

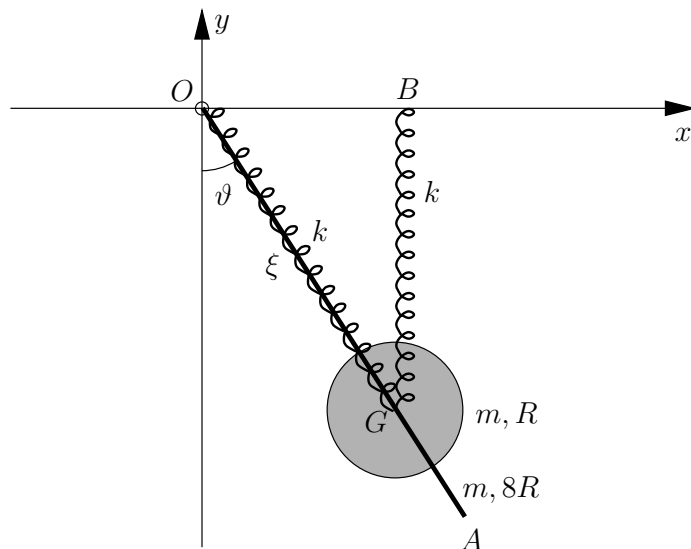
UNIVERSITÀ CATTOLICA DEL SACRO CUORE  
**Prova scritta di Meccanica Analitica - 27 settembre 2024**

I) Un sistema meccanico piano è formato da un'asta omogenea  $OA$  di massa  $m$  e lunghezza  $8R$  su cui scorre il centro di massa  $G$  di un disco omogeneo di massa  $m$  e raggio  $R$ , in modo che  $G$  non possa mai abbandonare l'asta. L'estremo  $O$  è vincolato nell'origine di un sistema di riferimento cartesiano ortogonale  $Oxy$  e l'asta è libera di ruotare attorno ad esso.

Tutto il sistema è soggetto alla forza di gravità; inoltre sul centro  $G$  del disco agiscono due forze elastiche di coefficiente  $k > 0$ : una sempre verticale con polo il punto  $B$  sull'asse  $x$  e l'altra con polo l'origine.

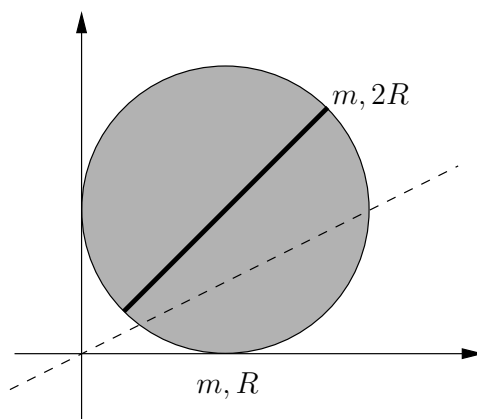
Supposti i vincoli lisci e posto  $\lambda = \frac{mg}{kR}$ , si chiede di:

1. trovare tutte le posizioni di equilibrio del sistema;
2. discuterne la stabilità al variare di  $\lambda$ ;
3. discutere l'esistenza di posizioni di equilibrio di confine;
4. scrivere l'energia cinetica del sistema e la matrice  $\mathbb{K}$  dell'energia cinetica;



II) Si calcoli la matrice d'inerzia della figura, formata da un disco omogeneo di massa  $m$  e raggio  $R$  e un'asta omogenea di massa  $m$  posta su un suo diametro e diretta come la bisettrice del I-III quadrante, rispetto al sistema di riferimento indicato.

Si calcoli poi il momento d'inerzia della figura rispetto alla retta  $x = 2y$ .



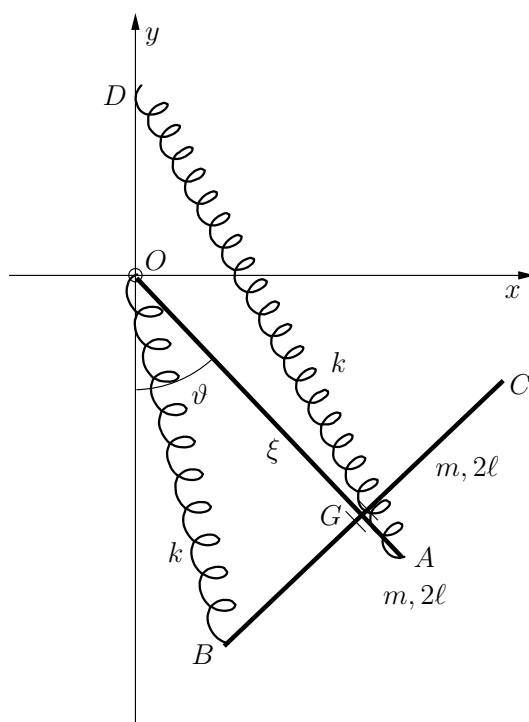
UNIVERSITÀ CATTOLICA DEL SACRO CUORE  
**Prova scritta di Meccanica Analitica - 6 settembre 2024**

I) Un sistema meccanico piano è formato da due aste omogenee, entrambe di massa  $m$  e lunghezza  $2\ell$ . L'asta  $OA$  è libera di ruotare attorno al suo estremo fisso  $O$ , centrato in un riferimento cartesiano ortogonale  $Oxy$ , e su tale asta scorre il centro  $G$  di una seconda asta  $BC$  uguale alla prima e che resta sempre ortogonale a  $OA$ , come in figura.

Su tutto il sistema agisce la forza peso; sull'estremo  $B$  agisce una forza elastica di coefficiente  $k > 0$  e polo l'origine; sull'estremo  $A$  agisce un'altra forza elastica di coefficiente  $k > 0$  e polo il punto  $D(0; \ell)$ .

Supposti i vincoli lisci e posto  $\lambda = \frac{mg}{k\ell}$ , si chiede di:

1. trovare le posizioni di equilibrio ordinarie del sistema;
2. discuterne la stabilità in funzione di  $\lambda$ ;
3. trovare le eventuali posizioni di equilibrio di confine;
4. determinare l'energia cinetica del sistema e la sua matrice  $\mathbb{K}$ .



II) Determinare per quali valori di  $k \in \mathbb{R}$  la trasformazione

$$\begin{cases} Q(q, p) = q^3 - 2p \\ P(q, p) = kq \end{cases}$$

è canonica e trovarne una funzione generatrice del tipo  $F_1(q, Q)$ .

Nel caso in cui si abbia l'hamiltoniana  $\mathcal{H}(q, p) = \frac{p^2}{2} - q^3$ , qual è l'espressione di  $\tilde{\mathcal{H}}(Q, P)$ ?

Durata della prova: 90 minuti. Ricordarsi di scrivere il proprio nome e cognome su tutti i fogli e la matricola sulla prima facciata.

