamo con $\overline{OA}$ l'asta, con G il suo baricentro e con G_1 il baricentro della lamina triangolare. Dato che la densità dell'asta è $\rho(y) = \rho y^n$ con $\rho \in \mathbb{R}$, dalla definizione di baricentro possiamo dedurre che

$$y_G = \frac{\displaystyle\int_0^\ell \rho y^{n+1} d\,y}{\displaystyle\int_0^\ell \rho y^n d\,y} = \frac{\ell^{n+2}}{n+2}\cdot\frac{n+1}{\ell^{n+1}} = \frac{n+1}{n+2}\ell = \frac{4}{5}\ell$$

da cui ricaviamo $n = 3$. La densità dell'asta è quindi

$$\rho(y) = \rho y^3,\ \ \rho \in \mathbb{R}.$$

Sapendo poi che l'asta ha massa m, possiamo ricavare anche

$$m = \int_0^\ell \rho y^3 d\,y = \rho\frac{\ell^4}{4},$$

da cui

$$\rho = \frac{4m}{\ell^4}.$$

Conoscendo la densità dell'asta possiamo calcolare anche la sua matrice d'inerzia. Innanzitutto osserviamo che per questioni di simmetria rispetto al sistema di riferimento $Oxyz$, i prodotti d'inerzia J_{12}^{asta}, J_{13}^{asta}, J_{23}^{asta} sono nulli e, dato che la lamina è piana, possiamo calcolare

$$J_{11}^{asta} = J_{33}^{asta} = \int_0^\ell \rho y^3 \cdot y^2 d\,y = \rho\frac{\ell^6}{6} = \frac{4m}{\ell^4}\cdot\frac{\ell^6}{6} = \frac{2}{3}m\ell^2,$$

quindi

$$\mathsf{J}_O^{asta} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3}m\ell^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3}m\ell^2 \end{bmatrix}.$$

Se consideriamo il sistema di riferimento $Ax'y'z'$ con assi paralleli a x, y, z, la lamina triangolare ha matrice d'inerzia

$$\mathsf{J}_A^{triangolo} = \begin{bmatrix} \frac{m}{6}\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m\ell^2}{24} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m\ell^2}{12} \end{bmatrix}.$$

Utilizziamo ora il teorema di Huygens-Steriner per spostare la matrice d'inerzia prima nel baricentro G_1 e successivamente in O. Rispetto al sistema di riferimento centrato in G_1 e con assi paralleli a $x,\ y,\ z$, i prodotti d'inerzia saranno ancora nulli. Inoltre,

$$J_{G_1}^{11} = \frac{m\ell^2}{24} - m\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{\ell}{2}\right)^2 = \frac{m\ell^2}{72},$$

$$J_{G_1}^{22} = J_A^{22} = \frac{m\ell^2}{24},$$

$$J_{G_1}^{33} = J_{G_1}^{11} + J_{G_1}^{22} = \frac{m\ell^2}{72} + \frac{m\ell^2}{24} = \frac{m\ell^2}{18}.$$

Passiamo adesso al sistema di riferimento centrato nel sistema di riferimento $Oxyz$. Anche questa volta i prodotti d'inerzia saranno nulli.

$$J_O^{11} = \frac{m\ell^2}{72} + m\left(\ell + \frac{\ell}{6}\right)^2 = \frac{11}{8}m\ell^2,$$

$$J_O^{22} = J_{G_1}^{22} = \frac{m\ell^2}{24},$$

$$J_O^{33} = J_O^{11} + J_O^{22} = \frac{17}{12}m\ell^2,$$

quindi

$$\mathsf{J}_O^{triangolo} = \begin{bmatrix} \frac{11}{8}m\ell^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m\ell^2}{24} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{17}{12}m\ell^2 \end{bmatrix}.$$

Infine, per determinare la matrice d'inerzia dell'intera lamina basta sommare le matrici d'inerzia appena calcolate rispetto al sistema di riferimento $Oxyz$:

$$\mathsf{J}_O = \mathsf{J}_O^{asta} + \mathsf{J}_O^{triangolo} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3}m\ell^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3}m\ell^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{11}{8}m\ell^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m\ell^2}{24} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{17}{12}m\ell^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{49}{24}m\ell^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m\ell^2}{24} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{25}{12}m\ell^2 \end{bmatrix}.$$

Prova scritta di Meccanica Analitica
Appello del 14 luglio 2017

1) Un'asta omogenea AB di massa m e lunghezza $8R$ è libera di ruotare attorno al suo baricentro, fisso nell'origine di un sistema di riferimento piano Oxy. Un disco omogeneo di massa m e raggio R rotola senza strisciare sull'asta, in modo che il punto di contatto D non esca dall'asta.

Si denoti con ξ la lunghezza con segno del vettore $(D - O)$ e con θ l'angolo tra la parte positiva dell'asse delle ascisse e l'asta.

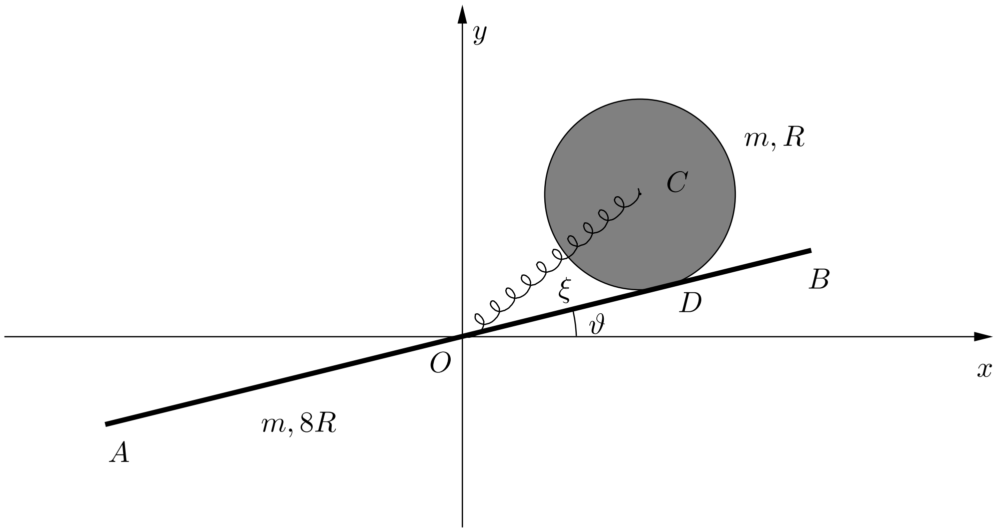
Su tutto il sistema agisce la forza peso e sul centro C del disco agisce una forza elastica di coefficiente $k > 0$ e polo il punto O. Supposti i vincoli lisci, si chiede di:

(a) trovare le posizioni di equilibrio ordinarie del sistema;

(b) discuterne la stabilità in funzione di $\lambda = \dfrac{mg}{kR}$;

(c) trovare le eventuali posizioni di equilibrio di confine;

(d) determinare l'energia cinetica del sistema.



2) Determinare per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ la trasformazione

$$\begin{cases} Q(q,p) = kqp \\ P(q,p) = \log(kp) - \log q \end{cases}$$

è canonica e trovarne una funzione generatrice del tipo $F(q, P)$.

Soluzione della prova scritta di Meccanica Analitica del 14 luglio 2017
a cura di Sara Mastaglio

1) I parametri lagrangiani sono già forniti dal testo dell'esercizio e sono

$$\xi := (D-O) \in [-4R; 4R] \quad \text{ e } \quad \vartheta := x^+\widehat{O}B \in [\,0; 2\pi\,)\,.$$

Calcoliamo le coordinate del baricentro del disco:

$$(C-O) = (\xi\cos\vartheta - R\,\mathrm{sen}\,\vartheta)\boldsymbol{e}_x + (\xi\,\mathrm{sen}\,\vartheta + R\cos\vartheta)\boldsymbol{e}_y$$

da cui

$$|C-O|^2 = \xi^2 + R^2.$$

(a) Il potenziale risulta

$$\begin{aligned} U &= -mgy_O - mgy_C - \frac{k}{2}|C-O|^2 = \\ &= -mg\left(\xi\,\mathrm{sen}\,\vartheta + R\cos\vartheta\right) - \frac{k}{2}\left(\xi^2+R^2\right) = -mg\xi\,\mathrm{sen}\,\vartheta - mgR\cos\vartheta - \frac{k}{2}\xi^2 + c. \end{aligned}$$

Le posizioni di equilibrio si trovano dal sistema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial \xi} = -mg\,\mathrm{sen}\,\vartheta - k\xi = 0 \\ \dfrac{\partial U}{\partial \vartheta} = -mg\xi\cos\vartheta + mgR\,\mathrm{sen}\,\vartheta = 0; \end{cases}$$

dalla prima equazione troviamo $\xi = -\dfrac{mg}{k}\,\mathrm{sen}\,\vartheta$, che sostituito nella seconda ci dà

$$\mathrm{sen}\,\vartheta\left(\frac{mg}{k}\cos\vartheta + R\right) = 0,$$

da cui ricaviamo $\mathrm{sen}\,\vartheta = 0$, cioè $\vartheta = 0, \pi$, e $\cos\vartheta = -\dfrac{kR}{mg} = -\dfrac{1}{\lambda}$, cioè $\vartheta = \pm\arccos\left(-\dfrac{1}{\lambda}\right)$.
Utilizziamo i valori di ϑ trovati per ricavare le rispettive ξ e troviamo le posizioni di equilibrio:

- $P_1(0; 0)$;
- $P_2(0; \pi)$;
- $P_3\left(-R\sqrt{\lambda^2-1}; \arccos\left(-\dfrac{1}{\lambda}\right)\right)$
  valida se $-\dfrac{1}{\lambda} \geq -1$, cioè se $\lambda \geq 1$, ed inoltre se $-R\sqrt{\lambda^2-1} > -4R$, cioè $\lambda < \sqrt{17}$ e quindi $1 < \lambda < \sqrt{17}$.

- $P_4\left(R\sqrt{\lambda^2-1}; -\arccos\left(-\dfrac{1}{\lambda}\right)\right)$

  valida se $-\dfrac{1}{\lambda} \geq -1$, cioè se $\lambda \geq 1$, ed inoltre se $R\sqrt{\lambda^2-1} < 4R$, cioè $\lambda < \sqrt{17}$ e quindi anche in questo caso $1 \leq \lambda < \sqrt{17}$.

(b) Per valutare la stabilità delle posizioni di equilibrio calcoliamo l'hessiano:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} = -k, \qquad \frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \vartheta} = -mg\cos\vartheta, \qquad \frac{\partial^2 U}{\partial \vartheta^2} = mg\xi \operatorname{sen}\vartheta + mgR\cos\vartheta.$$

Quindi

$$\mathcal{H}(P_1) = \begin{bmatrix} -k & -mg \\ -mg & mgR \end{bmatrix}$$

da cui risulta che P_1 è instabile dato che $\det\mathcal{H}(P_1) = -mgkR - m^2g^2 < 0$.

$$\mathcal{H}(P_2) = \begin{bmatrix} -k & mg \\ mg & -mgR \end{bmatrix}$$

da cui $\operatorname{tr}\mathcal{H}(P_2) = -k - mgR < 0$ e $\det\mathcal{H}(P_2) = mgkR - m^2g^2$ è positivo se $mgkR - m^2g^2 > 0$, cioè se $\lambda < 1$; quindi P_2 è stabile per $\lambda < 1$.

$$\mathcal{H}(P_3) = \begin{bmatrix} -k & kR \\ kR & -kR^2\lambda^2 \end{bmatrix}$$

da cui $\operatorname{tr}\mathcal{H}(P_3) = -k - kR^2\lambda^2 < 0$ e $\det\mathcal{H}(P_3) = k^2R^2(\lambda^2-1)$ è positivo se $\lambda > 1$; quindi, ricordando le condizioni di esistenza, P_3 è stabile per $1 < \lambda < \sqrt{17}$.

$$\mathcal{H}(P_4) = \begin{bmatrix} -k & kR \\ kR & -kR^2\lambda^2 \end{bmatrix}$$

quindi ricadiamo nella situazione precedente, cioè P_4 è stabile per $1 < \lambda < \sqrt{17}$.

(c) Le posizioni di confine sono del tipo $\overline{P}_1(4R, \overline{\vartheta})$ e $\overline{P}_2(-4R, \overline{\vartheta})$.

Per quanto riguarda $\overline{P}_1$ le velocità virtuali sono $w_\xi \leq 0$ e $w_\vartheta \in \mathbb{R}$, quindi

$$\begin{cases} \left.\dfrac{\partial U}{\partial \xi}\right|_{P_1} \geq 0 \\ \left.\dfrac{\partial U}{\partial \vartheta}\right|_{P_1} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -mg\operatorname{sen}\overline{\vartheta} - 4kR \geq 0 \\ -4mgR\cos\overline{\vartheta} + mgR\operatorname{sen}\overline{\vartheta} = 0, \end{cases}$$

che dà come soluzione $\overline{\vartheta} = \pi + \operatorname{arctg} 4$ se $\lambda \geq \sqrt{17}$; quindi la posizione di equilibrio di confine è $\overline{P}_1(4R; \pi + \operatorname{arctg} 4)$.

Per quanto riguarda $\overline{P}_2$ le velocità virtuali sono $w_\xi \geq 0$ e $w_\vartheta \in \mathbb{R}$, quindi

$$\begin{cases} \left.\dfrac{\partial U}{\partial \xi}\right|_{P_2} \leq 0 \\ \left.\dfrac{\partial U}{\partial \vartheta}\right|_{P_2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{cases} -mg \operatorname{sen} \overline{\vartheta} + 4kR \leq 0 \\ 4mgR\cos\overline{\vartheta} + mgR \operatorname{sen}\overline{\vartheta} = 0, \end{cases}$$

che dà come soluzione $\overline{\vartheta} = \pi + \operatorname{arctg}(-4)$ se $\lambda \geq \sqrt{17}$; quindi la posizione di equilibrio di confine è $\overline{P}_2(-4R; \pi + \operatorname{arctg}(-4))$.

(d) L'energia cinetica del sistema è data dalla somma dell'energia cinetica dell'asta K_a e di quella del disco K_d. Notiamo che l'asta ha un punto fisso (il punto O), mentre il disco no (si potrebbe essere tratti in inganno dal punto di contatto D tra asta e disco, ma questo non ha velocità nulla in quanto si muove con l'asta), quindi l'energia cinetica totale è

$$K = K_a + K_d = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}_a \cdot \mathsf{J}_O \boldsymbol{\omega}_a + \frac{1}{2} m v_C^2 + \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}_d \cdot \mathsf{J}_C \boldsymbol{\omega}_d.$$

La velocità del punto C è

$$\boldsymbol{v}_C = \left(\dot{\xi}\cos\vartheta - \xi\dot{\vartheta}\operatorname{sen}\vartheta - R\dot{\vartheta}\cos\vartheta\right)\boldsymbol{e}_x + \left(\dot{\xi}\operatorname{sen}\vartheta + \xi\dot{\vartheta}\cos\vartheta - R\dot{\vartheta}\operatorname{sen}\vartheta\right)\boldsymbol{e}_y$$

e quindi $v_C^2 = \dot{\xi}^2 + \xi^2\dot{\vartheta}^2 + R^2\dot{\vartheta}^2 - 2R\dot{\xi}\dot{\vartheta}$.

