Risoluzione della prova di Meccanica Analitica del 10 settembre 2021

I) 1. Scegliamo come parametri l'angolo ϑ (in verso antiorario) dell'asta OA con la verticale discendente e l'ascissa ξ del punto B relativamente alla medesima asta (indicati nel disegno). Si ha $\xi \in [0, 2\ell]$. Denotando con G_1 il baricentro dell'asta OA, con G_2 quello dell'asta BC e con D il polo della forza elastica, troviamo

$$
\begin{aligned}
&(G_1 - O) = \ell \sin\vartheta \boldsymbol{e}_x - \ell\cos\vartheta \boldsymbol{e}_y,\\
&(G_2 - B) = \ell\cos\vartheta \boldsymbol{e}_x + \ell \sin\vartheta \boldsymbol{e}_y,\\
&(B - O) = \xi \sin\vartheta \boldsymbol{e}_x - \xi\cos\vartheta \boldsymbol{e}_y,\\
&(G_2 - O) = (G_2 - B) + (B - O) = (\ell\cos\vartheta + \xi\sin\vartheta)\boldsymbol{e}_x + (\ell\sin\vartheta - \xi\cos\vartheta)\boldsymbol{e}_y,\\
&|D - B|^2 = \xi^2\cos^2\vartheta,
\end{aligned}
$$

quindi il potenziale è dato da

$$
U = -mgy_{G_1} - mgy_{G_2} - \frac{1}{2}k|D-B|^2 = mg\ell\cos\vartheta - mg\ell\sin\vartheta + mg\xi\cos\vartheta - \frac{1}{2}k\xi^2\cos^2\vartheta + \text{cost.}
$$

Le posizioni di equilibrio si trovano nei punti stazionari del potenziale:

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial U}{\partial \xi} = mg\cos\vartheta - k\xi\cos^2\vartheta = 0\\
\dfrac{\partial U}{\partial \vartheta} = -mg\ell\sin\vartheta - mg\ell\cos\vartheta - mg\xi\sin\vartheta + k\xi^2\sin\vartheta\cos\vartheta = 0.
\end{cases}
$$

Dalla prima raccogliamo $\cos\vartheta$, da cui

$$
\cos\vartheta = 0 \quad \vee \quad k\xi\cos\vartheta = mg.
$$

Sostituendo nella seconda si ha:

$$
\begin{aligned}
&\vartheta = \pi/2 \quad \Rightarrow \quad m - g\ell - mg\ell\xi = 0 \quad \Rightarrow \quad \xi = -\ell \quad \text{non acc.}\\
&\vartheta = 3\pi/2 \quad \Rightarrow \quad mg\ell + mg\ell\xi = 0 \quad \Rightarrow \quad \xi = -\ell \quad \text{non acc.}\\
&k\xi\cos\vartheta = mg \quad \Rightarrow \quad -mg\ell\sin\vartheta - mg\ell\cos\vartheta - mg\xi\sin\vartheta + mg\xi\sin\vartheta = 0.
\end{aligned}
$$

L'ultima equazione diventa $\sin\vartheta + \cos\vartheta = 0$, da cui $\vartheta = 3\pi/4$ o $\vartheta = -\pi/4$. Nel primo caso risulta $\xi < 0$ che non è accettabile, nel secondo si ha

$$
\xi = \frac{mg}{k}\sqrt{2},
$$

che è accettabile quando $\sqrt{2}mg/k < 2\ell$, ovvero per $\lambda < \sqrt{2}$.
Quindi abbiamo una sola posizione di equilibrio:

$$
P\Big(\frac{mg}{k}\sqrt{2}, -\frac{\pi}{4}\Big) \quad \text{per } \lambda < \sqrt{2}.
$$

2. Calcoliamo la matrice hessiana del potenziale:

$$
\mathcal{H} = \begin{bmatrix} -k\cos^2\vartheta & -mg\sin\vartheta + 2k\xi\sin\vartheta\cos\vartheta \\ -mg\sin\vartheta + 2k\xi\sin\vartheta\cos\vartheta & mg(-\ell\cos\vartheta + \ell\sin\vartheta - \xi\cos\vartheta) + k\xi^2(\cos^2\vartheta - \sin^2\vartheta) \end{bmatrix}
$$

e dunque

$$
\mathcal{H}(P) = \begin{bmatrix} -k/2 & -mg\sqrt{2}/2 \\ -mg\sqrt{2}/2 & -mg\ell\sqrt{2} - m^2g^2/k \end{bmatrix}.
$$

La traccia dell'hessiano è negativa, mentre il determinante si scrive

$$
mgkl/sqrt2/2 + m^2g^2/2 - m^2g^2/2 = mgkl/sqrt2/2 > 0
$$

quindi la posizione di equilibrio P è sempre stabile quando esiste (ovvero per $\lambda < \sqrt{2}$).