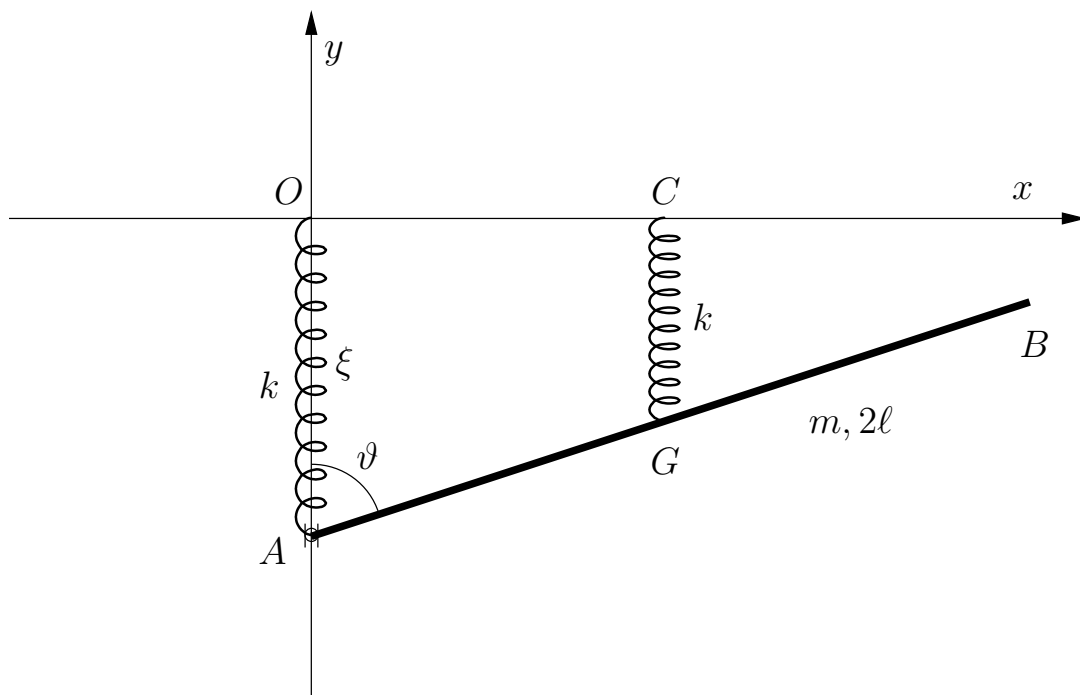
UNIVERSITÀ CATTOLICA DEL SACRO CUORE  
**Prova scritta di Meccanica Analitica - 19 luglio 2024**

I) Un'asta omogenea  $AB$  di massa  $m$  e lato  $2\ell$  è libera di ruotare attorno al vertice  $A$ , che si muove sull'asse verticale di un sistema di riferimento piano  $Oxy$ .

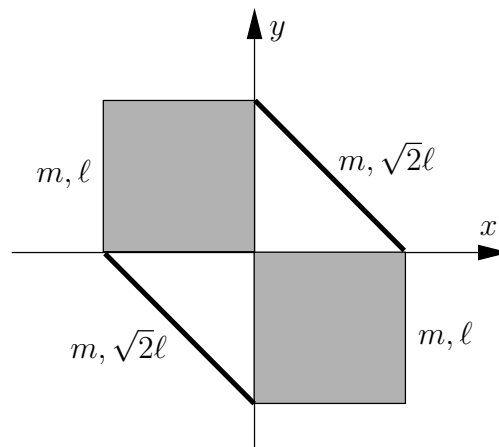
Sul vertice  $A$  e sul centro di massa  $G$  dell'asta agiscono due forze elastiche sempre verticali di coefficiente  $k > 0$  e poli sull'asse delle  $x$ . Inoltre su tutto il sistema agisce la forza peso.

Si chiede di:

1. trovare le posizioni di equilibrio del sistema;
2. discuterne la stabilità al variare di  $\lambda = \frac{mg}{kl}$ ;
3. determinare le equazioni differenziali del moto e la matrice  $\mathbb{K}$  dell'energia cinetica.



II) Si calcoli la matrice d'inerzia del corpo rigido formato da due lamine quadrate omogenee, ognuna di massa  $m$  e lato  $\ell$ , e due aste omogenee, ognuna di massa  $m$  e lato  $\sqrt{2}\ell$ , disposte come in figura, rispetto al sistema di riferimento indicato (l'asse  $z$  è ortogonale al foglio).




---

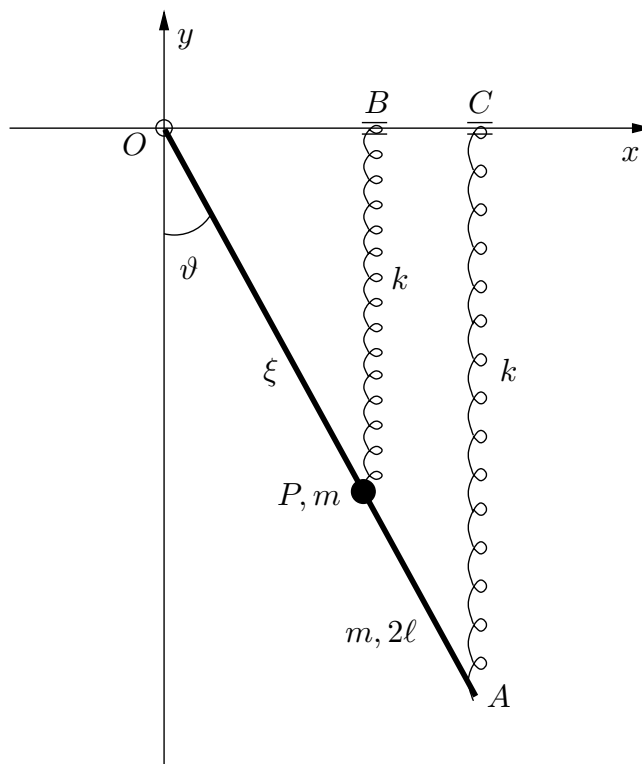
Durata della prova: 90 minuti. Ricordarsi di scrivere il proprio nome e cognome su tutti i fogli e la matricola sulla prima facciata.

UNIVERSITÀ CATTOLICA DEL SACRO CUORE  
**Prova scritta di Meccanica Analitica - 5 luglio 2024**

I) Un'asta  $OA$  omogenea di massa  $m$  e lunghezza  $2\ell$  è libera di ruotare attorno al suo vertice fisso  $O$ , origine di un riferimento cartesiano ortogonale  $Oxy$ . Sull'asta scorre un punto materiale  $P$  di massa  $m$ .