Le velocità angolari sono $\boldsymbol{\omega}_a = \dot{\vartheta}\boldsymbol{e}_z$ e $\boldsymbol{\omega}_d = \left(\dot{\vartheta} + \dot{\varphi}\right)\boldsymbol{e}_z$ dove φ è l'angolo di rotazione propria del disco; la condizione di rotolamento senza strisciamento è $\dot{\xi} = -R\dot{\varphi}$, e quindi la velocià angolare del disco risulta $\boldsymbol{\omega}_d = \left(\dot{\vartheta} - \dfrac{\dot{\xi}}{R}\right)\boldsymbol{e}_z$. Nel caso piano ci basta ricordare $J_O^{33} = \dfrac{m\ell^2}{12}$ e $J_C^{33} = \dfrac{mR^2}{2}$. Dopo qualche conto, tenendo conto che $\ell = 8R$, l'energia cinetica risulta

$$K = \frac{3}{4}m\dot{\xi}^2 - \frac{3}{2}mR\dot{\xi}\dot{\vartheta} + \frac{m}{12}\left(41R^2 + 6\xi^2\right)\dot{\vartheta}^2.$$

2) Per ottenere una trasformazione canonica poniamo le parentesi di Poisson uguali a 1:

$$[Q, P] = \frac{\partial Q}{\partial q}\frac{\partial P}{\partial p} - \frac{\partial Q}{\partial p}\frac{\partial P}{\partial q} = 1$$

con

$$\frac{\partial Q}{\partial q} = kp, \quad \frac{\partial Q}{\partial p} = kq, \quad \frac{\partial P}{\partial q} = -\frac{1}{q}, \quad \frac{\partial P}{\partial p} = \frac{k}{kp}\ .$$

Quindi

$$kp \cdot \frac{k}{kp} - kq \cdot \left(-\frac{1}{q}\right) = 1$$

cioè

$$k + k = 1$$

da cui otteniamo $k = \dfrac{1}{2}$.
La trasformazione, quindi, diventa

$$\begin{cases} Q = Q(q,p) = \dfrac{qp}{2} \\ P = P(q,p) = \log\left(\dfrac{p}{2q}\right) \end{cases}.$$

Troviamo ora una funzione generatrice $F(q,P)$:

$$p = \frac{\partial F}{\partial q} \qquad \text{e} \qquad Q = \frac{\partial F}{\partial P}$$

quindi $p = 2qe^P = \dfrac{\partial F}{\partial q}$, da cui si può ricavare $F(q,P) = q^2e^P + g(P)$. Inolte

$$q^2e^P + g'(P) = \frac{\partial F}{\partial P} = Q = q^2e^P$$

da cui, confrontando il primo e l'ultimo termine, risulta che $g'(P) = 0$ e quindi $g(P) = \text{costante}$. In definitiva

$$F(q,P) = q^2e^P + \text{costante},$$

in particolare, scegliendo la costante $= 0$, troviamo

$$F(q,P) = q^2e^P.$$

Prova scritta di Meccanica Analitica
Appello dell'8 settembre 2017

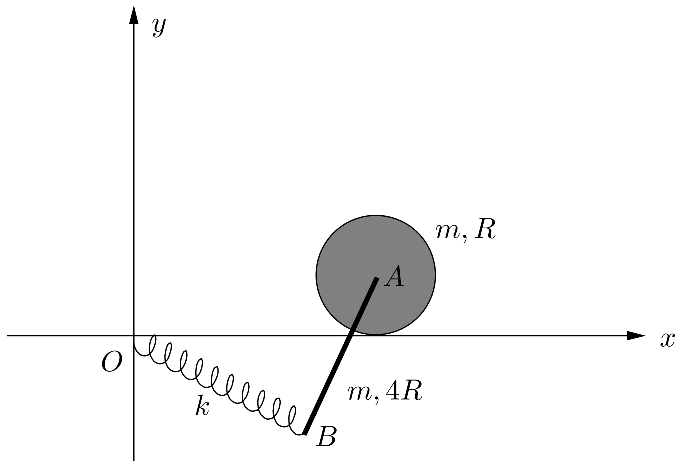
1) Un disco omogeneo di massa m e raggio R rotola senza strisciare sull'asse orizzontale di un sistema di riferimento piano Oxy. Un'asta omogenea AB di massa m e lunghezza $4R$ ha l'estremo A vincolato al centro del disco ed è libera di ruotare attorno ad esso.

Su tutto il sistema agisce la forza peso e sull'estremo B dell'asta agisce una forza elastica di coefficiente $k > 0$ e polo il punto O. Supposti i vincoli lisci, si chiede di:

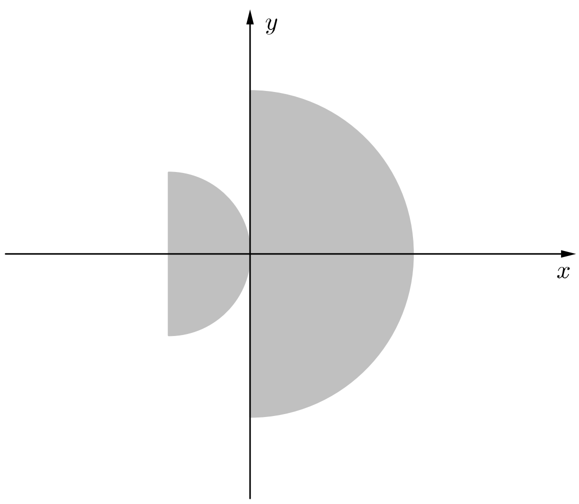
(a) trovare le posizioni di equilibrio del sistema;

(b) discuterne la stabilità in funzione del parametro meccanico adimensionale $\lambda = \dfrac{mg}{kR}$;

(c) determinare la lagrangiana del sistema.



2) Una lamina piana omogenea è formata da due semicerchi di raggi $R, 2R$ disposti come in figura. Sapendo che la massa della lamina vale $5m$, se ne calcoli la matrice d'inerzia rispetto al sistema di riferimento indicato.

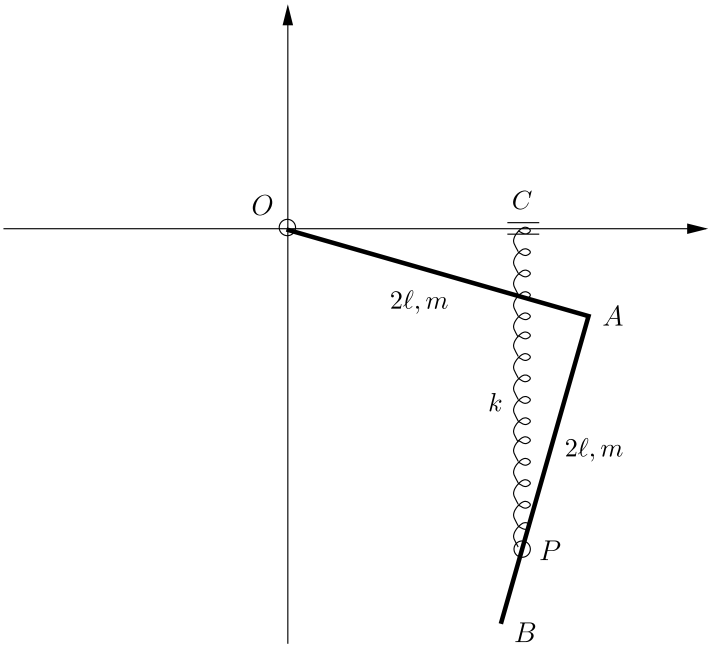


Prova scritta di Meccanica Analitica
22 settembre 2017

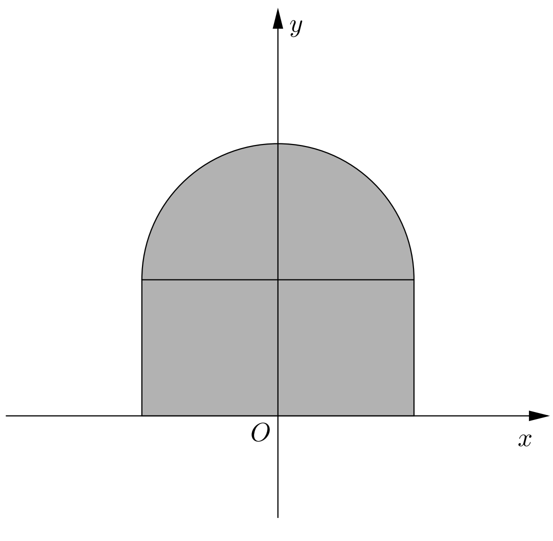
1) Un corpo rigido è formato da due aste omogenee OA, AB, ognuna di lunghezza 2ℓ e massa m, saldate ad angolo retto nell'estremo comune A. Il corpo è libero di ruotare in un piano verticale e il punto O è fisso nell'origine di un sistema di riferimento cartesiano ortogonale. Sull'asta AB scorre poi un punto P di massa trascurabile.

Tutto il sistema è soggetto alla forza di gravità e sul punto P agisce una forza elastica verticale con polo sull'asse orizzontale e coefficiente $k > 0$. Considerando tutti i vincoli lisci, si chiede di:

1. trovare le posizioni di equilibrio ordinarie del sistema e discuterne la stabilità;
2. trovare le eventuali posizioni di equilibrio di confine del sistema;
3. scrivere la lagrangiana del sistema e le corrispondenti equazioni differenziali del moto.



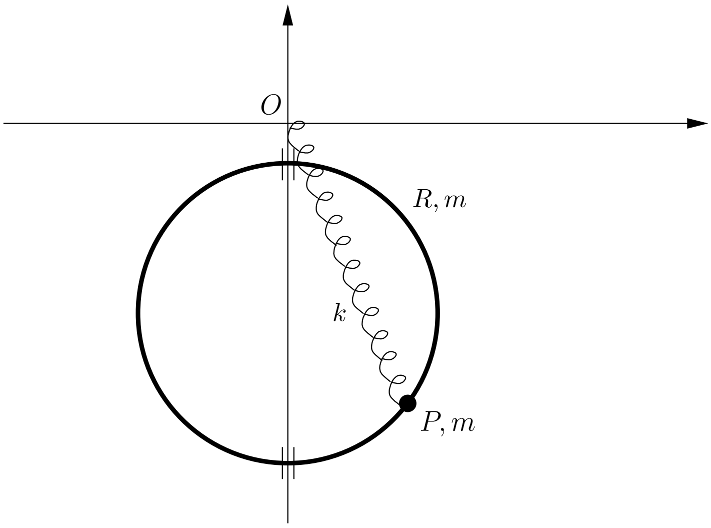
2) Una lamina piana omogenea è formata da un semidisco di raggio R e massa m saldato a un rettangolo di lati $R, 2R$. Se ne calcoli la matrice d'inerzia rispetto al sistema di riferimento in figura (l'asse z non è rappresentato).



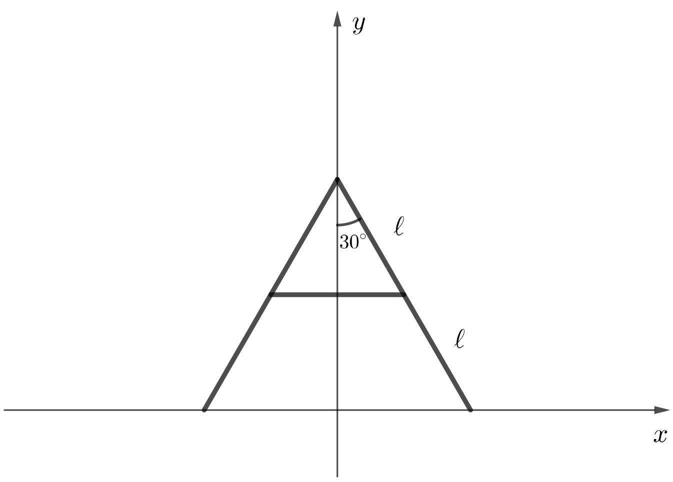
Prova scritta di Meccanica Analitica
12 gennaio 2018

1) Un corpo rigido formato da una circonferenza materiale di raggio R e massa m è libero di traslare in verticale, in modo che un suo diametro resti sempre sull'asse y di un sistema di riferimento cartesiano ortogonale. Un punto materiale P di massa m scorre sula circonferenza materiale.
Tutto il sistema è soggetto alla forza di gravità e sul punto P agisce una forza elastica con polo nell'origine e coefficiente $k > 0$. Considerando tutti i vincoli lisci, si chiede di:

1. trovare le posizioni di equilibrio ordinarie del sistema;
2. discuterne la stabilità in funzione del parametro meccanico $\lambda = \dfrac{mg}{kR}$;
3. scrivere la lagrangiana del sistema e le corrispondenti equazioni differenziali del moto;
4. scrivere le pulsazioni delle piccole oscillazioni attorno a una posizione di equilibrio stabile.



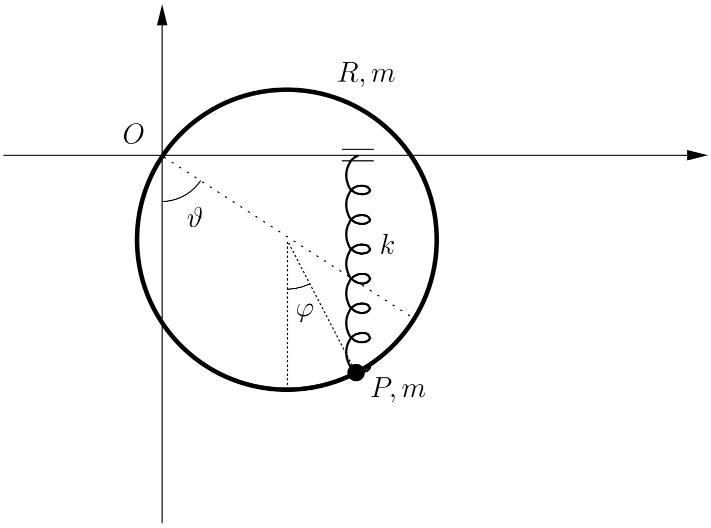
2) Una corpo rigido piano omogeneo è formato da tre aste, due di lunghezza 2ℓ e una di lunghezza ℓ, disposte come in figura. Sapendo che la massa totale del corpo rigido è m, se ne calcoli la matrice d'inerzia rispetto al sistema di riferimento indicato (l'asse z non è rappresentato).



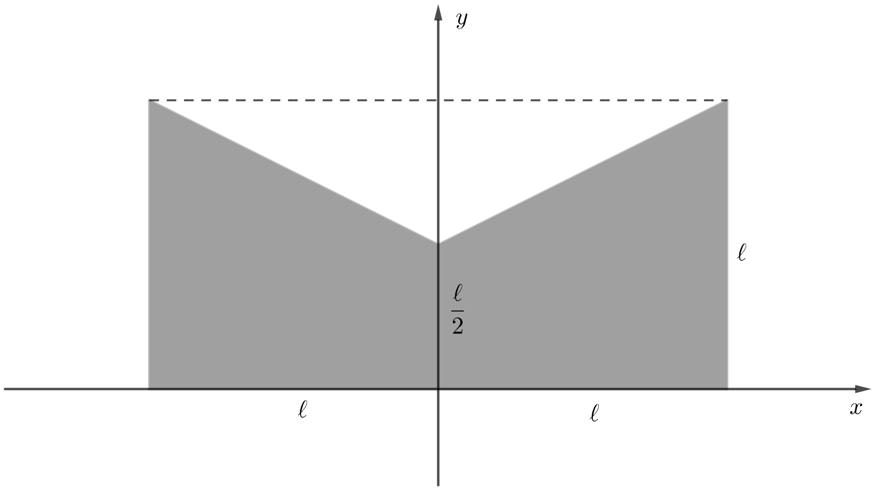
Prova scritta di Meccanica Analitica
2 febbraio 2018

I) Una circonferenza materiale di raggio R e massa m è libera di ruotare attorno a un suo punto, fissato nell'origine di un sistema di riferimento cartesiano ortogonale. Un punto materiale P di massa m scorre sula circonferenza materiale.
Tutto il sistema è soggetto alla forza di gravità e sul punto P agisce una forza elastica verticale con polo sull'asse x e coefficiente $k > 0$. Considerando tutti i vincoli lisci, si chiede di:

1. trovare le posizioni di equilibrio ordinarie del sistema;
2. discuterne la stabilità in funzione del parametro meccanico $\lambda = \dfrac{mg}{kR}$;
3. scrivere la lagrangiana del sistema e le corrispondenti equazioni differenziali del moto.