3. Si hanno le due famiglie di posizioni di confine $(0,\vartheta)$ e $(2\ell,\vartheta)$. Nel caso $\xi=0$ si ha $w_\xi \geqslant 0$ e quindi

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial \xi} = mg\cos\vartheta \leqslant 0 \\ \dfrac{\partial U}{\partial \vartheta} = -mg\ell\sin\vartheta - mg\ell\cos\vartheta = 0 \end{cases}$$

da cui

$$\vartheta = \frac{3}{4}\pi$$

quindi abbiamo trovato la posizione di equilibrio di confine $(0, 3\pi/4)$ valida per ogni λ.
Allo stesso modo, per $\xi = 2\ell$ si ha $w_\xi \leqslant 0$ e quindi

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial \xi} = mg\cos\vartheta - 2k\ell\cos^2\vartheta \geqslant 0 \\ \dfrac{\partial U}{\partial \vartheta} = -mg\ell\sin\vartheta - mg\ell\cos\vartheta - 2mg\ell\sin\vartheta + 4k\ell^2\sin\vartheta\cos\vartheta = 0. \end{cases}$$

Dalla seconda si ha

$$-3mg\sin\vartheta - mg\cos\vartheta + 4k\ell\sin\vartheta\cos\vartheta = 0$$

ma purtroppo questa equazione trigonometrica è di difficile soluzione (si può dimostrare che per $\lambda \geqslant \sqrt{2}$ si ha sempre una posizione di equilibrio di confine $(2\ell, \overline{\vartheta})$, con $7\pi/4 \leqslant \overline{\vartheta} < 2\pi$).

4. La velocità angolare di entrambi i corpi rigidi è $\dot\vartheta \boldsymbol{e}_z$. L'asta OA ha un punto fisso nell'estremo O, quindi

$$K_{OA} = \frac{1}{2}\frac{1}{3}m(2\ell)^2\dot\vartheta^2 = \frac{2}{3}m\ell^2\dot\vartheta^2$$

Per l'asta BC usiamo il Teorema di König:

$$K_{BC} = \frac{1}{2}m|\boldsymbol{v}_{G_2}|^2 + \frac{1}{2}J_{zz}^{G_2}\dot\vartheta^2.$$

Poiché

$$\boldsymbol{v}_{G_2} = (-\ell\dot\vartheta\sin\vartheta + \dot\xi\sin\vartheta + \xi\dot\vartheta\cos\vartheta)\boldsymbol{e}_x + (\ell\dot\vartheta\cos\vartheta - \dot\xi\cos\vartheta + \xi\dot\vartheta\sin\vartheta)\boldsymbol{e}_y,$$

si ha $|\boldsymbol{v}_{G_2}|^2 = \ell^2\dot\vartheta^2 + \dot\xi^2 + \xi^2\dot\vartheta^2 - 2\ell\dot\xi\dot\vartheta$ e dunque

$$K_{BC} = \frac{1}{2}m(\ell^2\dot\vartheta^2 + \dot\xi^2 + \xi^2\dot\vartheta^2 - 2\ell\dot\xi\dot\vartheta) + \frac{1}{2}\frac{1}{12}m(2\ell)^2\dot\vartheta^2 = \frac{2}{3}m\ell^2\dot\vartheta^2 + \frac{1}{2}m(\dot\xi^2 + \xi^2\dot\vartheta^2 - 2\ell\dot\xi\dot\vartheta).$$

Dunque

$$K = K_O + K_{BC} = \frac{2}{3}m\ell^2\dot\vartheta^2 + \frac{2}{3}m\ell^2\dot\vartheta^2 + \frac{1}{2}m(\dot\xi^2 + \xi^2\dot\vartheta^2 - 2\ell\dot\xi\dot\vartheta) = \frac{4}{3}m\ell^2\dot\vartheta^2 + \frac{1}{2}m(\dot\xi^2 + \xi^2\dot\vartheta^2 - 2\ell\dot\xi\dot\vartheta).$$

II) La densità della figura è data dal rapporto tra la massa e l'area, quindi

$$\rho = \frac{m}{\ell^2 - \frac{\pi\ell^2}{4}} = \frac{m}{\ell^2}\frac{4}{4-\pi}.$$

Quindi la massa della lamina quadrata piena vale $m_Q = \rho\ell^2$ mentre quella del foro circolare vale $m_D = \rho\pi\ell^2/4$.
Calcoliamo la matrice d'inerzia J_G in un sistema baricentrale parallelo a quello in figura, considerando che il baricentro G della lamina sta nel centro del foro circolare. Si ha

$$J_{11}^G = J_{22}^G = \frac{1}{12}m_Q\ell^2 - \frac{1}{4}m_D\frac{\ell^2}{4} = \frac{1}{4}\rho\ell^4\left(\frac{1}{3} - \frac{\pi}{16}\right) = \frac{16-3\pi}{48(4-\pi)}m\ell^2,$$

mentre J_{33}^G vale il doppio, essendo la somma dei due, e i prodotti d'inerzia sono nulli.

Ora spostiamo la matrice in O mediante il teorema di Huygens-Steiner: si ha $\boldsymbol{d} = (G-O) = (\ell/\sqrt{2}, \ell/\sqrt{2}, 0)$, da cui $d^2 = \ell^2$ e

$$m(d^2 \mathsf{I} - \boldsymbol{d} \otimes \boldsymbol{d}) = \begin{bmatrix} m\ell^2/2 & -m\ell^2/2 & 0 \\ -m\ell^2/2 & m\ell^2/2 & 0 \\ 0 & 0 & m\ell^2 \end{bmatrix}.$$

Quindi risulta

$$J_O = J_G + m(d^2 \mathsf{I} - \boldsymbol{d} \otimes \boldsymbol{d}) = \begin{bmatrix} \frac{16-3\pi}{48(4-\pi)} m\ell^2 + m\ell^2/2 & -m\ell^2/2 & 0 \\ -m\ell^2/2 & \frac{16-3\pi}{48(4-\pi)} m\ell^2 + m\ell^2/2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{16-3\pi}{24(4-\pi)} m\ell^2 + m\ell^2 \end{bmatrix}.$$