Su tutto il sistema agisce la forza peso. Inoltre, una forza elastica verticale di coefficiente  $k > 0$  agisce tra il punto materiale  $P$  e il punto  $C$  posto sull'asse  $x$ , mentre sull'estremo  $A$  dell'asta agisce un'altra forza elastica verticale di coefficiente  $k$  e polo ancora sull'asse  $x$ . Supposti i vincoli lisci e posto  $\lambda = \frac{mg}{k\ell}$ , si chiede di:

1. trovare le posizioni di equilibrio ordinarie del sistema in funzione di  $\lambda$ ;
2. discuterne la stabilità;
3. trovare le eventuali posizioni di equilibrio di confine;
4. determinare la lagrangiana del sistema.



II) Determinare per quali valori di  $k \in \mathbb{R}$  la trasformazione

$$\begin{cases} Q(q, p) = 1 + q^2 + kp \\ P(q, p) = \frac{p}{2q} - k - 1 \end{cases}$$

è canonica e trovare una funzione generatrice del tipo  $F_2(q, P)$ .

Nel caso in cui si abbia l'hamiltoniana  $\mathcal{H}(q, p) = \frac{p^2}{2q^2} + q^2$ , qual è l'espressione di  $\tilde{\mathcal{H}}(Q, P)$ ?

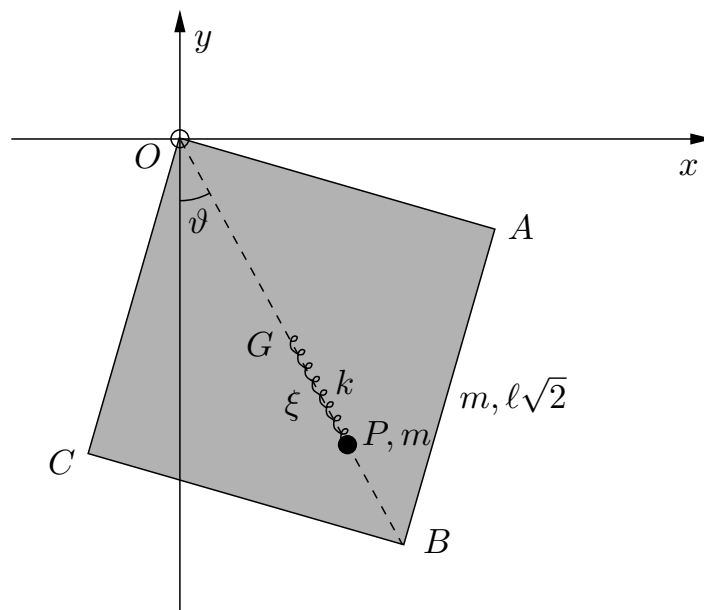
Durata della prova: 90 minuti. Ricordarsi di scrivere il proprio nome e cognome su tutti i fogli e la matricola sulla prima facciata.

UNIVERSITÀ CATTOLICA DEL SACRO CUORE  
**Prova scritta di Meccanica Analitica - 6 giugno 2024**

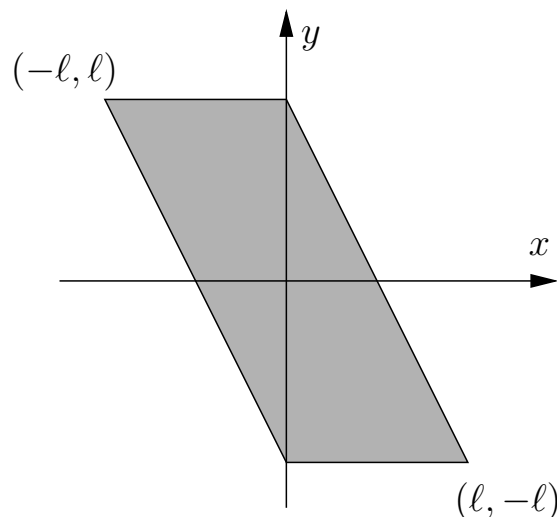
I) Una lamina quadrata  $OABC$  omogenea di massa  $m$  e lato  $\ell\sqrt{2}$  è libera di ruotare attorno al suo vertice fisso  $O$ , origine di un riferimento cartesiano ortogonale  $Oxy$ . Sulla diagonale  $OB$  della lamina scorre un punto materiale  $P$  di massa  $m$ .

Su tutto il sistema agisce la forza peso. Inoltre, una forza elastica di coefficiente  $k > 0$  agisce tra il punto materiale  $P$  e il baricentro  $G$  della lamina. Supposti i vincoli lisci e posto  $\lambda = \frac{mg}{k\ell}$ , si chiede di:

1. trovare le posizioni di equilibrio ordinarie del sistema in funzione di  $\lambda$ ;
2. discuterne la stabilità;
3. trovare le eventuali posizioni di equilibrio di confine;
4. determinare la lagrangiana del sistema.



II) Si calcoli la matrice d'inerzia della lamina piana omogenea di massa  $2m$ , a forma di parallelogrammo, disposta come in figura, rispetto al sistema di riferimento indicato (l'asse  $z$  è ortogonale al foglio).



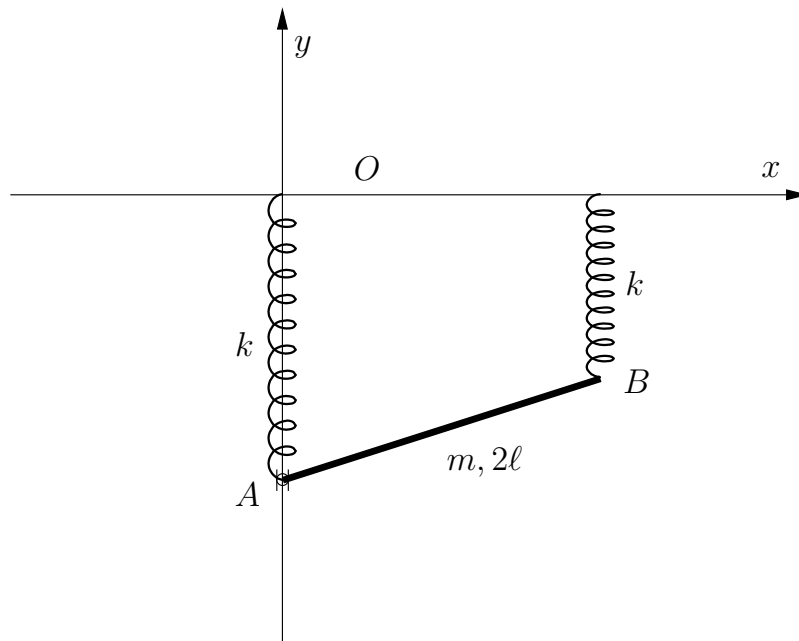
UNIVERSITÀ CATTOLICA DEL SACRO CUORE  
Prova scritta di Meccanica Analitica - 9 febbraio 2024

I) Un'asta omogenea  $AB$  di massa  $m$  e lunghezza  $2\ell$  è libera di ruotare attorno all'estremo  $A$ , che si muove sull'asse verticale di un sistema di riferimento piano  $Oxy$ .