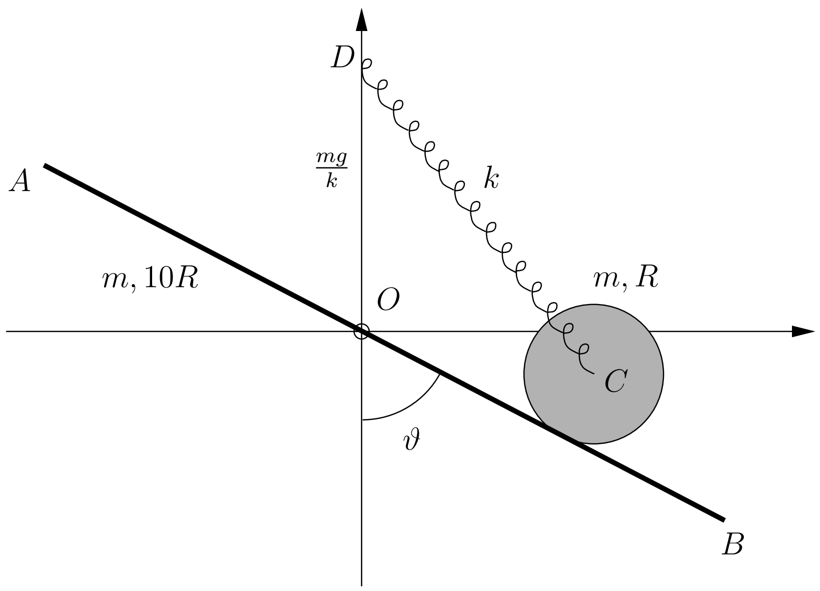
II) Un corpo rigido piano omogeneo di massa m ha la forma disegnata in figura. Se ne calcoli il **baricentro** e la **matrice d'inerzia** rispetto al sistema di riferimento indicato (l'asse z non è rappresentato).



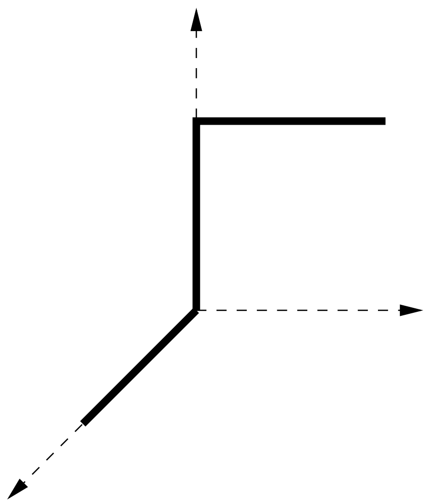
Prova scritta di Meccanica Analitica
1 giugno 2018

I) In un sistema piano, un disco omogeneo di raggio R e massa m ruota senza strisciare lungo un'asta omogenea AB di massa m e lunghezza $10R$. L'asta AB è libera di ruotare attorno al suo baricentro, che è fissato nell'origine O di un sistema di riferimento cartesiano ortogonale.
Tutto il sistema è soggetto alla forza di gravità e sul centro C del disco agisce una forza elastica di coefficiente $k > 0$ e polo il punto D di coordinate $\left(0, \frac{mg}{k}\right)$. Si chiede di:

1. trovare le posizioni di equilibrio ordinarie del sistema in funzione del parametro meccanico $\lambda = \dfrac{mg}{kR}$;
2. discuterne la stabilità;
3. trovare le eventuali posizioni di equilibrio di confine;
4. scrivere la lagrangiana del sistema e le corrispondenti equazioni differenziali del moto.



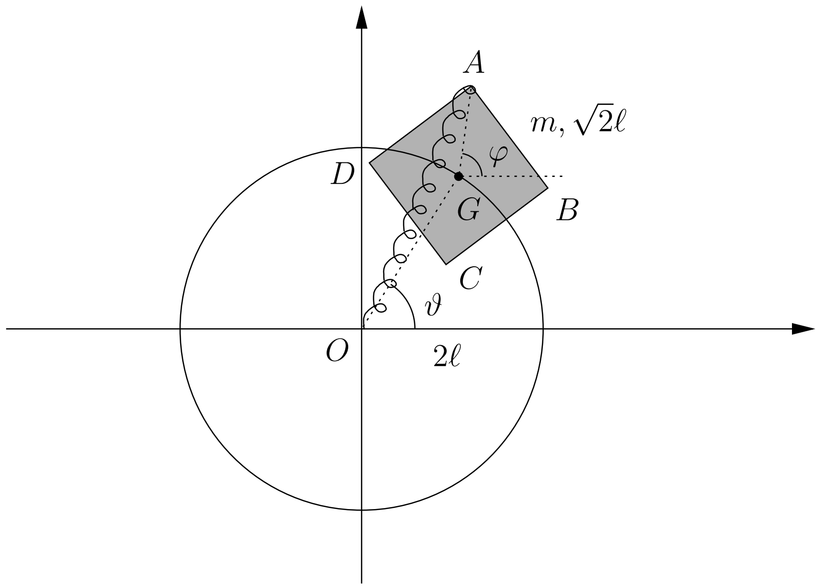
II) Un corpo rigido è formato da tre aste omogenee, ognuna di massa m e lunghezza ℓ, disposte come in figura (le aste sono mutuamente perpendicolari). Se ne trovi la matrice d'inerzia rispetto al sistema di riferimento indicato.



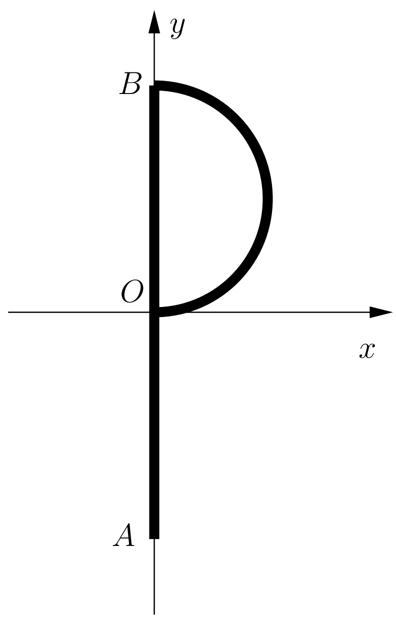
Prova scritta di Meccanica Analitica
15 giugno 2018

I) In un sistema piano, una lamina quadrata omogenea $ABCD$ di lato $\sqrt{2}\ell$ e massa m ruota attorno al suo centro G, il quale si muove su una guida circolare di centro O e raggio 2ℓ.
Tutto il sistema è soggetto alla forza di gravità e sul vertice A della lamina agisce una forza elastica di coefficiente $k > 0$ e polo il punto O. Si chiede di:

1. trovare le posizioni di equilibrio del sistema;
2. discuterne la stabilità in funzione del parametro meccanico $\lambda = \dfrac{mg}{kR}$;
3. scrivere la lagrangiana del sistema;
4. scrivere l'equazione delle piccole oscillazioni attorno a una posizione di equilibrio stabile.



II) Si calcoli la matrice d'inerzia del corpo rigido in figura rispetto al sistema di riferimento indicato. Il corpo è formato da un'asta AB omogenea di massa m e raggio 4ℓ e da una semicirconferenza omogenea di massa m e raggio ℓ.

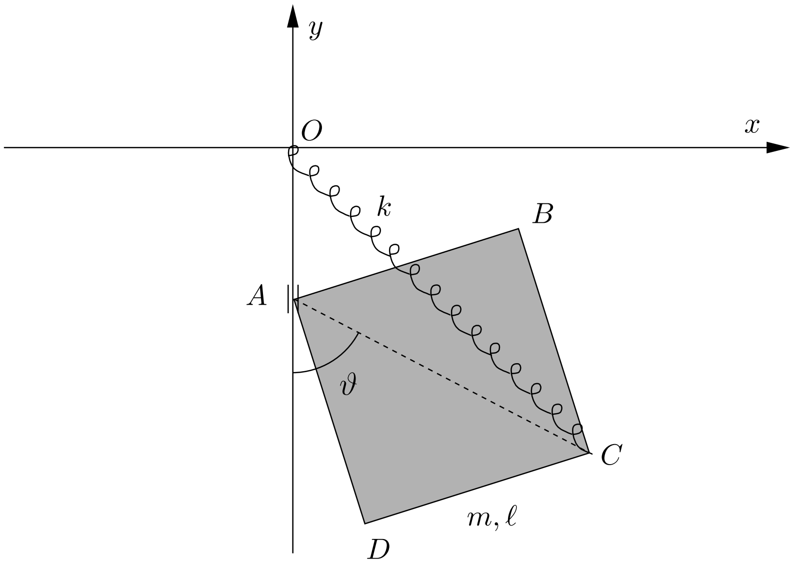


Prova scritta di Meccanica Analitica
Appello del 6 luglio 2018

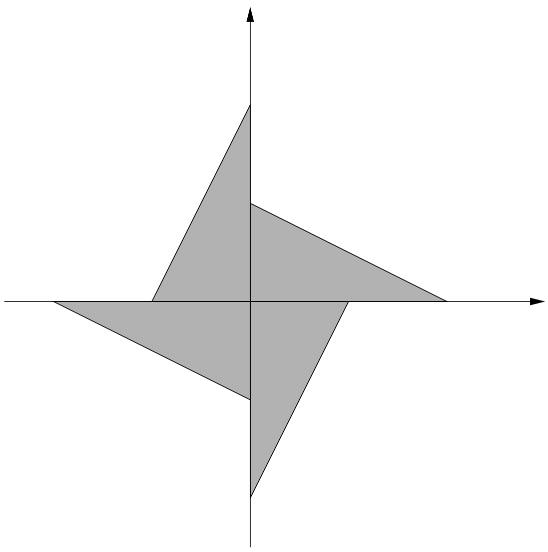
1) Sia dato un sistema di riferimento cartesiano ortogonale Oxy in un piano verticale. Una lamina quadrata omogenea di massa m e lato ℓ è libera di ruotare attorno al suo vertice A, che scorre sull'asse verticale. Sulla lamina agisce la forza peso e sul vertice C opposto ad A agisce una forza elastica di coefficiente $k > 0$ e polo l'origine O.

Supposti i vincoli lisci, si chiede di:

1. trovare le posizioni di equilibrio del sistema;
2. discuterne la stabilità al variare del parametro $\frac{mg}{k\ell}$;
3. determinare l'energia cinetica del sistema e mostrare che la matrice dell'energia cinetica è invertibile;
4. discutere l'esistenza di integrali primi del moto.



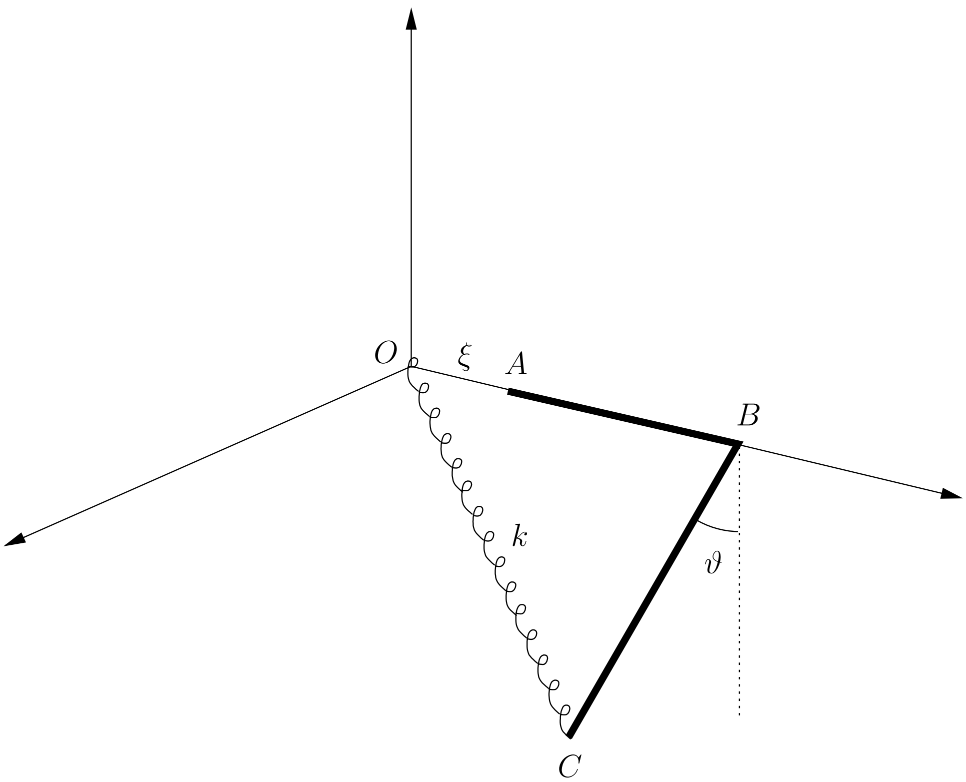
2) Una lamina piana omogenea di massa m è formata da quattro triangoli rettangoli di cateti $\ell, 2\ell$ disposti come in figura. Se ne calcoli la matrice d'inerzia nel sistema di riferimento indicato (l'asse z è perpendicolare al foglio).



Prova scritta di Meccanica Analitica
Appello del 7 settembre 2018

I) Un corpo rigido piano è formato da due aste AB e BC, entrambe di massa m e lunghezza ℓ, saldate ad angolo retto. Tale corpo si muove in modo che l'asta AB scorra sull'asse y di un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $Oxyz$. Inoltre il corpo può ruotare attorno all'asse y.
Tutto il sistema è soggetto alla forza di gravità e sull'estremo C della seconda asta agisce una forza elastica di polo l'origine e coefficiente $k > 0$. Supposti i vincoli lisci, si chiede di:

1. trovare le posizioni di equilibrio del sistema e discuterne la stabilità;
2. determinare la lagrangiana del sistema;
3. scrivere le pulsazioni delle piccole oscillazioni attorno alla posizione di equilibrio stabile.



II) Data la trasformazione

$$\begin{cases} Q = \dfrac{q}{p}\sqrt{kp^2 - 1} \\ P = k\sqrt{kp^2 - 1} \end{cases}$$

si trovino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui essa è canonica. Nei casi affermativi si trovi poi una funzione generatrice del tipo $F_2(q, P)$.

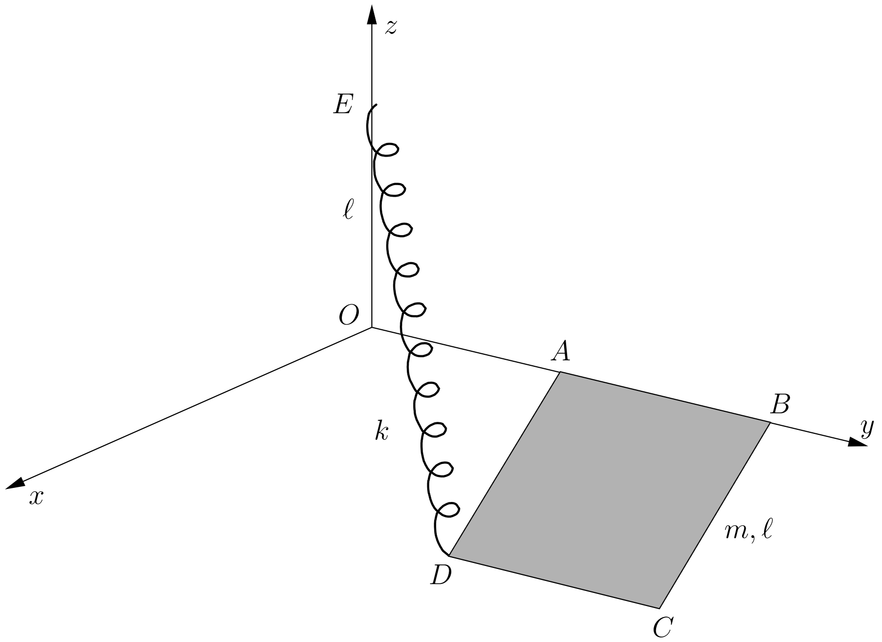
Prova scritta di Meccanica Analitica
Appello del 14 settembre 2018

I) Un lamina quadrata omogenea $ABCD$ di lato ℓ e massa m è libera di ruotare attorno al suo lato AB, che scorre sull'asse y di un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $Oxyz$.

