Risoluzione della prova di Meccanica Analitica del 9 giugno 2023

I) 1. Usiamo i parametri ξ, ϑ indicati nel testo.

Denotando con C il centro del disco e con G il punto medio dell'asta, troviamo

$$\begin{aligned}
(D-O) &= (D-A)+(A-O) = (\xi - 4R\cos\vartheta)\boldsymbol{e}_x - 4R\sin\vartheta\boldsymbol{e}_y,\\
(C-O) &= (\xi - 3R\cos\vartheta)\boldsymbol{e}_x - 3R\sin\vartheta\boldsymbol{e}_y,\\
(G-O) &= (\xi - R\cos\vartheta)\boldsymbol{e}_x - R\sin\vartheta\boldsymbol{e}_y,
\end{aligned}$$

mentre la lunghezza al quadrato della molla vale

$$|D-O|^2 = \xi^2 + 16R^2 - 8R\xi\cos\vartheta.$$

Quindi il potenziale è dato da

$$U = -mgy_G - mgy_C - \frac{1}{2}k|D-O|^2 = 4mgR\sin\vartheta - \frac{k}{2}\left(\xi^2 - 8R\xi\cos\vartheta\right) + \text{cost.}$$

Le posizioni di equilibrio si trovano risolvendo

$$\begin{cases}
\dfrac{\partial U}{\partial \xi} = -k\xi + 4kR\cos\vartheta = 0\\
\dfrac{\partial U}{\partial \vartheta} = 4mgR\cos\vartheta - 4kR\xi\sin\vartheta = 0
\end{cases}$$

Dalla prima equazione si ha $\xi = 4R\cos\vartheta$, che sostituito nella seconda dà

$$4R\cos\vartheta(mg - 4kR\xi\sin\vartheta) = 0.$$

Ponendo $\cos\vartheta = 0$ si trovano le posizioni $P_1(0, \pi/2)$ e $P_2(0, 3\pi/2)$; altrimenti si ha

$$\sin\vartheta = \frac{\lambda}{4}$$

che ha soluzioni diverse dalle precedenti solo per $\lambda < 4$. In questo caso, ponendo $\alpha = \arcsin\frac{\lambda}{4}$ si trovano le soluzioni

$$P_3 = (R\sqrt{16-\lambda^2}, \alpha), \quad P_4 = (-R\sqrt{16-\lambda^2}, \pi - \alpha)$$

Calcolando la matrice hessiana del potenziale troviamo

$$\mathcal{H} = \begin{bmatrix} -k & -4kR\sin\vartheta \\ -4kR\sin\vartheta & -4mgR\sin\vartheta - 4kR\xi\cos\vartheta \end{bmatrix},$$

e quindi risulta

$$\mathcal{H}(P_1) = \begin{bmatrix} -k & -4kR \\ -4kR & -4mgR \end{bmatrix}, \quad \mathcal{H}(P_2) = \begin{bmatrix} -k & 4kR \\ 4kR & 4mgR \end{bmatrix}.$$

La seconda ha determinante negativo e quindi è sempre instabile, mentre la prima, avendo sempre traccia negativa, risulta stabile per

$$\det\mathcal{H}(P_1) > 0 \quad \Rightarrow \quad 4kmgR > 16k^2R^2 \quad \Rightarrow \quad \lambda > 4.$$

Nel caso $\lambda < 4$ abbiamo altre due posizioni di equilibrio:

$$\mathcal{H}(P_{3,4}) = \begin{bmatrix} -k & -kR\lambda \\ -kR\lambda & -mgR\lambda - kR^2(16-\lambda^2) \end{bmatrix}.$$

Con qualche conto si vede che per $\lambda < 4$ la traccia è negativa e il determinante positivo, quindi le posizioni $P_{3,4}$ sono stabili quando esistono.

2. Per l'energia cinetica usiamo il Teorema di König, tenendo conto che il baricentro del corpo sta in B e si ha

$$(B-O) = (\xi - 2R\cos\vartheta)\boldsymbol{e}_x - 2R\sin\vartheta\boldsymbol{e}_y.$$

Il moto è piano, quindi basta calcolare J_{zz} in B:

$$J_{zz} = J_{zz}^{\text{asta}} + J_{zz}^{\text{disco}} = \frac{4}{3}mR^2 + \frac{3}{2}mR^2 = \frac{17}{6}mR^2.$$