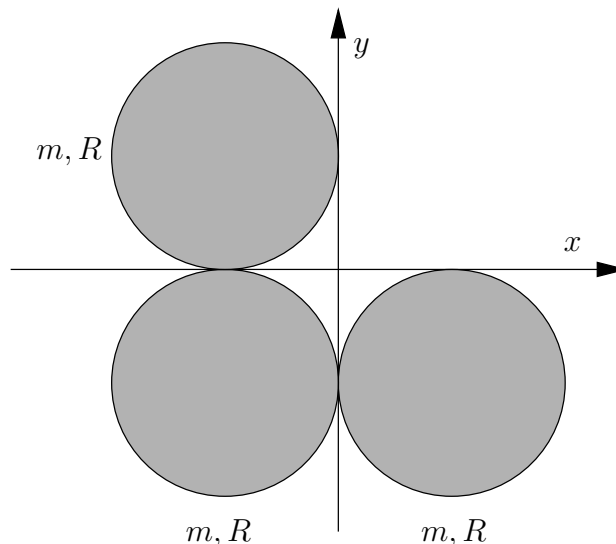
Su tutto il sistema agisce la forza peso e sugli estremi  $A$  e  $B$  agiscono due forze elastiche sempre verticali di coefficiente  $k > 0$  e poli sull'asse delle  $x$ .

Si chiede di:

1. trovare le posizioni di equilibrio del sistema;
2. discuterne la stabilità al variare di  $\lambda = \frac{mg}{kl}$ ;
3. determinare le equazioni differenziali del moto.



II) Si calcoli la matrice d'inerzia del corpo rigido formato da tre dischi omogenei, ognuno di massa  $m$  e raggio  $R$ , disposti come in figura, rispetto al sistema di riferimento indicato (l'asse  $z$  è ortogonale al foglio).



---

Durata della prova: 90 minuti. Ricordarsi di scrivere il proprio nome e cognome su tutti i fogli e la matricola sulla prima facciata.

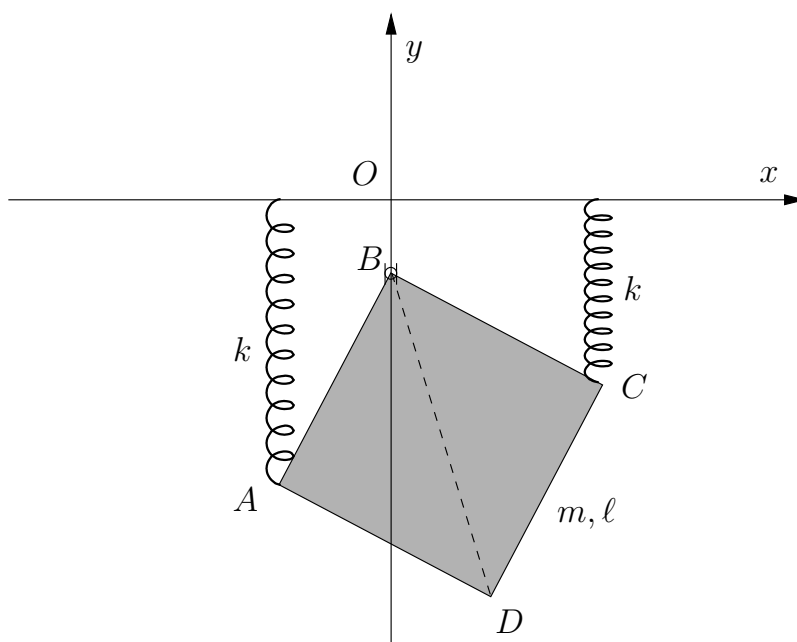
UNIVERSITÀ CATTOLICA DEL SACRO CUORE  
Prova scritta di Meccanica Analitica - 19 gennaio 2024

I) Una lamina quadrata piana omogenea  $ABCD$  di massa  $m$  e lato  $\ell$  è libera di ruotare attorno al vertice  $B$ , che si muove sull'asse verticale di un sistema di riferimento piano  $Oxy$ .

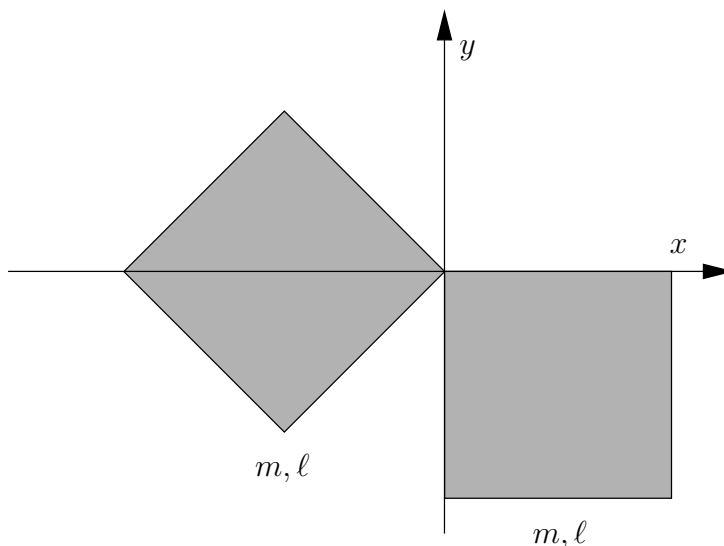
Su tutto il sistema agisce la forza peso e sui punti  $A$  e  $C$  agiscono due forze elastiche sempre verticali di coefficiente  $k > 0$  e poli sull'asse delle  $x$ .

Si chiede di:

1. trovare le posizioni di equilibrio del sistema;
2. discuterne la stabilità al variare di  $\lambda = \frac{mg}{kl}$ ;
3. determinare le equazioni differenziali del moto.



II) Si calcoli la matrice d'inerzia di un corpo rigido formato da due lamine quadrate, ognuna di massa  $m$  e lunghezza  $\ell$ , disposte come in figura, rispetto al sistema di riferimento indicato (l'asse  $z$  è ortogonale al foglio).