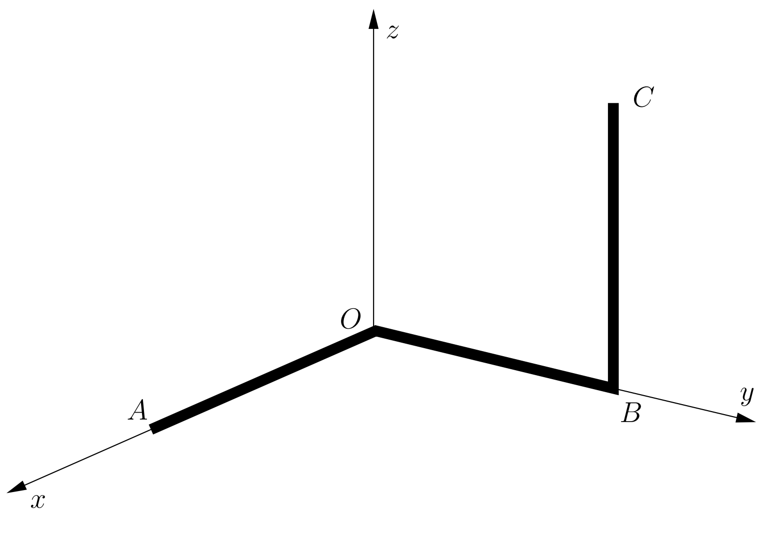
Sul vertice D della lamina agisce una forza elastica di coefficiente $k > 0$ e polo il punto E di coordinate $(0, 0, \ell)$.

Tutto il sistema è soggetto alla forza di gravità. Supposti i vincoli lisci, si chiede di:

1. trovare le posizioni di equilibrio ordinarie del sistema;
2. discuterne la stabilità in funzione dei parametri meccanici;
3. determinare la lagrangiana del sistema;
4. scrivere la lagrangiana approssimata attorno a una posizione di equilibrio stabile.



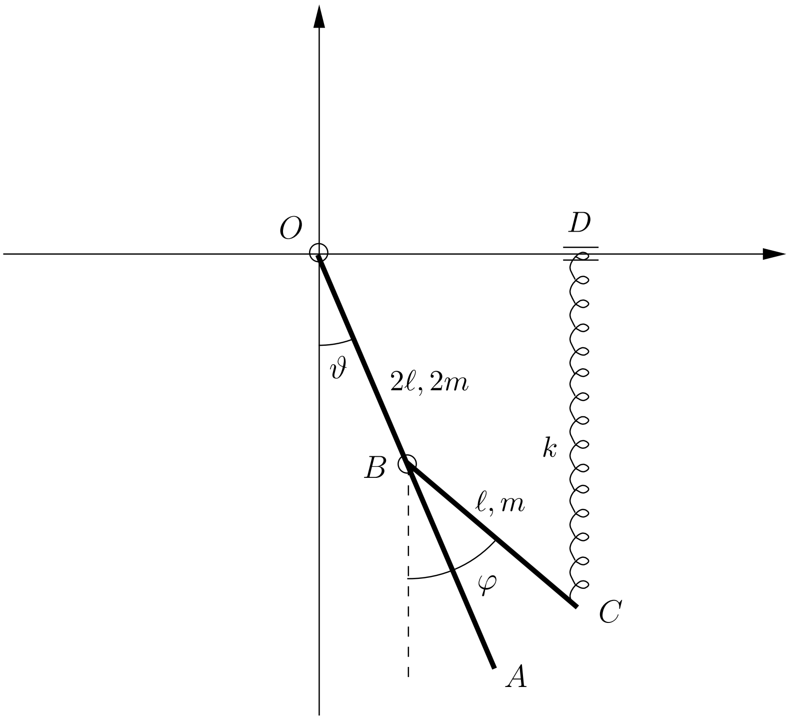
II) Un corpo rigido $AOBC$ è formato da tre aste omogenee AO, OB, BC, tutte di massa m e lunghezza ℓ, perpendicolari tra loro e disposte come in figura. Se ne calcoli la matrice d'inerzia rispetto al sistema di riferimento indicato.



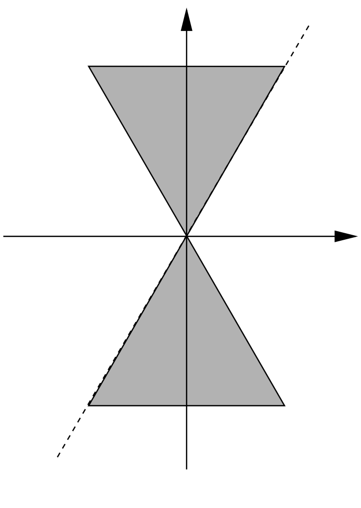
Prova scritta di Meccanica Analitica
Appello dell'11 gennaio 2019

I) In un piano verticale, un'asta omogenea OA di massa $2m$ e lunghezza 2ℓ è vincolata a ruotare attorno all'estremo O. Nel punto medio B di OA è vincolato l'estremo di una seconda asta omogenea BC, di massa m e lunghezza ℓ, libera di ruotare attorno a B. Sull'estremo libero C agisce una forza elastica verticale di coefficiente $k > 0$ e polo D sull'asse x di un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $Oxyz$. Inoltre tutto il sistema è soggetto alla forza di gravità.
Supposti i vincoli lisci, ponendo $\lambda = mg/k\ell$, si chiede di:

1. determinare la lagrangiana del sistema;
2. trovare le posizioni di equilibrio del sistema;
3. discuterne la stabilità nel caso $\lambda = 3$;
4. sempre nel caso $\lambda = 3$, scrivere le pulsazioni delle piccole oscillazioni attorno a una posizione di equilibrio stabile.



II) Si calcoli la matrice d'inerzia della lamina piana omogenea della figura, formata da due triangoli equilateri, rispetto al sistema indicato. Si calcoli poi il momento d'inerzia rispetto all'asse tratteggiato.



Risoluzione della prova di Meccanica Analitica dell'11 gennaio 2019

I) 1. Scegliamo come parametri lagrangiani gli angoli (antiorari) $\vartheta \in [0, 2\pi[$ tra la verticale discendente e OA e $\varphi \in [0, 2\pi[$ tra la verticale discendente e BC.
Denotando con G il punto medio dell'asta BC, il potenziale è dato da

$$U = -2mgy_B - mgy_C - \frac{1}{2}k|C - D|^2.$$

Si ha

$$\begin{aligned}
&(B - O) = \ell \sin\vartheta \boldsymbol{e}_1 - \ell\cos\vartheta \boldsymbol{e}_2,\\
&(G - O) = (G - B) + (B - O) = \left(\frac{\ell}{2}\sin\varphi + \ell\sin\vartheta\right)\boldsymbol{e}_1 - \left(\frac{\ell}{2}\cos\varphi + \ell\cos\vartheta\right)\boldsymbol{e}_2,\\
&(C - D) = -\ell\left(\cos\varphi + \cos\vartheta\right)\boldsymbol{e}_2,
\end{aligned}$$

da cui

$$U(\vartheta, \varphi) = 3mg\ell\cos\vartheta + \frac{1}{2}mg\ell\cos\varphi - \frac{1}{2}k\ell^2\left(\cos\varphi + \cos\vartheta\right)^2 + \text{cost.}$$

Poiché O è fisso, scriviamo l'energia cinetica come

$$K = \frac{1}{2}J_O^{OA}\omega_\vartheta^2 + \frac{1}{2}m|\boldsymbol{v}_G|^2 + \frac{1}{2}J_G^{BC}\omega_\varphi^2.$$

Si ha

$$\omega_\vartheta = \dot\vartheta, \quad \omega_\varphi = \dot\varphi, \quad J_O^{OA} = \frac{8}{3}m\ell^2, \quad J_G^{BC} = \frac{m\ell^2}{12},$$

$$\boldsymbol{v}_G = \left(\frac{\ell}{2}\dot\varphi\cos\varphi + \ell\dot\vartheta\cos\vartheta\right)\boldsymbol{e}_1 + \left(\frac{\ell}{2}\dot\varphi\sin\varphi + \ell\dot\vartheta\sin\vartheta\right)\boldsymbol{e}_2$$

e dunque

$$|\boldsymbol{v}_G|^2 = \ell^2\dot\vartheta^2 + \frac{\ell^2}{4}\dot\varphi^2 + \ell^2\dot\vartheta\dot\varphi\cos(\varphi - \vartheta).$$

Quindi l'energia cinetica diventa

$$\begin{aligned}
K(\vartheta, \varphi, \dot\vartheta, \dot\varphi) &= \frac{1}{2}\left[\frac{8}{3}m\ell^2\dot\vartheta^2 + \frac{m\ell^2}{12}\dot\varphi^2 + m\ell^2\dot\vartheta^2 + m\frac{\ell^2}{4}\dot\varphi^2 + m\ell^2\dot\vartheta\dot\varphi\cos(\varphi - \vartheta)\right]\\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{11}{3}m\ell^2\dot\vartheta^2 + \frac{1}{3}m\ell^2\dot\varphi^2 + m\ell^2\dot\vartheta\dot\varphi\cos(\varphi - \vartheta)\right]
\end{aligned}$$

da cui si ricava la lagrangiana

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(\vartheta, \varphi, \dot\vartheta, \dot\varphi) = \frac{1}{2}&\left[\frac{11}{3}m\ell^2\dot\vartheta^2 + \frac{1}{3}m\ell^2\dot\varphi^2 + m\ell^2\dot\vartheta\dot\varphi\cos(\varphi - \vartheta)\right]\\
&+ 3mg\ell\cos\vartheta + \frac{1}{2}mg\ell\cos\varphi - \frac{1}{2}k\ell^2\left(\cos\varphi + \cos\vartheta\right)^2
\end{aligned}$$

2. Le posizioni di equilibrio si trovano nei punti stazionari del potenziale:

$$\begin{cases}
\dfrac{\partial U}{\partial\vartheta} = -3mg\ell\sin\vartheta + k\ell^2(\cos\varphi + \cos\vartheta)\sin\vartheta = 0\\
\dfrac{\partial U}{\partial\varphi} = -\dfrac{1}{2}mg\ell\sin\varphi + k\ell^2(\cos\varphi + \cos\vartheta)\sin\varphi = 0.
\end{cases}$$

Dalla prima raccogliamo $\sin\vartheta$, da cui

$$\sin\vartheta = 0 \quad \vee \quad \cos\varphi + \cos\vartheta = 3\lambda$$

dove $\lambda = mg/k\ell$.
Il primo caso dà $\vartheta = 0, \pi$, e sostituito nella seconda equazione risulta

$$\begin{aligned}
\vartheta = 0 \quad &\Rightarrow \quad \sin\varphi = 0 \quad \vee \quad -\frac{1}{2}mg + k\ell(\cos\varphi + 1) = 0 \\
\vartheta = \pi \quad &\Rightarrow \quad \sin\varphi = 0 \quad \vee \quad -\frac{1}{2}mg + k\ell(\cos\varphi - 1) = 0.
\end{aligned}$$

L'equazione $-\frac{1}{2}mg + k\ell(\cos\varphi + 1) = 0$ diventa

$$\cos\varphi = \frac{\lambda}{2} - 1 \quad \Rightarrow \quad \varphi = \pm\arccos\left(\frac{\lambda}{2} - 1\right) \quad \text{se } \lambda < 4,$$

quindi per $\vartheta = 0$ abbiamo le posizioni

$$P_1(0,0), \quad P_2(0,\pi), \quad P_{3,4} = \left(0, \pm\arccos\left(\frac{\lambda}{2} - 1\right)\right)$$

dove le ultime due esistono solo se $\lambda < 4$.
In modo simile, per $\vartheta = \pi$ l'equazione $-\frac{1}{2}mg + k\ell(\cos\varphi - 1) = 0$ diventa

$$\cos\varphi = \frac{\lambda}{2} + 1$$

che stavolta non ha mai soluzioni, quindi si aggiungono solamente le posizioni

$$P_5(\pi, 0), \quad P_6(\pi,\pi).$$

Se invece sostituiamo l'equazione $\cos\varphi + \cos\vartheta = 3\lambda$ nella seconda, otteniamo

$$\sin\varphi\left(-\frac{1}{2}mg\ell + 3k\ell^2\lambda\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \sin\varphi\frac{5}{2}\lambda = 0$$

da cui $sin\varphi = 0$, ovvero $\varphi = 0, \pi$. Sostituendo $\varphi = 0$ si ha

$$1 + \cos\vartheta = 3\lambda \quad \Rightarrow \quad \vartheta = \pm\arccos(3\lambda - 1)$$

che esistono solo se $\lambda < 2/3$. Quindi troviamo altre due posizioni di equilibrio

$$P_{7,8}\left(\pm\arccos(3\lambda - 1), 0\right)$$

per $\lambda < 2/3$.
Sostituendo $\varphi = \pi$ si ha invece

$$-1 + \cos\vartheta = 3\lambda \quad \Rightarrow \quad \cos\vartheta = 1 + 3\lambda$$

che non ha soluzioni.

