Risoluzione della prova di Meccanica Analitica del 14 gennaio 2022

I) 1. Scegliamo come parametri lagrangiani l'angolo ϑ (in verso antiorario) indicato nel testo e l'ordinata $\xi = y_C$ del centro del disco. Si ha

$$
\begin{aligned}
&(C - O) = \xi \boldsymbol{e}_y,\\
&(P - O) = (P - C) + (C - O) = R\sin\vartheta \boldsymbol{e}_x - R\cos\vartheta \boldsymbol{e}_y + \xi \boldsymbol{e}_y = R\sin\vartheta \boldsymbol{e}_x + (\xi - R\cos\vartheta)\boldsymbol{e}_y\\
&|P - O|^2 = R^2 + \xi^2 - 2R\xi\cos\vartheta,
\end{aligned}
$$

quindi il potenziale è dato da

$$
U = -mgy_C - mgy_P - \frac{1}{2}k|P - O|^2 = -2mg\xi + mgR\cos\vartheta - \frac{1}{2}k\xi^2 + kR\xi\cos\vartheta + \text{cost.}
$$

Le posizioni di equilibrio si trovano nei punti stazionari del potenziale:

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial U}{\partial \xi} = -2mg - k\xi + kR\cos\vartheta = 0\\[2mm]
\dfrac{\partial U}{\partial \vartheta} = -mgR\sin\vartheta - kR\xi\sin\vartheta = 0.
\end{cases}
$$

Dalla seconda raccogliamo $\sin\vartheta$, da cui

$$
\sin\vartheta = 0 \quad \vee \quad \xi = -\frac{mg}{k}.
$$

Sostituendo nella prima si ha:

$$
\begin{aligned}
&\vartheta = 0 \quad \Rightarrow \quad -2mg - k\xi + kR = 0 \quad \Rightarrow \quad \xi = R - \frac{2mg}{k} \quad \Rightarrow \quad P_1\left(R - \frac{2mg}{k}, 0\right);\\
&\vartheta = \pi \quad \Rightarrow \quad -2mg - k\xi - kR = 0 \quad \Rightarrow \quad \xi = -R - \frac{2mg}{k} \quad \Rightarrow \quad P_2\left(-R - \frac{2mg}{k}, \pi\right);\\
&\xi = -\frac{mg}{k} \quad \Rightarrow \quad -2mg + mg + kR\cos\vartheta = 0 \quad \Rightarrow \quad \cos\vartheta = \lambda.
\end{aligned}
$$

Se $\lambda < 1$, l'ultima equazione fornisce altre due posizioni di equilibrio:

$$
P_3\left(-\frac{mg}{k}, \arccos\lambda\right), \quad P_4\left(-\frac{mg}{k}, 2\pi - \arccos\lambda\right).
$$

Quindi si hanno quattro posizioni di equilibrio per $\lambda < 1$ e due posizioni per $\lambda \geqslant 1$.

2. Calcoliamo la matrice hessiana del potenziale:

$$
\mathcal{H} = \begin{bmatrix} -k & -kR\sin\vartheta \\ -kR\sin\vartheta & -(mg + k\xi)R\cos\vartheta \end{bmatrix}.
$$

Si ha

$$
\mathcal{H}(P_1) = \begin{bmatrix} -k & 0 \\ 0 & -(mg + kR - 2mg)R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k & 0 \\ 0 & -(-mg + kR)R \end{bmatrix}
$$

e quindi P_1 è stabile per $-mg + kR > 0$, ovvero per $\lambda < 1$.
Procediamo con P_2:

$$
\mathcal{H}(P_2) = \begin{bmatrix} -k & 0 \\ 0 & (mg - kR - 2mg)R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k & 0 \\ 0 & (-mg - kR)R \end{bmatrix}
$$

e quindi P_2 è sempre stabile.
Nel caso $\lambda < 1$ abbiamo anche

$$
\mathcal{H}(P_{3,4}) = \begin{bmatrix} -k & \mp kR\sqrt{1-\lambda^2} \\ \mp kR\sqrt{1-\lambda^2} & 0 \end{bmatrix},
$$

che ha determinante negativo, quindi $P_{3,4}$ sono instabili quando esistono.