---

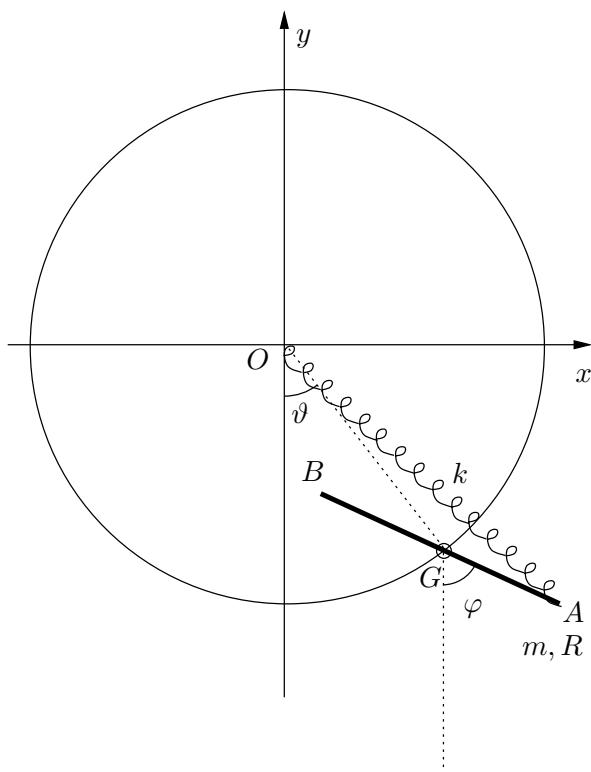
Durata della prova: 90 minuti. Ricordarsi di scrivere il proprio nome e cognome su tutti i fogli e la matricola sulla prima facciata.

UNIVERSITÀ CATTOLICA DEL SACRO CUORE  
Prova scritta di Meccanica Analitica - 22 settembre 2023

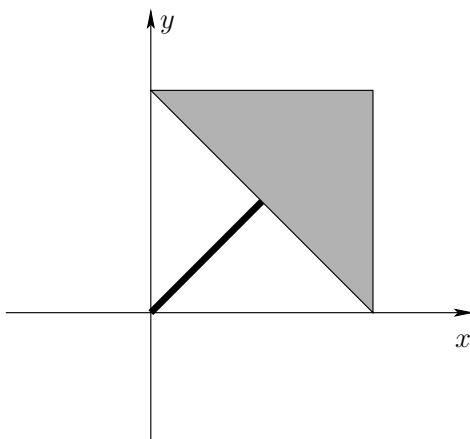
I) Un'asta  $AB$  omogenea di massa  $m$  e lunghezza  $R$  è libera di ruotare attorno al suo baricentro  $G$ , che si muove su una guida circolare di raggio  $R$  e centro  $O$ , origine di un riferimento cartesiano ortogonale  $Oxy$ . All'estremo  $A$  dell'asta agisce una forza elastica di coefficiente  $k > 0$  e polo  $O$ . Su tutto il sistema agisce la forza peso.

Supposti i vincoli lisci e posto  $\lambda = \frac{mg}{kR}$ , si chiede di:

1. trovare le posizioni di equilibrio del sistema;
2. discuterne la stabilità;
3. determinare l'energia cinetica del sistema e la matrice  $\mathbb{K}$  dell'energia cinetica.



II) Si trovi la matrice d'inerzia della figura, formata da un'asta omogenea e da una lamina omogenea a forma di triangolo rettangolo isoscele, entrambe di massa  $m$ , rispetto al sistema di riferimento indicato (l'asse  $z$  è perpendicolare al foglio), sapendo che il cateto della lamina triangolare misura  $\ell$ .



---

Durata della prova: 90 minuti. Ricordarsi di scrivere il proprio nome e cognome su tutti i fogli e la matricola sulla prima facciata.

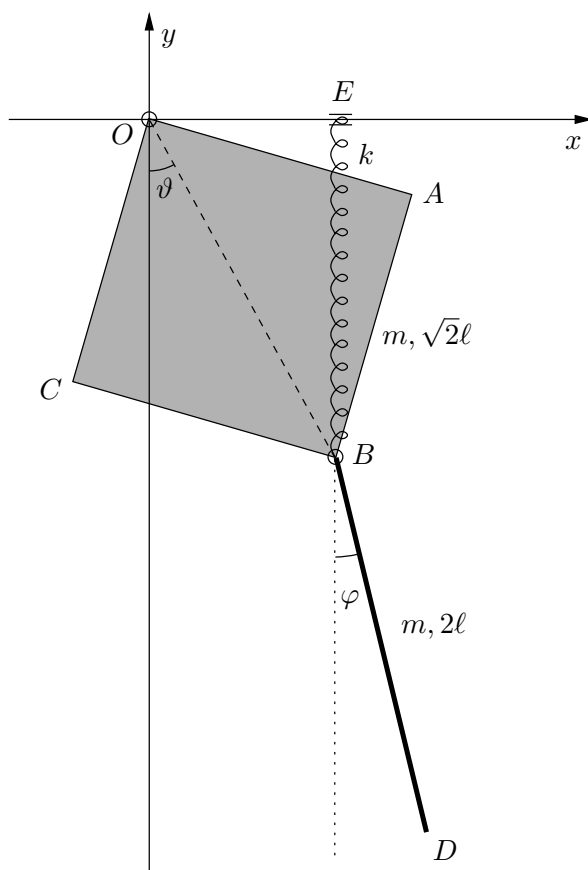


UNIVERSITÀ CATTOLICA DEL SACRO CUORE  
**Prova scritta di Meccanica Analitica - 8 settembre 2023**

I) Una lamina quadrata  $OABC$  omogenea di massa  $m$  e lato  $\sqrt{2}\ell$  è libera di ruotare attorno al suo vertice fisso  $O$ , origine di un riferimento cartesiano ortogonale  $Oxy$ . Al vertice  $B$  della lamina opposto ad  $O$  è agganciato l'estremo di un'asta omogenea  $BD$ , di massa  $m$  e lunghezza  $2\ell$ , libera di ruotare attorno a  $B$ .

Su tutto il sistema agisce la forza peso e sul vertice  $B$  agisce una forza elastica sempre verticale di coefficiente  $k > 0$  e polo  $E$  sull'asse  $x$ . Supposti i vincoli lisci e posto  $\lambda = \frac{mg}{k\ell}$ , si chiede di:

1. trovare le posizioni di equilibrio del sistema in funzione di  $\lambda$ ;
2. discuterne la stabilità;
3. determinare l'energia cinetica del sistema e scrivere le equazioni del moto.



II) Si verifichi che la trasformazione

$$\begin{cases} Q(q, p) = \log(q^2 p) \\ P(q, p) = qp \end{cases}$$

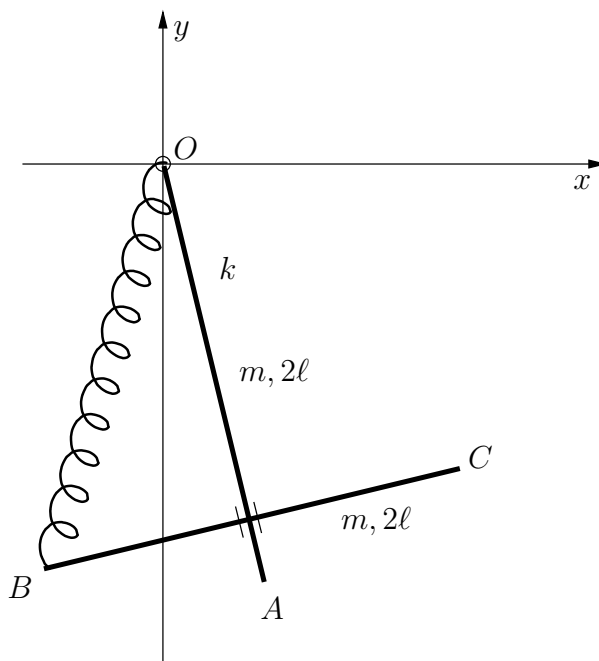
è canonica e se ne trovi una funzione generatrice del tipo  $F_2(q, P)$ .