3. Nel caso $\lambda = 3$ si hanno in tutto sei posizioni di equilibrio:

$$P_1(0,0), \quad P_2(0,\pi), \quad P_{3,4} = \left(0, \pm\frac{\pi}{3}\right), \quad P_5(\pi,0), \quad P_6(\pi,\pi).$$

Per la stabilità usiamo la matrice hessiana del potenziale $\mathcal{H}(\vartheta,\varphi)$:

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_{11} &= -3mg\ell\cos\vartheta - k\ell^2\sin^2\vartheta + k\ell^2(\cos\varphi+\cos\vartheta)\cos\vartheta\\ &= k\ell^2(-9\cos\vartheta - \sin^2\vartheta + (\cos\varphi+\cos\vartheta)\cos\vartheta)\\ \mathcal{H}_{12} &= \mathcal{H}_{21} = -k\ell^2\sin\varphi\sin\vartheta\\ \mathcal{H}_{22} &= -\frac{1}{2}mg\ell\cos\varphi - k\ell^2\sin^2\varphi + k\ell^2(\cos\varphi+\cos\vartheta)\cos\varphi\\ &= k\ell^2\left(-\frac{3}{2}\cos\varphi - \sin^2\varphi + (\cos\varphi+\cos\vartheta)\cos\varphi\right).\end{aligned}$$

In tutti i sei casi la matrice risulta diagonale, e si ha:

$$\begin{aligned}&\mathcal{H}_{11}(P_1) = k\ell^2(-7) < 0, \quad \mathcal{H}_{22}(P_1) = k\ell^2\frac{1}{2} > 0 \quad\Rightarrow\quad P_1 \text{ instabile}\\ &\mathcal{H}_{11}(P_2) = k\ell^2(-9) < 0, \quad \mathcal{H}_{22}(P_2) = k\ell^2\left(\frac{3}{2}\right) > 0 \quad\Rightarrow\quad P_2 \text{ instabile}\\ &\mathcal{H}_{11}(P_{3,4}) = k\ell^2\left(-\frac{15}{2}\right) < 0, \quad \mathcal{H}_{22}(P_2) = k\ell^2\left(-\frac{3}{4}\right) < 0 \quad\Rightarrow\quad P_{3,4} \text{ stabile}\\ &\mathcal{H}_{11}(P_5) = k\ell^2\,(9) > 0, \quad \mathcal{H}_{22}(P_2) = k\ell^2\left(-\frac{3}{2}\right) < 0 \quad\Rightarrow\quad P_5 \text{ instabile}\\ &\mathcal{H}_{11}(P_6) = k\ell^2\,(11) > 0, \quad \mathcal{H}_{22}(P_2) = k\ell^2\left(\frac{7}{2}\right) > 0 \quad\Rightarrow\quad P_6 \text{ instabile.}\end{aligned}$$

4. Scegliamo ad esempio la posizione stabile $P_3(0,\pi/3)$. L'energia cinetica in P_3 diventa

$$K = \frac{1}{2}\left[\frac{11}{3}m\ell^2\dot\vartheta^2 + \frac{1}{3}m\ell^2\dot\varphi^2 + \frac{1}{2}m\ell^2\dot\vartheta\dot\varphi\right]$$

e quindi la matrice dell'energia cinetica è

$$J = \begin{bmatrix} 11/3 & 1/4\\ 1/4 & 1/3\end{bmatrix} m\ell^2,$$

mentre l'hessiano nella posizione P_3 con $\lambda = 3$ si scrive

$$H = \begin{bmatrix} -15/2 & 0\\ 0 & -3/4\end{bmatrix} k\ell^2.$$

Quindi l'equazione delle pulsazioni delle piccole oscillazioni si scrive

$$\det[\omega^2 J + H] = 0 \quad\Rightarrow\quad \det\begin{bmatrix} 11m\ell^2\omega^2/3 - 15k\ell^2/2 & m\ell^2\omega^2/4\\ m\ell^2\omega^2/4 & m\ell^2\omega^2/3 - 3k\ell^2/4\end{bmatrix} = 0$$

cioè

$$167m^2\omega^4 - 756km\omega^2 + 810k^2 = 0,$$

le cui soluzioni in ω danno le pulsazioni delle piccole oscillazioni.

II) Chiamiamo ℓ il lato di ogni triangolo e m la massa totale. Per simmetria, la matrice d'inerzia risulterà diagonale. Il momento d'inerzia rispetto all'asse y è facile perché possiamo dividere la lamina in quattro triangoli rettangoli uguali ed ognuno avrà lo stesso momento d'inerzia rispetto all'asse y, quindi basta sapere il momento d'inerzia rispetto all'asse verticale di una lamina a forma di triangolo rettangolo di lato orizzontale $\ell/2$:

$$J_{22} = \frac{1}{6}m\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 = \frac{1}{24}m\ell^2$$

Per l'asse orizzontale invece dobbiamo usare il Teorema di Steiner, sapendo che il baricentro dista $2h/3$ dall'asse delle x, dove $h = \sqrt{3}\ell/2$. Denotando con J^G il momento baricentrale e con J^A quello lungo il cateto orizzontale, si ha

$$J_{11}^O = J_{11}^G + m\left(\frac{2}{3}h\right)^2 = J_{11}^A - m\left(\frac{1}{3}h\right)^2 + m\left(\frac{2}{3}h\right)^2 = \frac{1}{6}mh^2 + \frac{1}{3}mh^2 = \frac{1}{2}m\frac{3}{4}\ell^2 = \frac{3}{8}m\ell^2.$$

Sapendo poi che la lamina è piana, risulta

$$J_{33} = J_{11} + J_{22} = \frac{3}{8}m\ell^2 + \frac{1}{24}m\ell^2 = \frac{5}{12}m\ell^2,$$

quindi

$$\mathsf{J}_O = \begin{bmatrix} \frac{3}{8}m\ell^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{24}m\ell^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5}{12}m\ell^2 \end{bmatrix}.$$

Poiché il versore della linea tratteggiata è dato da

$$\boldsymbol{r} = (1/2, \sqrt{3}/2, 0),$$

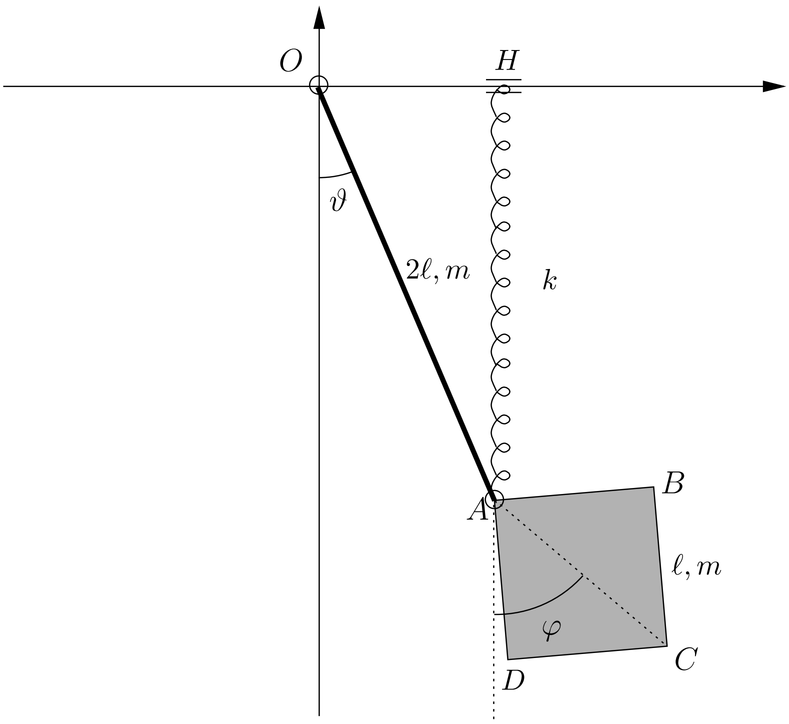
si ha infine

$$J_r = \boldsymbol{r} \cdot \mathsf{J}_O\boldsymbol{r} = \left(\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{4} + \frac{1}{24}\cdot\frac{3}{4}\right)m\ell^2 = \frac{1}{8}m\ell^2.$$

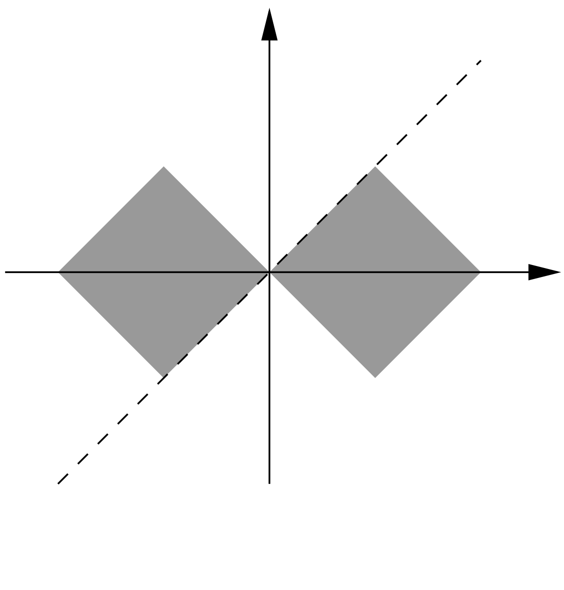
Prova scritta di Meccanica Analitica
1 febbraio 2019

I) In un piano verticale, un'asta omogenea OA di massa m e lunghezza 2ℓ è vincolata a ruotare attorno all'estremo O. Nell'estremo A è vincolato il vertice di una lamina quadrata omogenea $ABCD$ di massa m e lato ℓ, libera di ruotare attorno ad A. Sull'estremo A agisce una forza elastica verticale di coefficiente $k > 0$ e polo H sull'asse x di un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $Oxyz$. Inoltre tutto il sistema è soggetto alla forza di gravità.
Supposti i vincoli lisci, ponendo $\lambda = mg/k\ell$, si chiede di:

1. trovare le posizioni di equilibrio del sistema e discuterne la stabilità;
2. determinare la lagrangiana del sistema;
3. determinare la lagrangiana approssimata attorno a una posizione di equilibrio stabile.



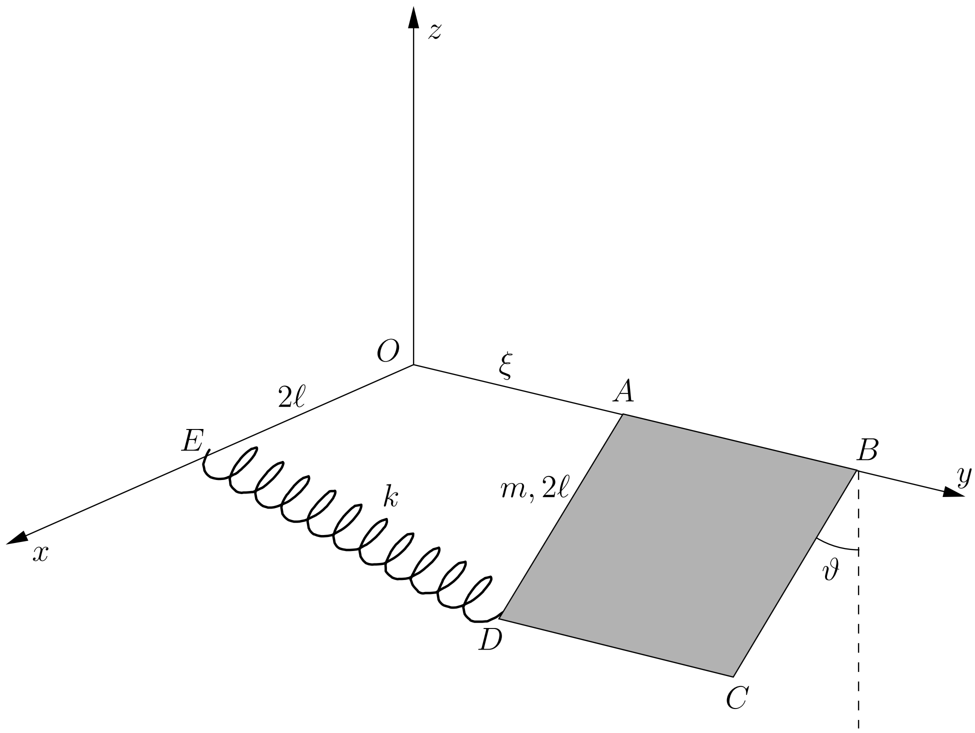
II) Si calcoli la matrice d'inerzia della lamina piana omogenea della figura, formata da due quadrati, ognuno di massa m e lato ℓ, rispetto al sistema indicato. Si calcoli poi il momento d'inerzia rispetto all'asse tratteggiato.



Prova scritta di Meccanica Analitica
Appello del 31 maggio 2019

I) Un lamina quadrata omogenea $ABCD$ di lato 2ℓ e massa m è libera di ruotare attorno al suo lato AB, che scorre sull'asse y di un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $Oxyz$.
Sul vertice D della lamina agisce una forza elastica di coefficiente $k > 0$ e polo il punto E di coordinate $(2\ell, 0, 0)$.
Tutto il sistema è soggetto alla forza di gravità. Supposti i vincoli lisci e posto $\lambda = \dfrac{mg}{k\ell}$, si chiede di:

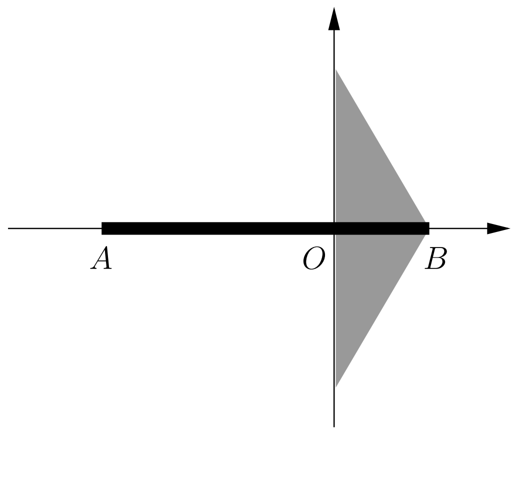
1. trovare le posizioni di equilibrio del sistema;
2. discuterne la stabilità in funzione del parametro meccanico λ;
3. determinare la lagrangiana del sistema;
4. scrivere la lagrangiana approssimata attorno a una posizione di equilibrio stabile.



II) Un corpo rigido piano è formato da:

- un'asta AB di massa m e lunghezza ℓ con densità *quadratica* crecente da A verso B;
- due triangoli emiequilateri omogenei, ognuno di massa m, con base comune OB.

Sapendo che O è il baricentro dell'asta, si determini la matrice d'inerzia del corpo rigido nel sistema di riferimento indicato.



Soluzione della prova scritta di Meccanica Analitica del 31 maggio 2019 a cura di Sara Mastaglio

1) Denotando con G il baricentro della lamina quadrata, troviamo che

$$z_G = -\ell\cos\vartheta \boldsymbol{e}_z,$$

$$(D-E) = (2\ell\operatorname{sen}\vartheta - 2\ell)\,\boldsymbol{e}_x + \xi\boldsymbol{e}_y - 2\ell\cos\vartheta\boldsymbol{e}_x$$

e quindi

$$|D-E|^2 = 8\ell^2 - 8\ell^2\operatorname{sen}\vartheta + \xi^2.$$

1. Per determinare le posizioni di equilibrio del sistema calcoliamo il potenziale:

$$U = -mgz_G - \frac{k}{2}|D-E|^2 = mg\ell\cos\vartheta - \frac{k}{2}\xi^2 + 4k\ell^2\operatorname{sen}\vartheta + c$$

ed in seguito risolviamo il sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial\xi} = -k\xi = 0 \\ \dfrac{\partial U}{\partial\vartheta} = -mg\ell\operatorname{sen}\vartheta + 4k\ell^2\cos\vartheta = 0; \end{cases}$$

dalla prima equazione si ricava banalmente $\xi = 0$, dalla seconda invece $\operatorname{tg}\vartheta = \dfrac{4}{\lambda}$, da cui troviamo gli angoli $\vartheta_1 = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{4}{\lambda}\right)$ e $\vartheta_2 = \pi + \operatorname{arctg}\left(\dfrac{4}{\lambda}\right)$. Le due posizioni di equilibrio del sistema sono quindi

$$P_1\left(0; \operatorname{arctg}\left(\frac{4}{\lambda}\right)\right) \text{ e } P_2\left(0; \pi + \operatorname{arctg}\left(\frac{4}{\lambda}\right)\right).$$

2. Per la stabilità calcoliamo l'hessiano che risulta:

$$\mathcal{H}(\xi,\vartheta) = \begin{bmatrix} -k & 0 \\ 0 & -mg\ell\cos\vartheta - 4k\ell^2\operatorname{sen}\vartheta \end{bmatrix}.$$

Per determinare la stabilità delle due posizioni di equilibrio basta valutare il segno del termine $\mathcal{H}_{22}$ dell'hessiano: per P_1 otteniamo

$$\mathcal{H}_{22}(P_1) = -\frac{mg\ell\lambda}{\sqrt{\lambda^2+16}} - \frac{16k\ell^2}{\sqrt{\lambda^2+16}} < 0$$

che essendo una quantità sempre negativa indica la presenza di due autovalori negativi, pertanto la posizione P_1 è stabile.

Analogamente per la posizione P_2 otteniamo

$$\mathcal{H}_{22}(P_2) = \frac{mg\ell\lambda}{\sqrt{\lambda^2+16}} + \frac{16k\ell^2}{\sqrt{\lambda^2+16}} > 0$$

e quindi P_2 risulta instabile.

