Risoluzione della prova di Meccanica Analitica del 10 giugno 2022

I) 1. Usando i parametri indicati nel testo, si ha $\varphi, \vartheta \in [0, 2\pi)$.

Denotando con G il baricentro della lamina, troviamo

$$\begin{aligned}
&z_G = -\frac{\ell}{2}\cos\vartheta, \\
&(P-O) = \ell\cos\varphi \boldsymbol{e}_x + \ell\sin\varphi \boldsymbol{e}_y, \\
&(P-D) = (P-O) + (O-D) = \ell\cos\varphi \boldsymbol{e}_x + \ell(\sin\varphi - 1)\boldsymbol{e}_y, \\
&|P-D|^2 = 2\ell^2 - 2\ell^2\sin\varphi,
\end{aligned}$$

quindi il potenziale è dato da

$$U = -mgz_G - mgz_P - \frac{1}{2}k|P-D|^2 = mg\frac{\ell}{2}\cos\vartheta + k\ell^2\sin\varphi + \text{cost.}$$

Notiamo che il punto P si muove in un piano orizzontale, dunque la sua forza peso non contribuisce al potenziale.

Le posizioni di equilibrio si trovano risolvendo

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial \vartheta} = -mg\dfrac{\ell}{2}\sin\vartheta = 0 \\ \dfrac{\partial U}{\partial \varphi} = k\ell^2\cos\varphi = 0, \end{cases}$$

da cui subito troviamo le posizioni $(0, \frac{\pi}{2})$, $(0, \frac{3}{2}\pi)$, $(\pi, \frac{\pi}{2})$, $(\pi, \frac{3}{2}\pi)$.

Calcolando la matrice hessiana del potenziale, che è diagonale,

$$\mathcal{H} = \begin{bmatrix} -mg\frac{\ell}{2}\cos\vartheta & 0 \\ 0 & -k\ell^2\sin\varphi \end{bmatrix}$$

e dunque l'unica posizione stabile è $(0, \frac{\pi}{2})$.

2. Calcoliamo subito l'energia cinetica del punto P:

$$\boldsymbol{v}_P = \frac{d}{dt}(P-O) = -\ell\dot\varphi\sin\varphi \boldsymbol{e}_x + \ell\dot\varphi\cos\varphi \boldsymbol{e}_y \quad \Rightarrow \quad K_P = \frac{1}{2}m|\boldsymbol{v}_P|^2 = \frac{1}{2}m\ell^2\dot\varphi^2.$$

Per la lamina conviene mettersi in un sistema di riferimento $Ox'y'z'$ in cui $\boldsymbol{e}_{x'}$ è lungo $(A-O)$, $\boldsymbol{e}_{y'}$ è lungo $(C-O)$ e $\boldsymbol{e}_{z'}$ perpendicolare alla lamina. In questo sistema di riferimento la matrice d'inerzia si scrive

$$J_O = \begin{bmatrix} \frac{m\ell^2}{3} & -\frac{m\ell^2}{4} & 0 \\ -\frac{m\ell^2}{4} & \frac{m\ell^2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2m\ell^2}{3} \end{bmatrix}.$$

Per la velocità angolare vale la decomposizione

$$\boldsymbol{\omega} = -\dot\vartheta \boldsymbol{e}_{x'} + \dot\varphi \boldsymbol{e}_z$$

e poiché $\boldsymbol{e}_z$ è perpendicolare a $\boldsymbol{e}_{x'}$, vale

$$\boldsymbol{e}_z = -\cos\vartheta \boldsymbol{e}_{y'} + \sin\vartheta \boldsymbol{e}_{z'}.$$

Quindi

$$\boldsymbol{\omega} = -\dot\vartheta \boldsymbol{e}_{x'} - \dot\varphi\cos\vartheta \boldsymbol{e}_{y'} + \dot\varphi\sin\vartheta \boldsymbol{e}_{z'}.$$

Visto che la lamina ha il punto O fisso, la sua energia cinetica è data da

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}\cdot J_O\boldsymbol{\omega} &= \frac{1}{2}\left(\frac{m\ell^2}{3}\dot\vartheta^2 + \frac{m\ell^2}{3}\dot\varphi^2\cos^2\vartheta + \dot\varphi^2\sin^2\vartheta\frac{2m\ell^2}{3} - \frac{m\ell^2}{2}\dot\vartheta\dot\varphi\cos\vartheta\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{m\ell^2}{3}\dot\vartheta^2 + \frac{m\ell^2}{3}\dot\varphi^2(1+\sin^2\vartheta) - \frac{m\ell^2}{2}\dot\vartheta\dot\varphi\cos\vartheta\right).
\end{aligned}$$