UNIVERSITÀ CATTOLICA DEL SACRO CUORE  
**Prova scritta di Meccanica Analitica - 14 luglio 2023**

I) Un sistema meccanico piano è formato da due aste omogenee, entrambe di massa  $m$  e lunghezza  $2\ell$ . L'asta  $OA$  è libera di ruotare attorno al suo estremo fisso  $O$ , centrato in un riferimento cartesiano ortogonale  $Oxy$ , e su tale asta scorre il centro  $G$  di una seconda asta  $BC$  uguale alla prima e che resta sempre ortogonale a  $OA$ , come in figura.

Su tutto il sistema agisce la forza peso e sull'estremo  $B$  agisce una forza elastica di coefficiente  $k > 0$  e polo l'origine. Supposti i vincoli lisci e posto  $\lambda = \frac{mg}{k\ell}$ , si chiede di:

1. trovare le posizioni di equilibrio ordinarie del sistema e discuterne la stabilità in funzione di  $\lambda$ ;
2. trovare le eventuali posizioni di equilibrio di confine;
3. determinare l'energia cinetica del sistema e le equazioni differenziali del moto.



II) Determinare per quali valori di  $k \in \mathbb{R}$  la trasformazione

$$\begin{cases} Q(q, p) = kp \\ P(q, p) = p^3 - 2q \end{cases}$$

è canonica e trovarne una funzione generatrice del tipo  $F_2(q, P)$ .

Nel caso in cui si abbia l'hamiltoniana  $\mathcal{H}(q, p) = \frac{p^2}{2} + q$ , qual è l'espressione di  $\tilde{\mathcal{H}}(Q, P)$ ?

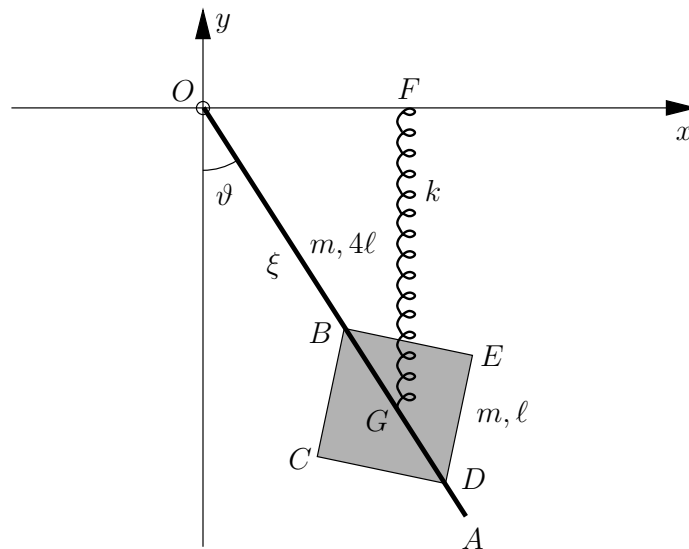
UNIVERSITÀ CATTOLICA DEL SACRO CUORE  
**Prova scritta di Meccanica Analitica - 30 giugno 2023**

I) Un sistema meccanico piano è formato da un'asta omogenea  $OA$  di massa  $m$  e lunghezza  $4\ell$  su cui scorrono gli estremi  $B$  e  $D$  di una lamina quadrata omogenea  $BCDE$  di massa  $m$  e lato  $\ell$ , in modo che il centro  $G$  del quadrato non possa mai abbandonare l'asta. L'estremo  $O$  è vincolato nell'origine di un sistema di riferimento cartesiano ortogonale  $Oxy$  e l'asta è libera di ruotare attorno ad esso.

Tutto il sistema è soggetto alla forza di gravità e sul centro  $G$  della lamina agisce una forza elastica sempre verticale di polo il punto  $F$  sull'asse  $x$  e coefficiente  $k > 0$ .

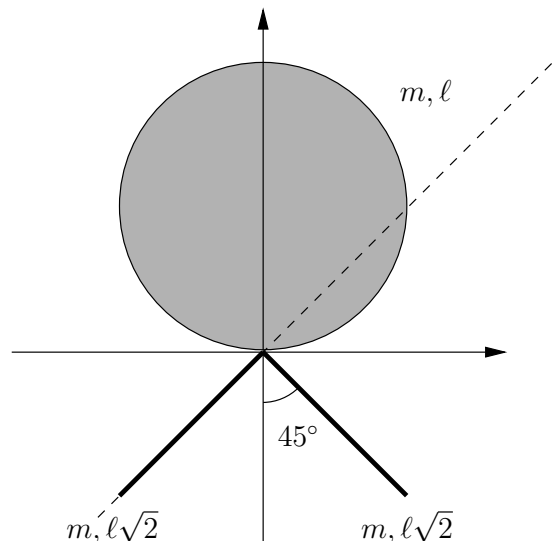
Supposti i vincoli lisci e posto  $\lambda = \frac{mg}{k\ell}$ , si chiede di:

1. trovare tutte le posizioni di equilibrio del sistema e discuterne la stabilità al variare di  $\lambda$ ;
2. discutere l'esistenza di posizioni di equilibrio di confine;
3. scrivere l'energia cinetica del sistema e la matrice  $\mathbb{K}$  dell'energia cinetica;



II) Si calcoli la matrice d'inerzia della figura, formata da un disco omogeneo di massa  $m$  e raggio  $\ell$  e da due aste omogenee, ognuna di massa  $m$  e lunghezza  $\ell\sqrt{2}$ , rispetto al sistema di riferimento indicato.

Si calcoli poi il momento d'inerzia della figura rispetto alla bisettrice  $y = x$ , tratteggiata in figura.