3. Calcoliamo la velocità di P:

$$\boldsymbol{v}_P = \frac{d}{dt}(P-O) = R\dot\vartheta\cos\vartheta\boldsymbol{e}_x + (\dot\xi + R\dot\vartheta\sin\vartheta)\boldsymbol{e}_y \quad \Rightarrow \quad v_P^2 = \dot\xi^2 + R^2\dot\vartheta^2 + 2R\dot\xi\dot\vartheta\sin\vartheta.$$

Quindi l'energia cinetica del punto P è data da

$$K_P = \frac{1}{2}mv_P^2 = \frac{1}{2}m(\dot\xi^2 + R^2\dot\vartheta^2 + 2R\dot\xi\dot\vartheta\sin\vartheta).$$

La velocità angolare del disco è $\dot\vartheta\boldsymbol{e}_z$ e usando il Teorema di König si ha

$$K_{\text{disco}} = \frac{1}{2}mv_C^2 + \frac{1}{2}J_{zz}^C\dot\vartheta^2.$$

Poiché

$$v_C = \dot\xi\boldsymbol{e}_y, \quad J_{zz}^C = \frac{1}{2}mR^2.$$

si ha

$$K_{\text{disco}} = \frac{1}{2}m\dot\xi^2 + \frac{1}{4}mR^2\dot\vartheta^2.$$

Dunque

$$K = K_P + K_{\text{disco}} = \frac{1}{2}m(\dot\xi^2 + R^2\dot\vartheta^2 + 2R\dot\xi\dot\vartheta\sin\vartheta) + \frac{1}{2}m\dot\xi^2 + \frac{1}{4}mR^2\dot\vartheta^2 = m\dot\xi^2 + \frac{3}{4}mR^2\dot\vartheta^2 + mR\dot\xi\dot\vartheta\sin\vartheta.$$

Per scrivere la matrice $\mathbb{K}$ basta raccogliere $\frac{1}{2}$ e scrivere la matrice della forma quadratica in $\dot{\boldsymbol{q}} = (\dot\xi, \dot\vartheta)$:

$$K = \frac{1}{2}\left(2m\dot\xi^2 + \frac{3}{2}mR^2\dot\vartheta^2 + 2mR\dot\xi\dot\vartheta\sin\vartheta\right),$$

da cui

$$\mathbb{K} = \begin{bmatrix} 2m & mR\sin\vartheta \\ mR\sin\vartheta & \frac{3}{2}mR^2 \end{bmatrix}.$$

II) La figura piana ha un asse di simmetria, quindi la matrice d'inerzia è diagonale. Suddividiamo la figura in un quadrato centrale e due triangoli emiquadrati. Essendo l'area del quadrato il doppio di quella dei triangoli, si avrà, con notazione ovvia,

$$m_T = m, \quad m_Q = 2m.$$

Per il quadrato si ha

$$J^Q = \text{diag}\left(\frac{1}{3}m_Q\ell^2, \frac{1}{12}m_Q\ell^2, \frac{5}{12}m_Q\ell^2\right) = \text{diag}\left(\frac{2}{3}m\ell^2, \frac{1}{6}m\ell^2, \frac{5}{6}m\ell^2\right).$$

Per ogni triangolo si ha

$$J_{11}^T = \frac{1}{6}m\ell^2,$$

mentre per l'asse verticale bisogna usare il Teorema di Steiner (ricordandosi di passare per il baricentro): denotando con A il vertice dell'angolo retto, si ha

$$J_O = J_G + m|G-O|^2 = J_A - m|G-A|^2 + m|G-O|^2,$$

dove

$$J_A = \frac{1}{6}m\ell^2, \quad |G-A| = \frac{\ell}{3}, \quad |G-O| = \frac{\ell}{2} + \frac{\ell}{3} = \frac{5}{6}\ell.$$

Quindi

$$J_{22}^T = \frac{1}{6}m\ell^2 + m\ell^2\left(\frac{25}{36} - \frac{1}{9}\right) = \frac{1}{6}m\ell^2 + \frac{7}{12}m\ell^2 = \frac{3}{4}m\ell^2.$$

Risulta

$$J^T = \text{diag}\left(\frac{1}{6}m\ell^2, \frac{3}{4}m\ell^2, \frac{11}{12}m\ell^2\right),$$

e quindi in totale

$$J = J^Q + 2J^T = \text{diag}\left(m\ell^2, \frac{5}{3}m\ell^2, \frac{8}{3}m\ell^2\right).$$