Osservazione: avremmo potuto capire il segno di $\mathcal{H}_{22}$ in modo alternativo, osservando che ϑ_1 sta nel primo quadrante (quindi sia $\operatorname{sen}\vartheta_1$ che $\cos\vartheta_1$ sono positivi), mentre ϑ_2 sta nel terzo (quindi $\operatorname{sen}\vartheta_2$ e $\cos\vartheta_2$ sono negativi) ed evitando così di calcolare seno e coseno a partire dalla tangente.

3. Per determinare la lagrangiana ci serve l'energia cinetica del sistema che possiamo calcolare nel punto A che ha velocità parallela alla velocità angolare $\boldsymbol{\omega}$:

$$K = \frac{1}{2}mv_A^2 + \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}\cdot \mathsf{J}_A\boldsymbol{\omega}.$$

Essendo $(A-O) = \xi \boldsymbol{e}_y$, risulta $\boldsymbol{v}_A = \dot{\xi}\boldsymbol{e}_y$ ed inoltre $\boldsymbol{\omega} = -\dot{\vartheta}\boldsymbol{e}_y$. Inoltre, fissando come sistema di riferimento solidale alla lamina quello centrato in A e con l'asse x' lungo il lato AD, $y' \equiv y$ e z' che completa la terna e ricordano che il lato misura 2ℓ, la matrice d'inerzia è

$$\mathsf{J}_A = \begin{bmatrix} \frac{4}{3}m\ell^2 & -m\ell^2 & 0 \\ -m\ell^2 & \frac{4}{3}m\ell^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{8}{3}m\ell^2 \end{bmatrix}.$$

Osservazione: della matrice d'inerzia della lamina, visto che $\boldsymbol{\omega}$ è parallelo a $\boldsymbol{e}_y$, avremmo potuto direttamente scrivere solo il termine J_{22}.

Pertanto, dopo qualche conto l'energia cinetica è:

$$K = \frac{1}{2}m\dot{\xi}^2 + \frac{2}{3}m\ell^2\dot{\vartheta}^2$$

oppure anche

$$K = \frac{1}{2}\left(m\dot{\xi}^2 + \frac{4}{3}m\ell^2\dot{\vartheta}^2\right).$$

La lagrangiana è dunque

$$\mathcal{L} = mg\ell\cos\vartheta - \frac{k}{2}\xi^2 + 4k\ell^2\operatorname{sen}\vartheta + \frac{1}{2}m\dot{\xi}^2 + \frac{2}{3}m\ell^2\dot{\vartheta}^2$$

4. Scriviamo la lagrangiana approssimata attorno alla posizione di equilibrio stabile P_1:

$$\widetilde{\mathcal{L}} = \frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{q}}^{\mathsf{T}}\cdot \mathsf{J}\left(\overline{\boldsymbol{q}}\right)\dot{\boldsymbol{q}} + \frac{1}{2}(\boldsymbol{q}-\overline{\boldsymbol{q}})^{\mathsf{T}}\cdot \mathcal{H}\left(\overline{\boldsymbol{q}}\right)(\boldsymbol{q}-\overline{\boldsymbol{q}})$$

con $\boldsymbol{q} = [\xi, \vartheta]^{\mathsf{T}}$, $\dot{\boldsymbol{q}} = [\dot{\xi}, \dot{\vartheta}]^{\mathsf{T}}$ e $\overline{\boldsymbol{q}} = \left[0, \operatorname{arctg}\left(\dfrac{4}{\lambda}\right)\right]^{\mathsf{T}}$,

$$\mathsf{J}\left(\overline{\boldsymbol{q}}\right) = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & \dfrac{4}{3}m\ell^2 \end{bmatrix}.$$

Avendo già calcolato $\mathcal{H}\left(\overline{\boldsymbol{q}}\right)$ in precedenza, la lagrangiana linearizzata risulta, dopo qualche conto,

$$\widetilde{\mathcal{L}} = \frac{1}{2}m\dot{\xi}^2 + \frac{2}{3}m\ell^2\dot{\vartheta}^2 - \frac{1}{2}k\xi^2 - \frac{mg\ell\lambda + 16k\ell^2}{2\sqrt{\lambda^2+16}}\left(\vartheta - \operatorname{arctg}\left(\frac{4}{\lambda}\right)\right)^2.$$

2) La matrice d'inerzia del corpo rigido è data dalla somma delle matrici d'inerzia J_O^{AB} dell'asta e quelle $\mathsf{J}_O^{T_1}$ e $\mathsf{J}_O^{T_2}$ dei due triangoli. Dato che i piani xy e xz sono di simmetria materiale sappiamo da subito che $J_{12} = J_{13} = J_{23} = 0$.

Dedichiamoci innanzitutto alla matrice d'inerzia dell'asta con densità quadratica. Per comodità calcoleremo la matrice d'inerzia in un sistema di riferimento con assi paralleli a quelli dati e centrato nell'estremo A dell'asta; in seguito utilizzeremo il teorema di Huygens-Steiner per spostarci nel baricentro O.

Conviene quindi preventivamente determinare la posizione del baricentro O dell'asta con densistà quadratica del tipo $\rho = kx^2,\ k \in \mathbb{R}$. La massa dell'asta è:

$$m = \int_0^\ell kx^2 dx = \frac{k\ell^3}{3},$$

da cui

$$k = \frac{3m}{\ell^3}.$$

Infine il baricentro dell'asta risulta:

$$\overline{AO} = \frac{1}{m}\int_0^\ell kx^3 dx = \frac{3}{k\ell^3}\cdot\frac{k\ell^4}{4} = \frac{3}{4}\ell.$$

Siamo ora pronti per determinare la matrice d'inerzia dell'asta (nel sistema di riferimento centrato in A). Considerando che l'asta è distribuita lungo l'asse x avremo $J_{11}^{AB,A} = 0$. Resta da calcolare

$$J_{22}^{AB,A} = \int_0^\ell kx^2 \cdot x^2 dx = \frac{3m}{\ell^3}\cdot\frac{\ell^5}{5} = \frac{3}{5}m\ell^2.$$

Spostandoci in O risulta ancora $J_{11}^{AB} = 0$, mentre

$$J_{22}^{AB} = \frac{3}{5}m\ell^2 - m\left(\frac{3}{4}\ell\right)^2 = \frac{3}{80}m\ell^2.$$

Osservazione: se avessimo calcolato la matrice d'inerzia dell'asta direttamente nel suo baricentro O l'integrale sarebbe stato

$$\int_{-\frac{3}{4}\ell}^{\frac{1}{4}\ell} k\left(x+\frac{3}{4}\ell\right)^4 dx.$$

Occupiamoci ora delle matrici d'inerzia dei due triangoli rispetto al sistema di riferimento centrato in O. Essendo emiequilateri e avendo il cateto $\overline{OB}$ che misura $\ell - \frac{3}{4}\ell = \frac{\ell}{4}$, l'altro cateto risulta $\frac{\sqrt{3}}{4}\ell$. Quindi,

$$J_{11}^{T_1} = J_{11}^{T_2} = \frac{m}{6}\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\ell\right)^2 = \frac{m\ell^2}{32},$$

$$J_{22}^{T_1} = J_{22}^{T_2} = \frac{m}{6}\left(\frac{\ell}{4}\right)^2 = \frac{m\ell^2}{96}.$$

Infine sommiamo i momenti d'inerzia delle tre figure in modo da determinare quella richiesta:

$$J_{11} = J_{11}^{AB} + J_{11}^{T_1} + J_{11}^{T_2} = 0 + \frac{m\ell^2}{32}\cdot 2 = \frac{m\ell^2}{16},$$

$$J_{22} = J_{22}^{AB} + J_{22}^{T_1} + J_{22}^{T_2} = \frac{3}{80}m\ell^2 + \frac{m\ell^2}{96}\cdot 2 = \frac{7}{120}m\ell^2.$$

Essendo una figura piana

$$J_{33} = J_{11} + J_{22} = \frac{m\ell^2}{16} + \frac{7}{120}m\ell^2 = \frac{29}{240}m\ell^2,$$

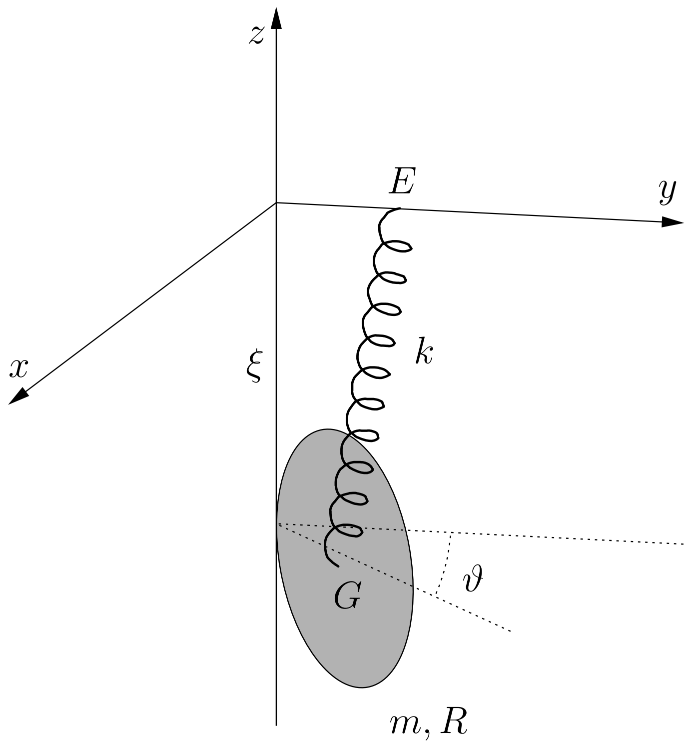
quindi la matrice d'inerzia è

$$\mathsf{J}_O = \begin{bmatrix} \frac{m\ell^2}{16} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{7}{120}m\ell^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{29}{240}m\ell^2 \end{bmatrix}.$$

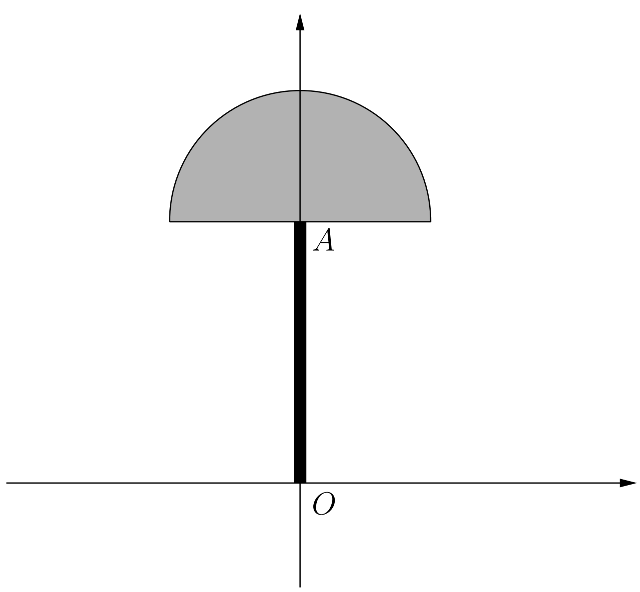
Prova scritta di Meccanica Analitica
Appello del 14 giugno 2019

I) Un lamina circolare omogenea di raggio R e massa m **rotola senza strisciare** sull'asse z di un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $Oxyz$, ed è libera di ruotare attorno a tale asse.
Sul centro G della lamina agisce una forza elastica di coefficiente $k > 0$ e polo il punto E di coordinate $(0, R, 0)$.
Tutto il sistema è soggetto alla forza di gravità. Si chiede di:

1. trovare le posizioni di equilibrio del sistema e discuterne la stabilità;
2. determinare le equazioni differenziali del moto del sistema;
3. scrivere la lagrangiana approssimata attorno alla posizione di equilibrio stabile.



II) Un corpo rigido piano è formato da un'asta OA di lunghezza $2R$, massa m e densità lineare crescente da O verso A e da un semidisco di massa m e raggio R, disposti come in figura.
Se ne determini la matrice d'inerzia nel sistema di riferimento indicato.



Soluzione della prova scritta di Meccanica Analitica del 14 giugno 2019 a cura di Sara Mastaglio

1) Denotiamo con C il punto di contatto tra il disco e l'asse y. Al fine di calcolare il potenziale determiniamo la quota del baricentro del disco e il vettore individuato dalla molla:

$$z_G = -\xi \boldsymbol{e}_z,$$

$$(G - E) = R \operatorname{sen} \vartheta \boldsymbol{e}_x + (R \cos \vartheta - R)\boldsymbol{e}_y - \xi \boldsymbol{e}_z$$

e quindi $|G - E|^2 = 2R^2 - 2R^2 \cos \vartheta + \xi^2$.

1. Il potenziale è dato da

$$U = -mgz_G - \frac{k}{2}|G - E|^2 = mg\xi + kR^2 \cos \vartheta - \frac{k}{2}\xi^2 + c.$$

Determiniamo ora le posizioni di equilibrio dal sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial \xi} = mg - k\xi = 0 \\ \dfrac{\partial U}{\partial \vartheta} = -kR^2 \operatorname{sen} \vartheta = 0 \end{cases}$$

da cui si ricavano le posizioni di equilibrio

$$P_1\left(\frac{mg}{k}; 0\right) \quad \text{e} \quad P_2\left(\frac{mg}{k}; \pi\right).$$

Calcoliamo ora l'hessiano per valutare la stabilità delle posizioni di equilibrio trovate:

$$\mathcal{H}(\xi, \vartheta) = \begin{bmatrix} -k & 0 \\ 0 & -kR^2 \cos \vartheta \end{bmatrix};$$

essendo la matrice diagonale e dato che il termine $\mathcal{H}_{11}$ è sempre negativo, per avere la stabilità (due autovalori negativi) basta verificare che il termine $\mathcal{H}_{22}$ sia negativo: $\mathcal{H}_{22}(P_1) = -kR^2$, quindi la posizione P_1 risulta stabile, mentre $\mathcal{H}_{22}(P_2) = kR^2$ quindi la poszione P_2 risulta instabile.