Si ha poi

$$\boldsymbol{v}_B = (\dot{\xi} + 2R\dot{\vartheta}\sin\vartheta)\boldsymbol{e}_x - 2R\dot{\vartheta}\cos\vartheta\boldsymbol{e}_y \quad \Rightarrow \quad |\boldsymbol{v}_B|^2 = \dot{\xi}^2 + 4R^2\dot{\vartheta}^2 + 4R\dot{\xi}\dot{\vartheta}\sin\vartheta,$$

quindi

$$K(\xi,\vartheta,\dot{\xi},\dot{\vartheta}) = \frac{1}{2}M|\boldsymbol{v}_B|^2 + \frac{1}{2}J_{zz}\omega^2 = m\dot{\xi}^2 + \frac{65}{12}mR^2\dot{\vartheta}^2 + 4mR\dot{\xi}\dot{\vartheta}\sin\vartheta.$$

La matrice $\mathbb{K}$ è tale che $K = \frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{q}}\cdot\mathbb{K}\dot{\boldsymbol{q}}$, quindi

$$\mathbb{K} = \begin{bmatrix} 2m & 4mR\sin\vartheta \\ 4mR\sin\vartheta & \frac{65}{6}mR^2 \end{bmatrix}.$$

3. Mettendo insieme energia cinetica e potenziale si trova

$$\mathcal{L} = K + U = m\dot{\xi}^2 + \frac{65}{12}mR^2\dot{\vartheta}^2 + 4mR\dot{\xi}\dot{\vartheta}\sin\vartheta + 4mgR\sin\vartheta - \frac{k}{2}\left(\xi^2 - 8R\xi\cos\vartheta\right) + \text{cost}.$$

Calcoliamo le equazioni di Lagrange:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\xi}} = 2m\dot{\xi} + 4mR\dot{\vartheta}\sin\vartheta \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\xi}} = 2m\ddot{\xi} + 4mR\ddot{\vartheta}\sin\vartheta + 4mR\dot{\vartheta}^2\cos\vartheta \\
&\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\vartheta}} = \frac{65}{6}mR^2\dot{\vartheta} + 4mR\dot{\xi}\sin\vartheta \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\vartheta}} = \frac{65}{6}mR^2\ddot{\vartheta} + 4mR\ddot{\xi}\sin\vartheta + 4mR\dot{\xi}\dot{\vartheta}\cos\vartheta \\
&\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\xi} = -k\xi + 4kR\cos\vartheta \\
&\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\vartheta} = 4mR\dot{\xi}\dot{\vartheta}\cos\vartheta + 4mgR\cos\vartheta - 4kR\xi\sin\vartheta
\end{aligned}$$

quindi si trova

$$\begin{cases} 2m\ddot{\xi} + 4mR\ddot{\vartheta}\sin\vartheta + 4mR\dot{\vartheta}^2\cos\vartheta + k\xi - 4kR\cos\vartheta = 0 \\ \dfrac{65}{6}mR^2\ddot{\vartheta} + 4mR\ddot{\xi}\sin\vartheta - 4mgR\cos\vartheta + 4kR\xi\sin\vartheta = 0. \end{cases}$$

II) Il corpo ha un asse di simmetria (quello verticale), quindi i prodotti d'inerzia sono nulli.

Manca il raggio del disco: dal Teorema della corda si ha

$$\ell = 2R\sin 60^\circ \quad \Rightarrow \quad R = \frac{\ell}{\sqrt{3}}.$$

Usando il Teorema di Steiner si trova subito

$$J^{\text{circ}} = \operatorname{diag}\left(\frac{3}{2}mR^2, \frac{1}{2}mR^2, 2mR^2\right) = \operatorname{diag}\left(\frac{1}{2}m\ell^2, \frac{1}{6}m\ell^2, \frac{2}{3}m\ell^2\right).$$

Per le aste inclinate bisogna moltiplicare i rispettivi momenti d'inerzia per $\cos^2 30^\circ$ (asse orizzontale) e $\sin^2 30^\circ$ (asse verticale), dunque

$$J^{\text{asta1}} + J^{\text{asta2}} = \operatorname{diag}\left(\frac{2}{3}m\ell^2\cos^2 30^\circ, \frac{2}{3}m\ell^2\sin^2 30^\circ, \frac{2}{3}m\ell^2\right) = \operatorname{diag}\left(\frac{1}{2}m\ell^2, \frac{1}{6}m\ell^2, \frac{2}{3}m\ell^2\right).$$

Curiosamente, la matrice d'inerzia del disco e del corpo costituito dalle due aste risultano uguali nel sistema di riferimento indicato.

Risulta quindi

$$J = \operatorname{diag}\left(m\ell^2, \frac{1}{3}m\ell^2, \frac{4}{3}m\ell^2\right). \qquad \square$$