Risoluzione della prova di Meccanica Analitica del 6 settembre 2024

I) 1. Scegliamo come parametri lagrangiani la lunghezza ξ di $(G-O)$ e l'angolo antiorario tra la parte negativa dell'asse y e l'asta OA. Si ha $\xi \in [0, 2\ell]$, quindi ci sono posizioni di confine.

Nel caso $\xi \in (0, 2\ell)$ usiamo il potenziale. Denotando con G_1 il baricentro dell'asta OA, si ha

$$\begin{aligned}
&(G_1 - O) = \ell \sin\vartheta \boldsymbol{e}_x - \ell\cos\vartheta \boldsymbol{e}_y,\\
&(A - O) = 2\ell \sin\vartheta \boldsymbol{e}_x - 2\ell\cos\vartheta \boldsymbol{e}_y,\\
&(G - O) = \xi \sin\vartheta \boldsymbol{e}_x - \xi\cos\vartheta \boldsymbol{e}_y,\\
&(A - D) = (A-O) + (O-D) = 2\ell \sin\vartheta \boldsymbol{e}_x - (\ell + 2\ell\cos\vartheta) \boldsymbol{e}_y.
\end{aligned}$$

Per la lunghezza di $(B-O)$ possiamo procedere in modo semplice usando il Teorema di Pitagora, per cui

$$|B-O|^2 = \xi^2 + \ell^2.$$

Quindi

$$U = -mgy_G - mgy_{G_1} - \frac{1}{2}k|A-D|^2 - \frac{1}{2}k|B-O|^2 = mg\ell\cos\vartheta + mg\xi\cos\vartheta - \frac{k}{2}(4\ell^2\cos\vartheta + \xi^2) + \text{cost.}$$

Le posizioni di equilibrio si trovano risolvendo

$$\begin{cases}
\dfrac{\partial U}{\partial \xi} = mg\cos\vartheta - k\xi = 0\\
\dfrac{\partial U}{\partial \vartheta} = -mg\ell\sin\vartheta - mg\xi\sin\vartheta + 2k\ell^2\sin\vartheta = 0.
\end{cases}$$

Dalla prima abbiamo $\xi = \frac{mg}{k}\cos\vartheta$. Raccogliamo $\sin\vartheta$ nella seconda equazione: se $\vartheta = 0$, si ha $\xi = \frac{mg}{k}$ che è accettabile se sta in $(0, 2\ell)$, quindi per $\lambda < 2$. Se invece $\vartheta = \pi$, si ottiene $\xi = -\frac{mg}{k}$ che è sempre negativo quindi non è mai accettabile.

Quindi abbiamo trovato la posizione di equilibrio

$$P_1\,(\lambda\ell; 0)\,, \quad \text{per } \lambda < 2.$$

Ora possiamo semplificare $\sin\vartheta$ nella seconda equazione e sostituire ξ, ottenendo

$$-mg\ell - \frac{m^2g^2}{k}\cos\vartheta + 2k\ell^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad k\ell^2(-\lambda - \lambda^2\cos\vartheta + 2) = 0.$$

Otteniamo l'equazione trigonometrica

$$\cos\vartheta = \frac{2-\lambda}{\lambda^2};$$

andando a studiare quando ha soluzione, troviamo

$$-1 < \frac{2-\lambda}{\lambda^2} > 1 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases}\lambda^2 - \lambda + 2 > 0\\ \lambda^2 + \lambda - 2 > 0.\end{cases}$$

La prima disequazione è sempre vera, mentre la seconda è vera per $\lambda > 1$. Quindi l'equazione trigonometrica ha soluzioni

$$\vartheta_{1,2} = \pm\arccos\frac{2-\lambda}{\lambda^2} \quad \text{per } \lambda > 1.$$

La corrispondente ξ vale

$$\xi = \lambda\ell\frac{2-\lambda}{\lambda^2} = \ell\frac{2-\lambda}{\lambda}$$

ed è accettabile per

$$0 < \frac{2-\lambda}{\lambda} < 2 \quad \Rightarrow \quad \frac{2}{3} < \lambda < 2.$$

In definitiva, troviamo altre due posizioni di equilibrio

$$P_{2,3}\left(\ell\frac{2-\lambda}{\lambda}; \pm\arccos\frac{2-\lambda}{\lambda^2}\right) \quad \text{per } 1 < \lambda < 2.$$

2. Calcolando la matrice hessiana del potenziale troviamo

$$\mathcal{H} = \begin{bmatrix} -k & 0 \\ 0 & -mg\ell\cos\vartheta - mg\xi\cos\vartheta + 2k\ell^2\cos\vartheta \end{bmatrix}.$$

Quindi risulta

$$\mathcal{H}(P_1) = \begin{bmatrix} -k & 0 \\ 0 & -mg\ell - m^2g^2/k + 2k\ell^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2k & 0 \\ 0 & k\ell^2(-\lambda - \lambda^2 + 2) \end{bmatrix}$$

che è definita negativa per $\lambda^2 + \lambda - 2 > 0$, cioè per $\lambda > 1$ (e la posizione esiste per $\lambda < 2$).

Per $P_{2,3}$ si ha

$$\mathcal{H}(P_{2,3}) = \begin{bmatrix} -k & 0 \\ 0 & \frac{2-\lambda}{\lambda^2}\left(-mg\ell - mg\ell\frac{2-\lambda}{\lambda} + 2k\ell^2\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k & 0 \\ 0 & \frac{2-\lambda}{\lambda^2}k\ell^2\left(-\lambda - (2-\lambda) + 2\right) \end{bmatrix}$$

ma tale matrice ha un autovalore nullo, quindi non possiamo pronunciarci sulla stabilità.