2. Per calcolare le equazioni differenziali del moto bisogna prima calcolare la lagrangiana $\mathcal{L} = K + U$; determiniamo quindi l'energia cinetica nel punto C che, essendo il punto di contatto tra il disco che rotola senza strisciare e l'asse y, ha velocità nulla:

$$K = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega} \cdot \mathsf{J}_C \boldsymbol{\omega}.$$

Fissiamo un secondo sistema di riferimento $Cx'y'z'$ con l'asse x' coincidente con l'asse z, l'asse y' che contiene $(C-G)$ e z' che completa la terna. In questo modo otteniamo la velocità angolare

$$\boldsymbol{\omega} = -\dot{\vartheta}\boldsymbol{e}_z + \dot{\varphi}\boldsymbol{e}_{z'},$$

dove φ è l'angolo di rotazione propria del disco; ora ricordando che $z \equiv x'$ e che, dato che il disco rotola senza strisciare, vale la condizione $\dot{\xi} = -R\dot{\varphi}$, otteniamo

$$\boldsymbol{\omega} = -\dot{\vartheta}\boldsymbol{e}_{x'} - \frac{\dot{\xi}}{R}\boldsymbol{e}_{z'}.$$

La matrice d'inerzia fatta rispetto al sistema di riferimento $Cx'y'z'$ è

$$\mathsf{J}_C = \begin{bmatrix} \frac{5}{4}mR^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{mR^2}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2}mR^2 \end{bmatrix}$$

e quindi, dopo qualche conto, otteniamo l'energa cinetica

$$K = \frac{3}{4}m\dot{\xi}^2 + \frac{5}{8}mR^2\dot{\vartheta}^2$$

e la lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{3}{4}m\dot{\xi}^2 + \frac{5}{8}mR^2\dot{\vartheta}^2 + mg\xi + kR^2\cos\vartheta - \frac{k}{2}\xi^2.$$

Ora possiamo calcolare le equazioni differenziali del moto imponendo

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q};$$

con $q = \xi$ troviamo la prima equazione differenziale

$$\ddot{\xi} = \frac{2}{3}g - \frac{2k}{3m}\xi$$

e con $q = \vartheta$ troviamo invece la seconda

$$\ddot{\vartheta} = -\frac{4k}{5m}\operatorname{sen}\vartheta.$$

3. Scriviamo la lagrangiana approssimata attorno alla posizione di equilibrio stabile P_1:

$$\widetilde{\mathcal{L}} = \frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{q}}^{\mathsf{T}} \cdot \mathsf{J}\left(\overline{\boldsymbol{q}}\right)\dot{\boldsymbol{q}} + \frac{1}{2}(\boldsymbol{q}-\overline{\boldsymbol{q}})^{\mathsf{T}} \cdot \mathcal{H}\left(\overline{\boldsymbol{q}}\right)(\boldsymbol{q}-\overline{\boldsymbol{q}})$$

con $\boldsymbol{q} = [\xi, \vartheta]^{\mathsf{T}}$, $\dot{\boldsymbol{q}} = [\dot{\xi}, \dot{\vartheta}]^{\mathsf{T}}$ e $\overline{\boldsymbol{q}} = \left[\dfrac{mg}{k}, 0\right]^{\mathsf{T}}$. Ricordiamo che l'energia cinetica è

$$K = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}m\dot{\xi}^2 + \frac{5}{4}mR^2\dot{\vartheta}^2\right)$$

e quindi la matrice associata è

$$\mathsf{J}\left(\overline{\boldsymbol{q}}\right) = \begin{bmatrix} \frac{3}{2}m & 0 \\ 0 & \frac{5}{4}mR^2 \end{bmatrix}.$$

Avendo già calcolato $\mathcal{H}\left(\overline{\boldsymbol{q}}\right)$ in precedenza, la lagrangiana linearizzata risulta, dopo qualche conto,

$$\widetilde{\mathcal{L}} = \frac{3}{4}m\dot{\xi}^2 + \frac{5}{8}mR^2\dot{\vartheta}^2 - \frac{k}{2}\xi^2 + mg\xi - \frac{kR^2}{2}\vartheta^2 - \frac{m^2g^2}{2k}.$$

2) Denotiamo con G_1 il baricentro dell'asta, con G_2 il baricentro del semidisco e con G il baricentro complessivo della figura.

È interessante determinare la posizione del baricentro G dell'intera figura, anche se non richiesto. Il baricentro dell'asta con densità lineare $\rho = ky, k \in \mathbb{R}$ è dato da:

$$m = \int_0^{2R} ky dy = 2kR^2,$$

da cui $k = \dfrac{m}{2R^2}$ e quindi

$$y_{G_1} = \frac{1}{m}\int_0^{2R} ky^2 dy = \frac{4}{3}R.$$

Ricordando poi che in generale il baricentro del semidisco è $\dfrac{4r}{3\pi}$, troviamo

$$y_{G_2} = 2R + \frac{4R}{3\pi},$$

e quindi il baricentro complessivo, essendo le masse delle due figure uguali, è dato da

$$y_G = \frac{\left(\frac{4}{3}R\right) + \left(2R + \frac{4R}{3\pi}\right)}{2} = \frac{5\pi + 2}{3\pi}R.$$

Ora possiamo dedicarci al calcolo della matrice d'inerzia J_O che è data dalla somma della matrice d'inerzia J_O^a dell'asta con densità lineare e di quella J_O^d del semidisco. Osserviamo preventivamente che, essendo xy e yz due piani di simmetria materiale, tutti i prodotti d'inerzia risulteranno nulli.

Per quanto riguarda la matrice d'inerzia dell'asta rispetto al sistema di riferimento dato (centrato in O), essendo OA distribuita sull'asse y, avremo che $J^a_{O,22} = 0$, mentre

$$J^a_{O,11} = \int_0^{2R} ky^3 dy = \frac{m}{2R^2} \cdot \frac{16R^4}{4} = 2mR^2.$$

Occupiamoci ora della matrice d'inerzia del disco. Conosciamo quella rispetto al sistema di riferimento centrato in A e con assi paralleli a quelli dati:

$$\mathsf{J}^d_A = \begin{bmatrix} \frac{mR^2}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{mR^2}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{mR^2}{2} \end{bmatrix}.$$

Ci interessa la matrice d'inerzia centrata in O, quindi ci sposteremo prima in G_2 e poi in O utilizzando Huygens-Steiner. Ragioniamo sui singoli elementi della matrice. Per quanto riguarda il termine J^d_{11} abbiamo:

$$J^d_{G_2,11} = J^d_{A,11} - m\left(\frac{4R}{3\pi}\right)^2$$

e

$$\begin{aligned} J^d_{O,11} =& J^d_{G_2,11} + m\left(2R + \frac{4R}{3\pi}\right)^2 = J^d_{A,11} - m\left(\frac{4R}{3\pi}\right)^2 + m\left(2R + \frac{4R}{3\pi}\right)^2 = \\ =& \frac{mR^2}{4} - m\left(\frac{4R}{3\pi}\right)^2 + m\left(2R + \frac{4R}{3\pi}\right)^2 = \frac{17}{4}mR^2 + \frac{16}{3\pi}mR^2. \end{aligned}$$

L'asse y rimane il medesimo, quindi il termine $J^d_{O,22} = J^d_{G_2,22} = J^d_{A,22} = \dfrac{mR^2}{4}$.
Adesso non ci resta che sommare:

$$J_{11} = J^a_{O,11} + J^d_{O,11} = 2mR^2 + \frac{17}{4}mR^2 + \frac{16}{3\pi}mR^2 = \frac{25}{4}mR^2 + \frac{16}{3\pi}mR^2,$$

$$J_{22} = J^a_{O,22} + J^d_{O,22} = 0 + \frac{mR^2}{4} = \frac{mR^2}{4}$$

e dato che la lamina è piana

$$J_{33} = J_{11} + J_{22} = \frac{25}{4}mR^2 + \frac{16}{3\pi}mR^2 + \frac{mR^2}{4} = \frac{13}{2}mR^2 + \frac{16}{3\pi}mR^2.$$

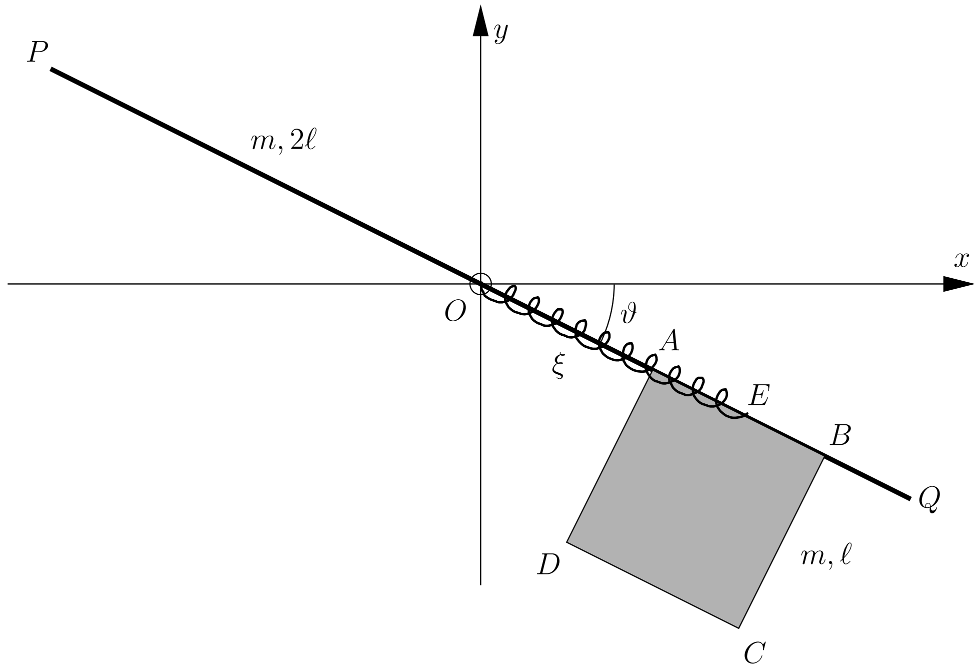
La matrice richiesta risulta quindi

$$\mathsf{J}_O = \begin{bmatrix} \dfrac{25}{4}mR^2 + \dfrac{16}{3\pi}mR^2 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{mR^2}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{13}{2}mR^2 + \dfrac{16}{3\pi}mR^2 \end{bmatrix}.$$

Prova scritta di Meccanica Analitica
12 luglio 2019

I) In un sistema piano, una lamina quadrata omogenea $ABCD$ di lato ℓ e massa m scorre lungo un'asta omogenea PQ di massa m e lunghezza 2ℓ, in modo che il lato AB sia sempre contenuto nell'asta (A non può oltrepassare P e B non può oltrepassare Q). L'asta PQ è libera di ruotare attorno al suo baricentro, che è fissato nell'origine O di un sistema di riferimento cartesiano ortogonale.
Tutto il sistema è soggetto alla forza di gravità e sul punto medio del lato AB della lamina quadrata agisce una forza elastica di coefficiente $k > 0$ e polo il punto O. Si chiede di:

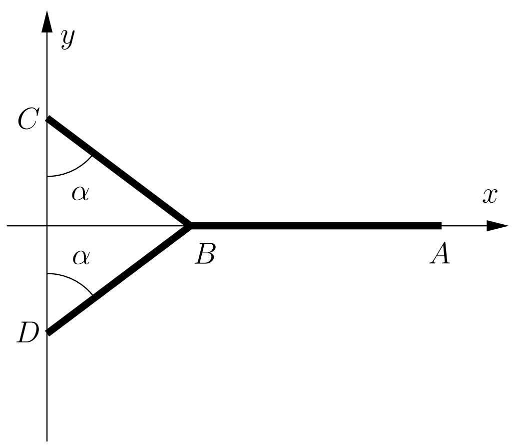
1. trovare le posizioni di equilibrio ordinarie del sistema al variare del parametro meccanico $\lambda = \dfrac{mg}{k\ell}$;
2. discutere la stabilità di tali posizioni;
3. trovare le eventuali posizioni di equilibrio di confine;
4. scrivere la lagrangiana del sistema.



(Nota: il disegno non è in scala)

II) Un corpo rigido è formato da tre aste omogenee: AB di massa $2m$ e lunghezza 2ℓ, BC e BD ognuna di massa m e lunghezza $\sqrt{2}\ell$, disposte come in figura.

- Si determini il valore dell'angolo α in modo che l'ascissa del baricentro del corpo rigido valga $x_G = \dfrac{5}{4}\ell$.
- Per quel valore di α, si trovi la matrice d'inerzia del corpo rigido rispetto al sistema di riferimento indicato.



Soluzione della prova scritta di Meccanica Analitica del 12 luglio 2019 a cura di Sara Mastaglio

1) Innanzitutto osserviamo che i parametri lagrangiani sono tali che

$$\vartheta := Q\widehat{O}x^+ \in [\,0; 2\pi\,) \quad \text{e} \quad \xi := \overline{EO} \in \left[-\frac{\ell}{2}; \frac{\ell}{2}\right].$$

Denotiamo con G il baricentro della lamina quadrata e calcoliamo le sue coordinate:

$$(G-O) = \left(\xi \cos\vartheta - \frac{\ell}{2}\operatorname{sen}\vartheta\right)\boldsymbol{e}_x - \left(\xi \operatorname{sen}\vartheta + \frac{\ell}{2}\cos\vartheta\right)\boldsymbol{e}_y;$$

inoltre

$$(E-O) = \xi\cos\vartheta\boldsymbol{e}_x - \xi\operatorname{sen}\vartheta\boldsymbol{e}_y.$$

1. Osservando che il baricentro dell'asta coincide con l'origine, il potenziale risulta

$$U = -mgy_G - \frac{k}{2}|E-O|^2 = mg\xi\operatorname{sen}\vartheta + \frac{\ell}{2}mg\ell\cos\vartheta - \frac{k}{2}\xi^2 + c.$$

Le posizioni di equilibrio sono quindi date dal sistema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial \xi} = mg\operatorname{sen}\vartheta - k\xi = 0 \\ \dfrac{\partial U}{\partial \vartheta} = mg\xi\cos\vartheta - \dfrac{1}{2}mg\ell\operatorname{sen}\vartheta = 0 \end{cases}$$

che fornisce:

$$P_1\,(0;0)\,, \quad P_2\,(0;\pi)\,, \quad P_3\left(\frac{\ell}{2}\sqrt{4\lambda^2-1}; \arccos\left(\frac{1}{2\lambda}\right)\right), \quad P_4\left(-\frac{\ell}{2}\sqrt{4\lambda^2-1}; 2\pi - \arccos\left(\frac{1}{2\lambda}\right)\right);$$

affinché esista la ϑ di P_3 e P_4 deve valere la condizione $\lambda > \frac{1}{2}$; per quanto riguarda la ξ, che deve essere compresa tra $-\ell/2$ e $\ell/2$, abbiamo invece la condizione $0 < \lambda < \frac{\sqrt{2}}{2}$ e quindi complessivamente P_3 e P_4 sono posizioni di equilibrio se $\frac{1}{2} < \lambda < \frac{\sqrt{2}}{2}$.

2. Per valutare la stabilità delle posizioni di equilibrio determiniamo l'hessiano:

$$\mathcal{H}(\xi,\vartheta) = \begin{bmatrix} -k & mg\cos\vartheta \\ mg\cos\vartheta & -mg\xi\operatorname{sen}\vartheta - \dfrac{1}{2}mg\ell\cos\vartheta \end{bmatrix}$$

e lo calcoliamo nelle posizioni di equilibrio trovate.

L'hessiano calcolato in P_1 è

$$\mathcal{H}(P_1) = \begin{bmatrix} -k & mg \\ mg & -\frac{1}{2}mg\ell \end{bmatrix};$$

la traccia è evidentemente negativa, il determinante invece risulta

$$\det \mathcal{H}(P_1) = \frac{1}{2}mgk\ell - m^2g^2,$$

quindi è positivo se $\lambda < \dfrac{1}{2}$ e in questo caso P_1 risulta una posizione di equilibrio stabile.
L'hessiano calcolato in P_2 è

$$\mathcal{H}(P_2) = \begin{bmatrix} -k & -mg \\ -mg & \frac{1}{2}mg\ell \end{bmatrix};$$

il determinante risulta

$$\det \mathcal{H}(P_2) = -\frac{1}{2}mgk\ell - m^2g^2,$$

quindi sempre negativo, e P_2 risulta una posizione di equilibrio instabile.
L'hessiano calcolato in P_3, dopo qualche conto, è

$$\mathcal{H}(P_3) = \begin{bmatrix} -k & \dfrac{k\ell}{2} \\ \dfrac{k\ell}{2} & -\frac{1}{2}mg\ell\sqrt{4\lambda^2-1} - \frac{1}{4}k\ell^2 \end{bmatrix};$$

la traccia è evidentemente negativa, il determinante risulta

$$\det \mathcal{H}(P_3) = \frac{1}{2}mgk\ell\sqrt{4\lambda^2-1},$$

quindi sempre positivo, e P_3 risulta una posizione di equilibrio stabile.
L'hessiano calcolato in P_4, dopo qualche conto, è

$$\mathcal{H}(P_4) = \begin{bmatrix} -k & \dfrac{k\ell}{2} \\ \dfrac{k\ell}{2} & \frac{1}{2}mg\ell\sqrt{4\lambda^2-1} - \frac{1}{4}k\ell^2 \end{bmatrix};$$

il determinante risulta

$$\det \mathcal{H}(P_4) = -\frac{1}{2}mgk\ell\sqrt{4\lambda^2-1},$$

quindi sempre negativo, e P_4 risulta una posizione di equilibrio instabile.
3. Abbiamo una posizione di confine quando $B \equiv Q$, cioè quando $\xi = \dfrac{\ell}{2}$, e quindi cerchiamo una posizione del tipo $\overline{P}_1\left(\dfrac{\ell}{2};\overline{\vartheta}\right)$ con $w_\xi \leq 0$ e $w_\vartheta \in \mathbb{R}$.