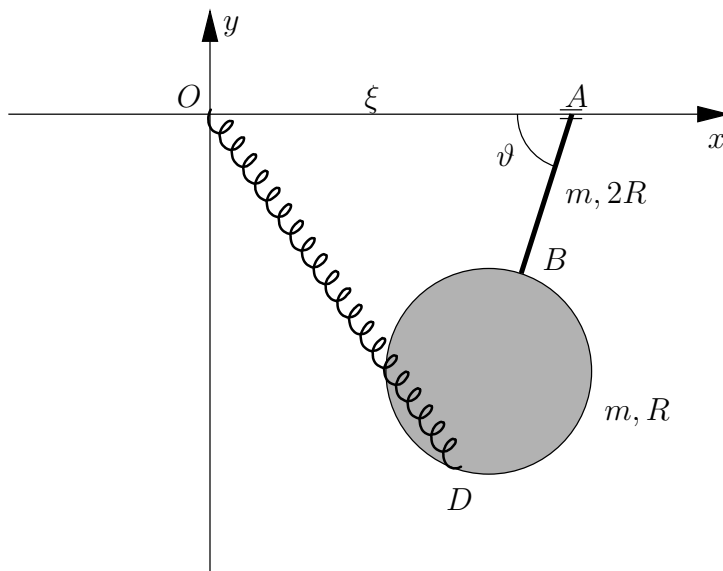
UNIVERSITÀ CATTOLICA DEL SACRO CUORE  
Prova scritta di Meccanica Analitica - 9 giugno 2023

I) Un corpo rigido piano è formato da un disco omogeneo di massa  $m$  e diametro  $2R$  saldato a un'asta  $AB$  di massa  $m$  e lunghezza  $2R$ , come in figura. L'estremo  $A$  è vincolato a scorrere sull'asse  $x$  di un sistema di riferimento cartesiano ortogonale  $Oxy$  e il corpo è libero di ruotare attorno ad  $A$ .

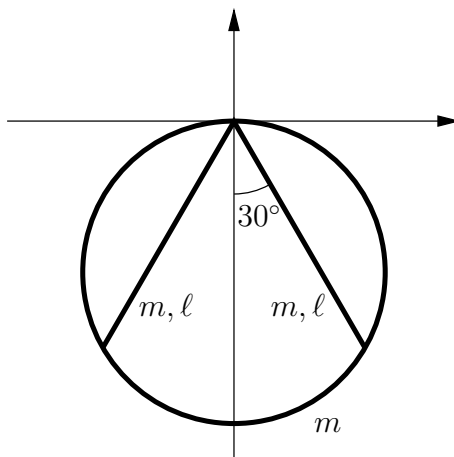
Tutto il sistema è soggetto alla forza di gravità e sul punto  $D$  del bordo del disco diametralmente opposto a  $B$  agisce una forza elastica di polo l'origine  $O$  e coefficiente  $k > 0$ .

Supposti i vincoli lisci e posto  $\lambda = \frac{mg}{kR}$ , si chiede di:

1. trovare tutte le posizioni di equilibrio del corpo rigido e discuterne la stabilità al variare di  $\lambda$ ;
2. scrivere l'energia cinetica del corpo rigido e la matrice  $\mathbb{K}$  dell'energia cinetica;
3. trovare la lagrangiana del sistema meccanico e le equazioni differenziali del moto.



II) Si calcoli la matrice d'inerzia della figura, formata da una circonferenza omogenea e da due aste omogenee, rispetto al sistema di riferimento indicato.



---

Durata della prova: 90 minuti. Ricordarsi di scrivere il proprio nome e cognome su tutti i fogli e la matricola sulla prima facciata.

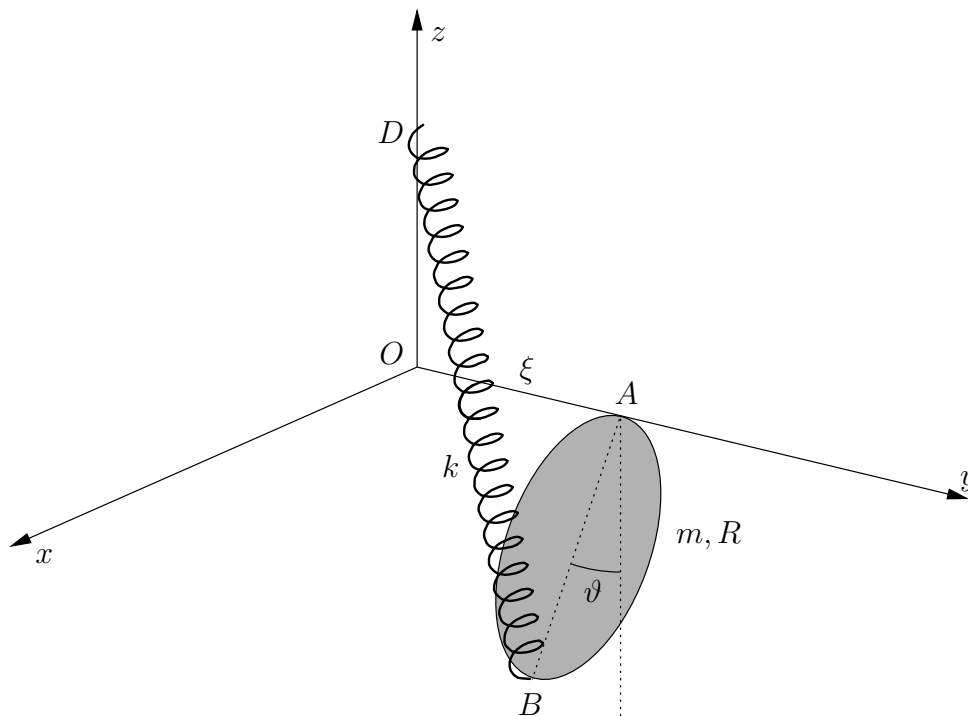
UNIVERSITÀ CATTOLICA DEL SACRO CUORE  
**Prova scritta di Meccanica Analitica - 10 febbraio 2023**

I) Un disco omogeneo di massa  $m$  e diametro  $AB = 2R$  rotola senza strisciare sull'asse  $y$  di un sistema di riferimento cartesiano ortogonale  $Oxyz$  e resta sempre complanare a tale asse.

Tutto il sistema è soggetto alla forza di gravità e sul punto  $B$  del bordo del disco agisce una forza elastica di polo il punto  $D$  di coordinate  $(0, 0, 2R)$  e coefficiente  $k > 0$ .

Supposti i vincoli lisci e posto  $\lambda = \frac{mg}{kR}$ , si chiede di:

1. trovare le posizioni di equilibrio del corpo rigido;
2. discuterne la stabilità al variare di  $\lambda$ ;
3. trovare l'energia cinetica del corpo rigido e scrivere i coefficienti della matrice dell'energia cinetica.



