Risoluzione della prova di Meccanica Analitica del 16 luglio 2021

I) 1. Scegliamo come parametri l'angolo ϑ (in verso antiorario) dell'asta con la verticale e l'ascissa ξ del baricentro G relativamente all'asta (indicati nel disegno). Si ha $\xi \in [-2\ell, 2\ell]$.
Si ha

$$
\begin{aligned}
&(G-O) = \xi \sin\vartheta \boldsymbol{e}_x - \xi\cos\vartheta \boldsymbol{e}_y,\\
&(G-F) = (G-O)+(O-F) = \xi\sin\vartheta\boldsymbol{e}_x - \xi\cos\vartheta\boldsymbol{e}_y - \ell\boldsymbol{e}_y = \xi\sin\vartheta\boldsymbol{e}_x - (\ell+\xi\cos\vartheta)\boldsymbol{e}_y,\\
&|G-F|^2 = \xi^2 + 2\ell\xi\cos\vartheta + \ell^2
\end{aligned}
$$

quindi il potenziale è dato da

$$
U = -mgy_G - \frac{1}{2}k|G-F|^2 = mg\xi\cos\vartheta - \frac{1}{2}k(\xi^2 + 2\ell\xi\cos\vartheta) + \text{cost.}
$$

Le posizioni di equilibrio si trovano nei punti stazionari del potenziale:

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial U}{\partial \xi} = mg\cos\vartheta - k\xi - k\ell\cos\vartheta = 0\\[2mm]
\dfrac{\partial U}{\partial \vartheta} = -mg\xi\sin\vartheta + k\ell\xi\sin\vartheta = 0.
\end{cases}
$$

Dalla seconda raccogliamo $\xi\sin\vartheta$, da cui

$$
\sin\vartheta = 0 \quad \vee \quad \xi = 0
$$

(ricordando che $mg \neq k\ell$). Sostituendo nella prima si ha:

$$
\begin{aligned}
&\xi = 0 &&\Rightarrow \quad \cos\vartheta = 0 \quad \Rightarrow \quad \vartheta = \pm\frac{\pi}{2}\\
&\vartheta = 0 &&\Rightarrow \quad \xi = \frac{mg-k\ell}{k} = (\lambda-1)\ell\\
&\vartheta = \pi &&\Rightarrow \quad \xi = \frac{k\ell-mg}{k} = (1-\lambda)\ell.
\end{aligned}
$$

Quindi abbiamo quattro posizioni di equilibrio:

$$
P_1(0,\pi/2), \quad P_2(0,-\pi/2), \quad P_3((\lambda-1)\ell, 0), \quad P_4((1-\lambda)\ell,\pi).
$$

Le prime due sono sempre accettabili, mentre per $P_{3,4}$ bisogna imporre $\xi \in (-2\ell, 2\ell)$, dunque

$$
|\lambda - 1| < 2 \quad \text{da cui} \quad \lambda < 3.
$$

2. Calcoliamo la matrice hessiana del potenziale:

$$
\mathcal{H} = \begin{bmatrix} -k & (k\ell-mg)\sin\vartheta\\ (k\ell-mg)\sin\vartheta & (k\ell-mg)\xi\cos\vartheta \end{bmatrix}
$$

e dunque

$$
\mathcal{H}(P_1) = \begin{bmatrix} -k & k\ell-mg\\ k\ell-mg & 0 \end{bmatrix}
$$

che ha sempre determinante negativo, quindi P_1 è instabile. Lo stesso avviene per P_2.
Posto $\lambda < 3$, calcoliamo

$$
\mathcal{H}(P_3) = \begin{bmatrix} -k & 0\\ 0 & (k\ell-mg)\ell(\lambda-1) \end{bmatrix};
$$

un autovalore è sempre negativo, mentre per l'altro si ha

$$
(k\ell-mg)\ell(\lambda-1) = k\ell^2(1-\lambda)(\lambda-1) = -k\ell^2(1-\lambda)^2 < 0
$$

e quindi anche l'altro è sempre negativo. Quindi P_3 è stabile quando esiste (cioè per $\lambda < 3$).

Infine,
$$\mathcal{H}(P_4) = \begin{bmatrix} -k & 0 \\ 0 & -(k\ell - mg)\ell(1-\lambda) \end{bmatrix}$$
e il secondo autovalore è
$$-(k\ell - mg)\ell(1-\lambda) = -k\ell^2(1-\lambda)^2 < 0$$
per cui anche P_4 è stabile quando esiste.