Dalla disuguaglianza
$$\left.\frac{\partial U}{\partial \xi}\right|_{\overline{P}_1} w_\xi + \left.\frac{\partial U}{\partial \vartheta}\right|_{\overline{P}_1} w_\vartheta \leq 0$$
otteniamo il sistema
$$\begin{cases} mg\,\mathrm{sen}\,\overline{\vartheta} - \dfrac{k\ell}{2} \geq 0 \\ \dfrac{1}{2}mg\ell\cos\overline{\vartheta} - \dfrac{1}{2}mg\ell\,\mathrm{sen}\,\overline{\vartheta} = 0; \end{cases}$$
dalla seconda equazione troviamo $\overline{\vartheta}_1 = \dfrac{\pi}{4}$, che verifica la prima disequazione se $\lambda \geq \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, e $\overline{\vartheta}_2 = \dfrac{5}{4}\pi$ che non verifica la prima disequazione per nessun valore di λ.
Abbiamo quindi trovato la posizione di equilibrio di confine $\overline{P}_1\left(\dfrac{\ell}{2}; \dfrac{\pi}{4}\right)$ se $\lambda \geq \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.
Abbiamo un'altra posizione di confine quando $A \equiv P$, cioè quando $\xi = -\dfrac{\ell}{2}$, e quindi cerchiamo una posizione del tipo $\overline{P}_2\left(-\dfrac{\ell}{2}; \overline{\vartheta}\right)$ con $w_\xi \geq 0$ e $w_\vartheta \in \mathbb{R}$.
Dalla disuguaglianza
$$\left.\frac{\partial U}{\partial \xi}\right|_{\overline{P}_2} w_\xi + \left.\frac{\partial U}{\partial \vartheta}\right|_{\overline{P}_2} w_\vartheta \leq 0$$
otteniamo il sistema
$$\begin{cases} mg\,\mathrm{sen}\,\overline{\vartheta} + \dfrac{k\ell}{2} \leq 0 \\ -\dfrac{1}{2}mg\ell\cos\overline{\vartheta} - \dfrac{1}{2}mg\ell\,\mathrm{sen}\,\overline{\vartheta} = 0; \end{cases}$$
dalla seconda equazione troviamo $\overline{\vartheta}_3 = \dfrac{3}{4}\pi$, che non verifica la prima disequazione per nessun valore di λ, e $\overline{\vartheta}_4 = \dfrac{7}{4}\pi$ che verifica la prima disequazione se $\lambda \geq \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.
Abbiamo quindi trovato la posizione di equilibrio di confine $\overline{P}_2\left(-\dfrac{\ell}{2}; \dfrac{7}{4}\pi\right)$ se $\lambda \geq \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.
4. Calcoliamo l'energia cinetica:
$$K = K_{PQ} + K_{quad},$$
data dalla somma dell'energia cinetica dell'asta e di quella del quadrato. L'asta ha come punto fisso l'origine e quindi, essendo $\boldsymbol{\omega} = -\dot{\vartheta}\boldsymbol{e}_z$, la sua energia cinetica è
$$K_{PQ} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega} \cdot \mathsf{J}_O\boldsymbol{\omega} = \frac{m\ell^2}{6}\dot{\vartheta}^2.$$
Per l'energia cinetica della lamina quadrata usiamo invece la formula completa
$$K_{quad} = \frac{1}{2}mv_G^2 + \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega} \cdot \mathsf{J}_G\boldsymbol{\omega}.$$

Calcoliamo la velocità del baricentro

$$\boldsymbol{v}_G = \left(\dot{\xi}\cos\vartheta - \xi\dot{\vartheta}\,\mathrm{sen}\,\vartheta - \frac{\ell}{2}\dot{\vartheta}\cos\vartheta\right)\boldsymbol{e}_x + \left(-\dot{\xi}\,\mathrm{sen}\,\vartheta - \xi\dot{\vartheta}\cos\vartheta + \frac{\ell}{2}\dot{\vartheta}\,\mathrm{sen}\,\vartheta\right)\boldsymbol{e}_y$$

e quindi il suo modulo al quadrato sarà

$$v_G^2 = \dot{\xi}^2 + \xi^2\dot{\vartheta}^2 + \frac{\ell^2}{4}\dot{\vartheta}^2 - \ell\dot{\xi}\dot{\vartheta}.$$

Inoltre, ricordando che nel caso piano ci basta $J_G^{33} = \dfrac{m\ell^2}{6}$ nel caso della lamina quadrata e tenendo conto che la velocità angolare coincide con quella calcolata precedentemente, possiamo scrivere l'energia cinetica:

$$K_{quad} = \frac{1}{2}m\dot{\xi}^2 + \frac{1}{2}m\xi^2\dot{\vartheta}^2 + \frac{5}{24}m\ell^2\dot{\vartheta}^2 - \frac{1}{2}m\ell\dot{\xi}\dot{\vartheta}.$$

L'energia cinetica totale risulta quindi

$$K = \frac{1}{2}m\dot{\xi}^2 + \frac{9}{24}m\ell^2\dot{\vartheta}^2 + \frac{1}{2}m\xi^2\dot{\vartheta}^2 - \frac{1}{2}m\ell\dot{\xi}\dot{\vartheta}$$

e la lagrangiana, data da $K + U$, è

$$\mathcal{L} = mg\xi\,\mathrm{sen}\,\vartheta + \frac{\ell}{2}mg\ell\cos\vartheta - \frac{k}{2}\xi^2 + \frac{1}{2}m\dot{\xi}^2 + \frac{9}{24}m\ell^2\dot{\vartheta}^2 + \frac{1}{2}m\xi^2\dot{\vartheta}^2 - \frac{1}{2}m\ell\dot{\xi}\dot{\vartheta}.$$

2) Indichiamo con G_1, G_2, G_3 i baricentri rispettivamente delle aste AB, BC, BD. Tenendo conto che le aste sono omogenee e quindi il loro baricentro coincide con il punto medio, otteniamo:

$$x_{G_1} = \sqrt{2}\ell\,\mathrm{sen}\,\alpha + \ell, \qquad x_{G_2} \equiv x_{G_3} = \frac{\sqrt{2}}{2}\ell\,\mathrm{sen}\,\alpha;$$

l'ascissa del baricentro complessivo è quindi

$$x_G = \frac{2m\left(\sqrt{2}\ell\,\mathrm{sen}\,\alpha + \ell\right) + m\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\ell\,\mathrm{sen}\,\alpha + m\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\ell\,\mathrm{sen}\,\alpha}{4m} = \frac{5}{4}\ell$$

da cui otteniamo $\mathrm{sen}\,\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ e quindi $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$.

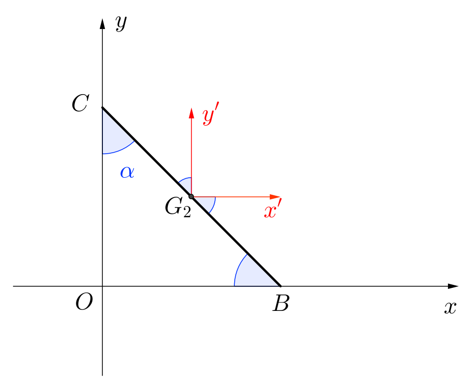
Procediamo ora con il calcolo della matrice d'inerzia. Osserviamo che i piani xy e xz sono di simmetria materiale e quindi $J_{12} = J_{13} = J_{23} = 0$. Calcoliamo i momenti d'inerzia 11 e 22 ricordando di spostarli nel sistema di riferimento centrato in O con Huygens-Steiner.

- Asta AB:

* $J_O^{11} = 0$

* $J_O^{22} = \frac{2}{3}m\ell^2 + 2m(2\ell)^2 = \frac{14}{3}m\ell^2.$

- Asta BC: come indicato in figura dobbiamo spostarci dal sistema di riferimento centrato in G_2 a quello centrato in O



* $J_{G_2}^{11} = J_{G_2}^{22} = \frac{m(\sqrt{2}\ell)^2}{12}\operatorname{sen}^2\frac{\pi}{4} = \frac{m\ell^2}{12}$

* $J_O^{11} = J_O^{22} = \frac{m\ell^2}{12} + m\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\ell \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{m\ell^2}{3}.$

- Asta BD: si procede in modo analogo all'asta BC e quindi

* $J_O^{11} = J_O^{22} = \frac{m\ell^2}{3}.$

I momenti d'inerzia della figura completa sono quindi:

$$J_O^{11} = 0 + \frac{m\ell^2}{3} \cdot 2 = \frac{2}{3}m\ell^2, \qquad J_O^{22} = \frac{14}{3}m\ell^2 + \frac{m\ell^2}{3} \cdot 2 = \frac{16}{3}m\ell^2,$$

$$J_O^{33} = J_O^{11} + J_O^{22} = \frac{2}{3}m\ell^2 + \frac{16}{3}m\ell^2 = 6m\ell^2,$$

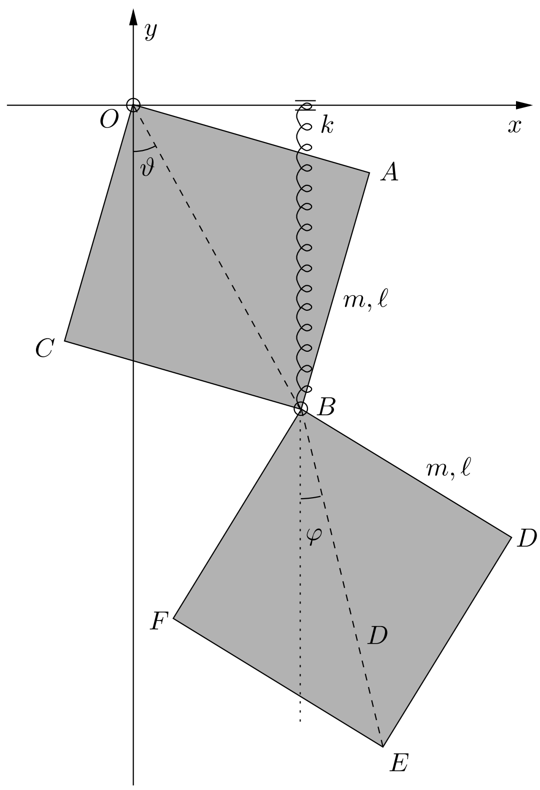
e la matrice d'inerzia risulta

$$\mathsf{J}_O = \begin{bmatrix} \frac{2}{3}m\ell^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{16}{3}m\ell^2 & 0 \\ 0 & 0 & 6m\ell^2 \end{bmatrix}.$$

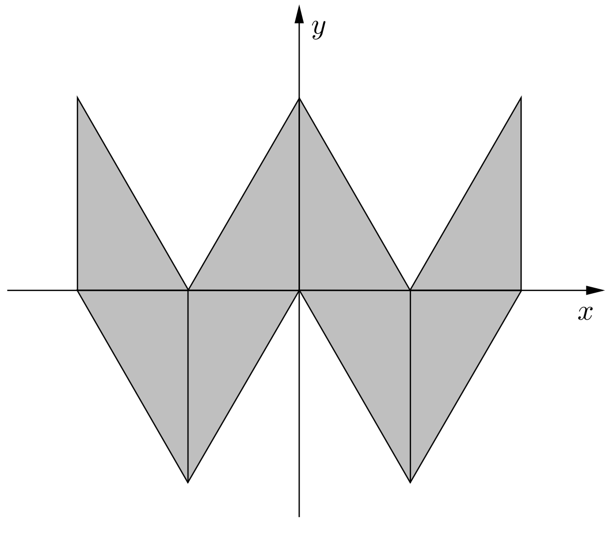
Prova scritta di Meccanica Analitica
6 settembre 2019

1) Una lamina quadrata $OABC$ omogenea di massa m e lato ℓ è libera di ruotare attorno al suo vertice fisso O, origine di un riferimento cartesiano ortogonale Oxy. Al vertice B della lamina opposto ad O è agganciato il vertice di una seconda lamina quadrata $BDEF$, identica alla prima, che può ruotare liberamente attorno a B.
Su tutto il sistema agisce la forza peso e sul vertice B agisce una forza elastica sempre verticale di coefficiente $k > 0$ e polo sull'asse x. Supposti i vincoli lisci, si chiede di:

1. trovare le posizioni di equilibrio ordinarie del sistema;
2. discuterne la stabilità;
3. determinare l'energia cinetica del sistema;
4. scrivere le equazioni del moto.



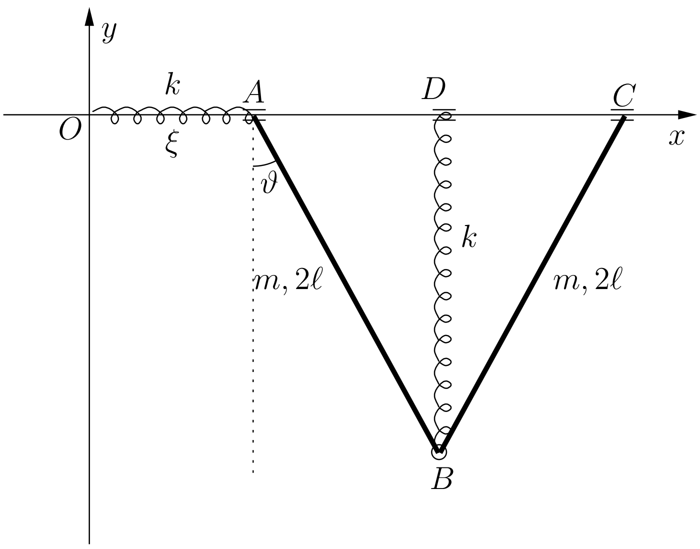
2) La lamina piana rappresentata in figura è formata da otto triangoli emiequilateri (ovvero con gli angoli di 30, 60, 90) uguali, ognuno di massa m e ipotenusa 2ℓ. Se ne calcoli la matrice d'inerzia rispetto al sistema di riferimento indicato (l'asse z è uscente dal foglio).



Prova scritta di Meccanica Analitica
20 settembre 2019

1) Un'asta AB di massa m e lunghezza 2ℓ è libera di ruotare attorno al proprio estremo A, che scorre sull'asse orizzontale di un riferimento cartesiano ortogonale Oxy. All'estremo B è vincolata una seconda asta BC, uguale alla prima, che può ruotare liberamente attorno a B e ha l'estremo C anch'esso vincolato a scorrere sull'asse x.
Su tutto il sistema agisce la forza peso; inoltre sull'estremo A agisce una forza elastica di coefficiente $k > 0$ e polo l'origine, mentre sull'estremo comune B agisce una forza elastica sempre verticale di coefficiente $k > 0$ e polo sull'asse x. Supposti i vincoli lisci e posto $\lambda = \frac{mg}{k\ell}$, si chiede di:

1. trovare le posizioni di equilibrio ordinarie del sistema al variare di λ;
2. discuterne la stabilità in funzione di λ;
3. determinare l'energia cinetica del sistema;
4. scrivere la lagrangiana linearizzata attorno a una posizione di equilibrio stabile..



2) La lamina piana rappresentata in figura è formata da due corone circolari tangenti esternamente, una di raggi $R, 2R$ e l'altra di raggi $2R, 3R$. Se ne calcoli la matrice d'inerzia rispetto al sistema di riferimento indicato (l'asse z è uscente dal foglio), sapendo che la massa totale della figura è m.