3. La posizione stabile è $(0, \frac{\pi}{2})$. La matrice dell'energia cinetica nella posizione di equilibrio è data da

$$J = \begin{bmatrix} \frac{m\ell^2}{3} & -\frac{m\ell^2}{4} \\ -\frac{m\ell^2}{4} & \frac{m\ell^2}{3} \end{bmatrix}$$

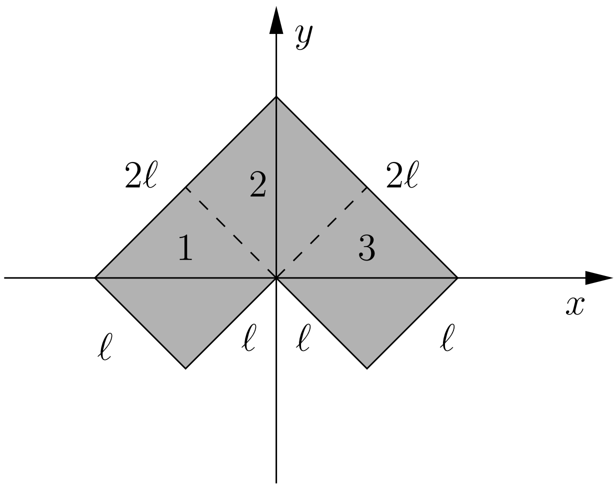
mentre l'hessiano del potenziale vale

$$\mathcal{H} = \begin{bmatrix} -mg\frac{\ell}{2} & 0 \\ 0 & -k\ell^2 \end{bmatrix},$$

quindi la lagrangiana approssimata si scrive

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathcal{L}} &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \dot\vartheta & \dot\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{m\ell^2}{3} & -\frac{m\ell^2}{4} \\ -\frac{m\ell^2}{4} & \frac{m\ell^2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot\vartheta \\ \dot\varphi \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \vartheta & \varphi - \frac{\pi}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -mg\frac{\ell}{2} & 0 \\ 0 & -k\ell^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vartheta \\ \varphi - \frac{\pi}{2} \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{m\ell^2}{3}\dot\vartheta^2 + \frac{m\ell^2}{3}\dot\varphi^2 - \frac{m\ell^2}{2}\dot\vartheta\dot\varphi - \frac{mg\ell}{2}\vartheta^2 - k\ell^2\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right)^2 \right). \end{aligned}$$

II) Poiché l'asse y è di simmetria materiale, la matrice risulterà diagonale. Conviene suddividere la lamina in tre lamine quadrate come mostrato in figura. La massa di ogni quadrato sarà m e il lato ℓ.



Ricordiamo poi che una lamina quadrata omogenea di lato ℓ e massa m ha matrice d'inerzia baricentrale data da $J_G = \mathrm{diag}(m/\ell^2/12, m/\ell^2/12, m/\ell^2/6)$. Quindi si ha

$$J^1_{O11} = J^3_{O11} = J^2_{O22} = \frac{m\ell^2}{12}.$$

Per calcolare gli altri momenti d'inerzia, usiamo il Teorema di Steiner, con $|d| = \ell\sqrt{2}/2$:

$$J^1_{O22} = J^3_{O22} = J^2_{O11} = \frac{m\ell^2}{12} + \frac{m\ell^2}{2} = \frac{7}{12}m\ell^2.$$

Quindi si ha

$$\begin{aligned} J_{O11} &= J^1_{O11} + J^2_{O11} + J^3_{O11} = 2\frac{m\ell^2}{12} + \frac{7}{12}m\ell^2 = \frac{3}{4}m\ell^2, \\ J_{O22} &= J^1_{O22} + J^2_{O22} + J^3_{O22} = \frac{m\ell^2}{12} + 2\frac{7}{12}m\ell^2 = \frac{5}{4}m\ell^2. \end{aligned}$$

Infine, poiché la lamina è piana, si ha $J_{O33} = J_{O11} + J_{O22}$, quindi $J_{O33} = 2m\ell^2$. In definitiva, risulta

$$J_O = \mathrm{diag}\left(\frac{3}{4}m\ell^2, \frac{5}{4}m\ell^2, 2m\ell^2\right).$$