Risoluzione della prova di Meccanica Analitica del 19 luglio 2024

I) 1. Scegliamo come parametri lagrangiani l'ordinata $\xi = -y_A$ dell'estremo A cambiata di segno e l'angolo $\vartheta = A\widehat{O}B$ antiorario tra la parte negativa dell'asse y e l'asta. Non si hanno posizioni di confine.

Si ha

$$\begin{aligned}
&(A-O) = -\xi \boldsymbol{e}_y,\\
&(G-O) = (G-A) + (A-O) = \ell \sin\vartheta \boldsymbol{e}_x + (\ell\cos\vartheta - \xi)\boldsymbol{e}_y,\\
&(G-D) = (\ell\cos\vartheta - \xi)\boldsymbol{e}_y,
\end{aligned}$$

quindi

$$U = -mgy_G - mgy_P - \frac{1}{2}k|A-O|^2 - \frac{1}{2}k|G-D|^2 = -mg\ell\cos\vartheta + mg\xi - \frac{k}{2}\xi^2 - \frac{k}{2}(\xi - \ell\cos\vartheta)^2.$$

Le posizioni di equilibrio si trovano risolvendo

$$\begin{cases}
\dfrac{\partial U}{\partial \xi} = mg - k\xi - k(\xi - \ell\cos\vartheta) = 0 = mg - 2k\xi + k\ell\cos\vartheta = 0\\
\dfrac{\partial U}{\partial \vartheta} = mg\ell\sin\vartheta - k(\xi - \ell\cos\vartheta)\ell\sin\vartheta = 0.
\end{cases}$$

Raccogliamo $\sin\vartheta$ nella seconda equazione: se $\vartheta = 0$, sostituendo nella prima si ha

$$mg - 2k\xi + k\ell = 0 \quad \Rightarrow \quad \xi = \frac{mg + k\ell}{2k} = \frac{\lambda+1}{2}\ell;$$

se invece $\vartheta = \pi$, si ottiene

$$mg - 2k\xi - k\ell = 0 \quad \Rightarrow \quad \xi = \frac{mg - k\ell}{2k} = \frac{\lambda-1}{2}\ell.$$

Quindi abbiamo trovato le due posizioni di equilibrio

$$P_1\left(\frac{\lambda+1}{2}\ell; 0\right), \quad P_2\left(\frac{\lambda-1}{2}\ell; \pi\right).$$

Ora possiamo semplificare $\ell\sin\vartheta$ nella seconda equazione, ottenendo

$$mg - k(\xi - \ell\cos\vartheta) = 0 \quad \Rightarrow \quad mg - k\xi + k\ell\cos\vartheta = 0$$

che, sostituito nella prima, dà $\xi = 0$, da cui

$$\cos\vartheta = -\lambda.$$

Poiché questa equazione ammette soluzione solo per $\lambda < 1$ (nel caso $\lambda = 1$ si ritrova la posizione P_2), troviamo altre due posizioni di equilibrio

$$P_{3,4}\left(0; \pm\arccos(-\lambda)\right) \quad \text{per } \lambda < 1.$$

2. Calcolando la matrice hessiana del potenziale troviamo

$$\mathcal{H} = \begin{bmatrix} -2k & -k\ell\sin\vartheta \\ -k\ell\sin\vartheta & mg\ell\cos\vartheta - k\ell\xi\cos\vartheta + k\ell^2(\cos^2\vartheta - \sin^2\vartheta) \end{bmatrix}.$$

Quindi risulta

$$\mathcal{H}(P_1) = \begin{bmatrix} -2k & 0 \\ 0 & mg\ell - k\ell^2\frac{\lambda+1}{2} + k\ell^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2k & 0 \\ 0 & k\ell^2\frac{\lambda+1}{2} \end{bmatrix}$$

che non è definita, quindi P_1 è instabile.

Per P_2 si ha

$$\mathcal{H}(P_2) = \begin{bmatrix} -2k & 0 \\ 0 & -mg\ell + k\ell^2\frac{\lambda-1}{2} + k\ell^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2k & 0 \\ 0 & k\ell^2\frac{\lambda-1}{2} \end{bmatrix}$$

e quindi P_2 è stabile per $\lambda > 1$ e instabile per $\lambda < 1$.

Infine, per $P_{3,4}$ si ha

$$\mathcal{H}(P_{3,4}) = \begin{bmatrix} -2k & \pm k\ell\sqrt{1-\lambda^2} \\ \pm k\ell\sqrt{1-\lambda^2} & -\lambda mg\ell + k\ell^2 + k\ell^2(2\lambda^2-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2k & \pm k\ell\sqrt{1-\lambda^2} \\ \pm k\ell\sqrt{1-\lambda^2} & \lambda^2 k\ell^2 \end{bmatrix}.$$

Per $\lambda < 1$, che è la condizione di esistenza di $P_{3,4}$, si ha $\det\mathcal{H}(P_{3,4}) < 0$ e quindi le posizioni sono instabili quando esistono.