3. Si hanno le posizioni di confine $(\pm 2\ell, \vartheta)$. Nel caso $\xi = -2\ell$ si ha $w_\xi \geqslant 0$ e quindi
$$\begin{cases} (mg - k\ell)\cos\vartheta + 2k\ell \leqslant 0 \\ -2\ell \sin\vartheta(k\ell - mg) = 0 \end{cases}$$
da cui
$$\begin{aligned} \vartheta = 0 \quad &\Rightarrow \quad mg - k\ell + 2k\ell \leqslant 0 \quad \Rightarrow \quad mg + k\ell \leqslant 0 \quad \text{mai} \\ \vartheta = \pi \quad &\Rightarrow \quad -mg + k\ell + 2k\ell \leqslant 0 \quad \Rightarrow \quad 3k\ell \leqslant mg \quad \text{per } \lambda \geqslant 3 \end{aligned}$$
quindi abbiamo trovato la posizione di equilibrio di confine $(-2\ell, \pi)$ valida per $\lambda \geqslant 3$.
Allo stesso modo, per $\xi = 2\ell$ si ha $w_\xi \leqslant 0$ e quindi
$$\begin{cases} (mg - k\ell)\cos\vartheta - 2k\ell \geqslant 0 \\ 2\ell \sin\vartheta(k\ell - mg) = 0 \end{cases}$$
da cui
$$\begin{aligned} \vartheta = 0 \quad &\Rightarrow \quad mg - k\ell - 2k\ell \geqslant 0 \quad \Rightarrow \quad mg \geqslant 3k\ell \quad \text{per } \lambda \geqslant 3 \\ \vartheta = \pi \quad &\Rightarrow \quad -mg - 2k\ell + k\ell \geqslant 0 \quad \Rightarrow \quad mg + k\ell \leqslant 0 \quad \text{mai} \end{aligned}$$
quindi abbiamo trovato un'altra posizione di equilibrio di confine $(2\ell, 0)$ valida sempre per $\lambda \geqslant 3$.

4. La velocità angolare di entrambi i corpi rigidi è $-\dot{\vartheta}\boldsymbol{e}_z$. L'asta PQ ha un punto fisso, quindi
$$K_{\text{asta}} = \frac{1}{2}\frac{1}{12}m(4\ell)^2\dot{\vartheta}^2 = \frac{2}{3}m\ell^2\dot{\vartheta}^2$$
Per la lamina quadrata usiamo il Teorema di König:
$$K_{\text{lam}} = \frac{1}{2}m|\boldsymbol{v}_G|^2 + \frac{1}{2}J^G_{zz}\dot{\vartheta}^2.$$
Poiché
$$\boldsymbol{v}_G = (\dot{\xi}\sin\vartheta + \xi\dot{\vartheta}\cos\vartheta)\boldsymbol{e}_x - (\dot{\xi}\cos\vartheta - \xi\dot{\vartheta}\sin\vartheta)\boldsymbol{e}_y,$$
si ha $|\boldsymbol{v}_g|^2 = \dot{\xi}^2 + \xi^2\dot{\vartheta}^2$ e dunque
$$K_{\text{lam}} = \frac{1}{2}m(\dot{\xi}^2 + \xi^2\dot{\vartheta}^2) + \frac{1}{2}\frac{1}{6}m\ell^2\dot{\vartheta}^2.$$
Dunque
$$K = K_{\text{asta}} + K_{\text{lam}} = \frac{2}{3}m\ell^2\dot{\vartheta}^2 + \frac{1}{2}m(\dot{\xi}^2 + \xi^2\dot{\vartheta}^2) + \frac{1}{2}\frac{1}{6}m\ell^2\dot{\vartheta}^2 = \frac{1}{2}m\dot{\xi}^2 + \frac{1}{2}m\xi^2\dot{\vartheta}^2 + \frac{3}{4}m\ell^2\dot{\vartheta}^2.$$

II) L'asta è centrata nel suo baricentro ed è inclinata di $\pi/4$, e la lunghezza è $L = 4\ell$, quindi la sua matrice d'inerzia è
$$J_{\text{asta}} = \begin{bmatrix} mL^2/24 & -mL^2/24 & 0 \\ -mL^2/24 & mL^2/24 & 0 \\ 0 & 0 & mL^2/12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2m\ell^2/3 & -2m\ell^2/3 & 0 \\ -2m\ell^2/3 & 2m\ell^2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 4m\ell^2/3 \end{bmatrix}.$$

La matrice baricentrale della lamina, poiché ha struttura giroscopica e quindi non cambia per rotazioni nel piano, è

$$J_G = \begin{bmatrix} m\ell^2/12 & 0 & 0 \\ 0 & m\ell^2/12 & 0 \\ 0 & 0 & m\ell^2/6 \end{bmatrix}.$$

Ora usiamo il teorema di Huygens-Steiner con $\boldsymbol{d} = (G - O) = \ell\sqrt{2}/2\boldsymbol{e}_x + \ell\sqrt{2}/2\boldsymbol{e}_y$, da cui $d^2 = \ell^2$:

$$J_{\text{lam}} = J_G + \begin{bmatrix} m\ell^2/2 & -m\ell^2/2 & 0 \\ -m\ell^2/2 & m\ell^2/2 & 0 \\ 0 & 0 & \ell^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7m\ell^2/12 & -m\ell^2/2 & 0 \\ -m\ell^2/2 & 7m\ell^2/12 & 0 \\ 0 & 0 & 7m\ell^2/6 \end{bmatrix}.$$

Quindi risulta

$$J_O = \begin{bmatrix} 5m\ell^2/4 & -7m\ell^2/6 & 0 \\ -7m\ell^2/6 & 5m\ell^2/4 & 0 \\ 0 & 0 & 5m\ell^2/2 \end{bmatrix}.$$