3. Le posizioni di confine si hanno per $\xi = 0$ e per $\xi = 2\ell$.

Per $\xi = 0$ si ha $\dot{\xi} \geqslant 0$, quindi

$$\begin{cases} mg\cos\vartheta \leqslant 0 \\ -mg\ell\sin\vartheta + 2k\ell^2\sin\vartheta = k\ell^2\sin\vartheta(-\lambda + 2) = 0. \end{cases}$$

Se $\lambda = 2$ la seconda è sempre verificata quindi si hanno le infinite posizioni di equilibrio di confine

$$(0, \vartheta) \quad \text{per } -\frac{\pi}{2} \leqslant \vartheta \leqslant \frac{\pi}{2},\ \lambda = 2.$$

Altrimenti si ha $\vartheta = 0$, che non è compatibile con la prima disequazione, e $\vartheta = \pi$, che invece lo è, quindi $(0, \pi)$ è posizione di equilibrio di confine.

Per $\xi = 2\ell$ si ha $\dot{\xi} \leqslant 0$, quindi

$$\begin{cases} mg\cos\vartheta - 2k\ell \geqslant 0 \\ -mg\ell\sin\vartheta - 2mg\ell\sin\vartheta + 2k\ell^2\sin\vartheta = k\ell^2\sin\vartheta(-3\lambda + 2) = 0. \end{cases}$$

Quindi se $\lambda = 2/3$ abbiamo, sostituendo nella prima, $\cos\vartheta \geqslant 3$ che non ha soluzioni. Altrimenti abbiamo $\vartheta = 0, \pi$; per $\vartheta = 0$:

$$mg \geqslant 2k\ell \quad \Rightarrow \quad \lambda \geqslant 2$$

quindi $(2\ell, 0)$ è posizione di equilibrio di confine per $\lambda \geqslant 2$. Se invece $\vartheta = \pi$, si ha $-mg - 2k\ell \geqslant 0$, che non è mai vera.

4. Per trovare l'energia cinetica usiamo il Teorema di König. L'asta OA ha un punto fisso, quindi

$$K_{OA} = \frac{1}{2}J_O^{33}\omega^2 = \frac{1}{2}\frac{1}{3}m(2\ell)^2\dot{\vartheta}^2 = \frac{2}{3}m\ell^2\dot{\vartheta}^2.$$

L'asta BC non ha punti fissi, quindi usiamo G:

$$K_{BC} = \frac{1}{2}m|\boldsymbol{v}_G|^2 + \frac{1}{2}J_G^{33}\omega^2.$$

Si ha

$$\boldsymbol{v}_G = (\dot{\xi}\sin\vartheta + \xi\dot{\vartheta}\cos\vartheta)\boldsymbol{e}_x - (\dot{\xi}\cos\vartheta - \xi\dot{\vartheta}\sin\vartheta)\boldsymbol{e}_y \quad \Rightarrow \quad |\boldsymbol{v}_G|^2 = \dot{\xi}^2 + \xi^2\dot{\vartheta}^2.$$

Inoltre

$$J_G^{33} = \frac{1}{12}m(2\ell)^2 = \frac{1}{3}m\ell^2.$$

Quindi

$$K_{BC} = \frac{1}{2}m(\dot{\xi}^2 + \xi^2\dot{\vartheta}^2) + \frac{1}{6}m\ell^2\dot{\vartheta}^2.$$

In totale si ha

$$K = \frac{2}{3}m\ell^2\dot{\vartheta}^2 + \frac{1}{2}m(\dot{\xi}^2 + \xi^2\dot{\vartheta}^2) + \frac{1}{6}m\ell^2\dot{\vartheta}^2 = \frac{1}{2}m\dot{\xi}^2 + \frac{5}{6}m\ell^2\dot{\vartheta}^2 + \frac{1}{2}m\xi^2\dot{\vartheta}^2$$

e la matrice dell'energia cinetica è

$$\mathbb{K}(\xi) = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m\left(\frac{5}{3}\ell^2 + \xi^2\right) \end{bmatrix}.$$

II) Si trova subito che la trasformazione è canonica se

$$[Q, P] = 2k = 1 \quad \Rightarrow \quad k = \frac{1}{2}.$$

Per trovare una funzione generatrice del primo tipo $F_1(q, Q)$, dobbiamo esplicitare (p, P):

$$\begin{cases} p = \frac{\partial F_1}{\partial q} = \frac{q^3 - Q}{2} \\ P = -\frac{\partial F_1}{\partial Q} = \frac{q}{2}. \end{cases}$$

Dalla prima abbiamo

$$F_1(q, Q) = \frac{q^4}{8} - \frac{qQ}{2} + g(Q)$$

da cui

$$\frac{\partial F_1}{\partial Q} = -\frac{q}{2} + g'(Q) = -\frac{q}{2} \quad \Rightarrow \quad g(Q) = \text{cost}.$$

Quindi $F_1(q, Q) = \frac{q^4}{8} - \frac{qQ}{2} + \text{cost}$.

Per trovare la nuova hamiltoniana, basta invertire la trasformazione:

$$\begin{cases} q = 2P \\ p = \frac{8P^2 - Q}{2}, \end{cases}$$

quindi

$$\widetilde{\mathcal{H}}(Q, P) = \frac{(8P^2 - Q)^2}{8} - (2P)^3.$$