3. Vogliamo trovare la lagrangiana del sistema: per trovare l'energia cinetica usiamo il Teorema di König. L'asta non ha punti fissi, quindi usiamo G:

$$K = \frac{1}{2}m|\boldsymbol{v}_G|^2 + \frac{1}{2}J_G^{33}\omega^2.$$

Si ha

$$\boldsymbol{v}_G = \ell\dot\vartheta\cos\vartheta\boldsymbol{e}_x - (\ell\dot\vartheta\sin\vartheta + \dot\xi)\boldsymbol{e}_y \quad\Rightarrow\quad |\boldsymbol{v}_G|^2 = \dot\xi^2 + \ell^2\dot\vartheta^2 + 2\ell\dot\xi\dot\vartheta\sin\vartheta.$$

Inoltre

$$J_G^{33} = \frac{1}{12}mL^2 = \frac{1}{12}m(2\ell)^2 = \frac{1}{3}m\ell^2.$$

Quindi

$$K = \frac{1}{2}m\left(\dot\xi^2 + \ell^2\dot\vartheta^2 + 2\ell\dot\xi\dot\vartheta\sin\vartheta + \frac{1}{3}\ell^2\dot\vartheta^2\right) = \frac{1}{2}m\left(\dot\xi^2 + \frac{4}{3}\ell^2\dot\vartheta^2 + 2\ell\dot\xi\dot\vartheta\sin\vartheta\right).$$

La lagrangiana si ottiene da $\mathcal{L} = K + U$, quindi

$$\mathcal{L}(\xi,\vartheta,\dot\xi,\dot\vartheta) = \frac{1}{2}m\left(\dot\xi^2 + \frac{4}{3}\ell^2\dot\vartheta^2 + 2\ell\dot\xi\dot\vartheta\sin\vartheta\right) + -mg\ell\cos\vartheta + mg\xi - \frac{k}{2}\xi^2 - \frac{k}{2}(\xi - \ell\cos\vartheta)^2$$

e la matrice dell'energia cinetica è

$$\mathbb{K}(\xi,\vartheta) = \begin{bmatrix} m & m\ell\sin\vartheta \\ m\ell\sin\vartheta & \frac{4}{3}m\ell^2 \end{bmatrix}.$$

Le equazioni differenziali del moto si ottengono nel solito modo.

II) La matrice d'inerzia di ognuna delle due lamine quadrate vale

$$J^O_{\text{quad1}} = J^O_{\text{quad2}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}m\ell^2 & \frac{1}{4}m\ell^2 & 0 \\ \frac{1}{4}m\ell^2 & \frac{1}{3}m\ell^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3}m\ell^2 \end{bmatrix},$$

dove notiamo che i prodotti d'inerzia sono positivi poiché le lamine stanno nel secondo e quarto quadrante.

Calcoliamo ora la matrice d'inerzia baricentrale di una delle due aste (anche queste sono uguali). Ricordando la formula

$$J^G_{\text{asta}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{12}mL^2\sin^2\vartheta & -\frac{1}{12}mL^2\sin\vartheta\cos\vartheta & 0 \\ -\frac{1}{12}mL^2\sin\vartheta\cos\vartheta & \frac{1}{12}mL^2\cos^2\vartheta & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{12}mL^2 \end{bmatrix}$$

dove nel nostro caso $L = \sqrt{2}\ell$ e $\vartheta = -\pi/4$, si trova

$$J^{G_1}_{\text{asta1}} = J^{G_2}_{\text{asta2}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{12}m\ell^2 & \frac{1}{12}m\ell^2 & 0 \\ \frac{1}{12}m\ell^2 & \frac{1}{12}m\ell^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{6}m\ell^2 \end{bmatrix}.$$

Se ora spostiamo col teorema di Huygens-Steiner la prima matrice in O, poiché

$$\boldsymbol{d} = (G_1 - O) = \left(\frac{\ell}{2}, \frac{\ell}{2}, 0\right), \quad d^2 = \frac{\ell^2}{2}, \quad \boldsymbol{d} \otimes \boldsymbol{d} = \begin{bmatrix} \ell^2/4 & \ell^2/4 & 0 \\ \ell^2/4 & \ell^2/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

si ha

$$J^O_{\text{asta1}} = J^{G_1}_{\text{asta1}} + m(d^2 \mathsf{I} - \boldsymbol{d} \otimes \boldsymbol{d}) = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}m\ell^2 & -\frac{1}{6}m\ell^2 & 0 \\ -\frac{1}{6}m\ell^2 & \frac{1}{3}m\ell^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3}m\ell^2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{3}m\ell^2 & -\frac{1}{6}m\ell^2 & 0 \\ -\frac{1}{6}m\ell^2 & \frac{1}{3}m\ell^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3}m\ell^2 \end{bmatrix}$$

Per la seconda asta i conti sono analoghi e risulta la stessa matrice. Notiamo che, correttamente, i prodotti d'inerzia sono negativi.

Ora sommiamo tutto:

$$J_O = J^O_{\text{quad1}} + J^O_{\text{quad2}} + J^O_{\text{asta1}} + J^O_{\text{asta2}} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3}m\ell^2 & \frac{1}{2}m\ell^2 & 0 \\ \frac{1}{2}m\ell^2 & \frac{2}{3}m\ell^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3}m\ell^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{2}{3}m\ell^2 & -\frac{1}{3}m\ell^2 & 0 \\ -\frac{1}{3}m\ell^2 & \frac{2}{3}m\ell^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3}m\ell^2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{4}{3}m\ell^2 & \frac{1}{6}m\ell^2 & 0 \\ \frac{1}{6}m\ell^2 & \frac{4}{3}m\ell^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{8}{3}m\ell^2 \end{bmatrix}.$$