II) Determinare per quali valori di  $\alpha \in \mathbb{R}$  la trasformazione

$$\begin{cases} Q(q, p) = p^{1/3} \exp(-q/3) \\ P(q, p) = \alpha p^{2/3} \exp(q/3) \end{cases}$$

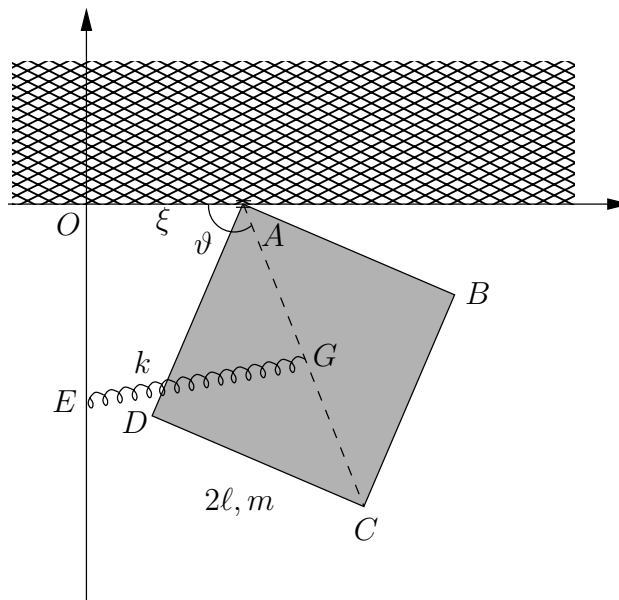
è canonica e trovarne una funzione generatrice del tipo  $F_1(q, Q)$ .

UNIVERSITÀ CATTOLICA DEL SACRO CUORE  
Prova scritta di Meccanica Analitica - 13 gennaio 2023

I) Una lamina quadrata omogenea  $ABCD$  di massa  $m$  e lato  $2\ell$  si muove in modo che il vertice  $A$  scorra sull'asse  $x$  di un sistema di riferimento cartesiano ortogonale  $Oxy$  e la lamina possa stare solo nel semipiano  $y \leq 0$ .

Tutto il sistema è soggetto alla forza di gravità e sul baricentro  $G$  della lamina agisce una forza elastica di polo il punto  $E$  di coordinate  $(0, -\ell\sqrt{2})$  e coefficiente  $k > 0$ . Supposti i vincoli lisci, si chiede di:

1. trovare le posizioni di equilibrio del sistema e discuterne la stabilità;
2. trovare eventuali posizioni di equilibrio di confine;
3. determinare la lagrangiana del sistema.



II) Determinare per quali valori di  $\alpha > 0$  la trasformazione

$$\begin{cases} Q(q, p) = 2\alpha qp \\ P(q, p) = \alpha \log \frac{p}{q} \end{cases}$$

è canonica e trovarne una funzione generatrice del tipo  $F_2(q, P)$ .

---

Durata della prova: 90 minuti. Ricordarsi di scrivere il proprio nome e cognome su tutte le facciate del foglio e la matricola sulla prima facciata. Al termine, scansionare e spedire ad

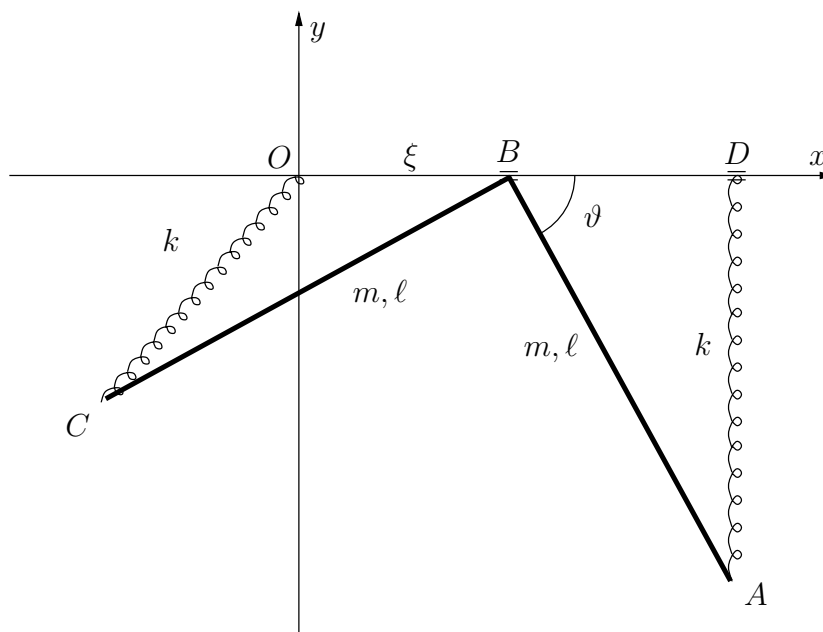
`alessandro.musesti@unicatt.it`

I) In un piano verticale, un corpo rigido  $ABC$  è formato da due aste omogenee  $AB$ ,  $BC$ , entrambe di massa  $m$  e lunghezza  $\ell$ , saldate ad angolo retto nell'estremo comune  $B$ . Tale estremo scorre sull'asse delle ascisse di un riferimento cartesiano ortogonale  $Oxy$  e il corpo rigido è libero di ruotare intorno ad esso.

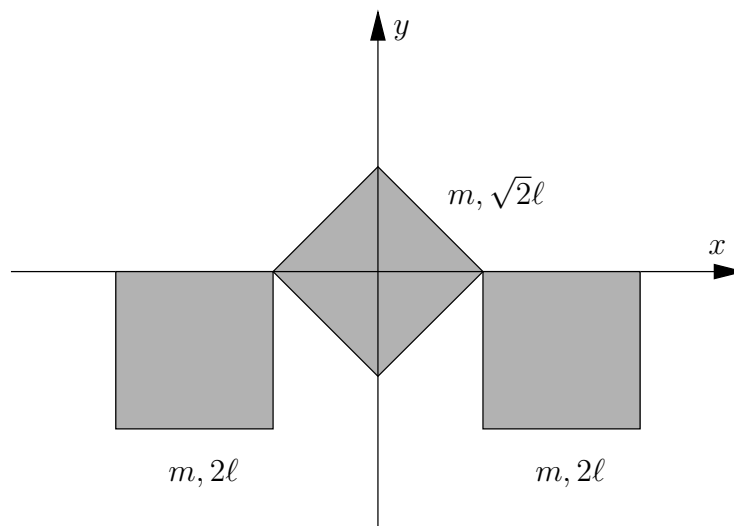
Su tutto il sistema agisce la forza peso, sull'estremo  $C$  agisce una forza elastica di coefficiente  $k > 0$  e polo nell'origine, mentre sull'estremo  $A$  agisce un'altra forza elastica col medesimo coefficiente  $k$  e tale che resti sempre verticale e il polo sia sull'asse  $x$ .

Supposti i vincoli lisci, si chiede di:

1. trovare le posizioni di equilibrio ordinarie del sistema e discuterne la stabilità;
2. scrivere l'energia cinetica del sistema;
3. scrivere la lagrangiana linearizzata attorno ad una posizione di equilibrio stabile.



II) Si calcoli la matrice d'inerzia del corpo rigido piano formato da tre lamine quadrate omogenee disposte come in figura, rispetto al sistema di riferimento indicato (l'asse  $z$  è ortogonale al piano del foglio).



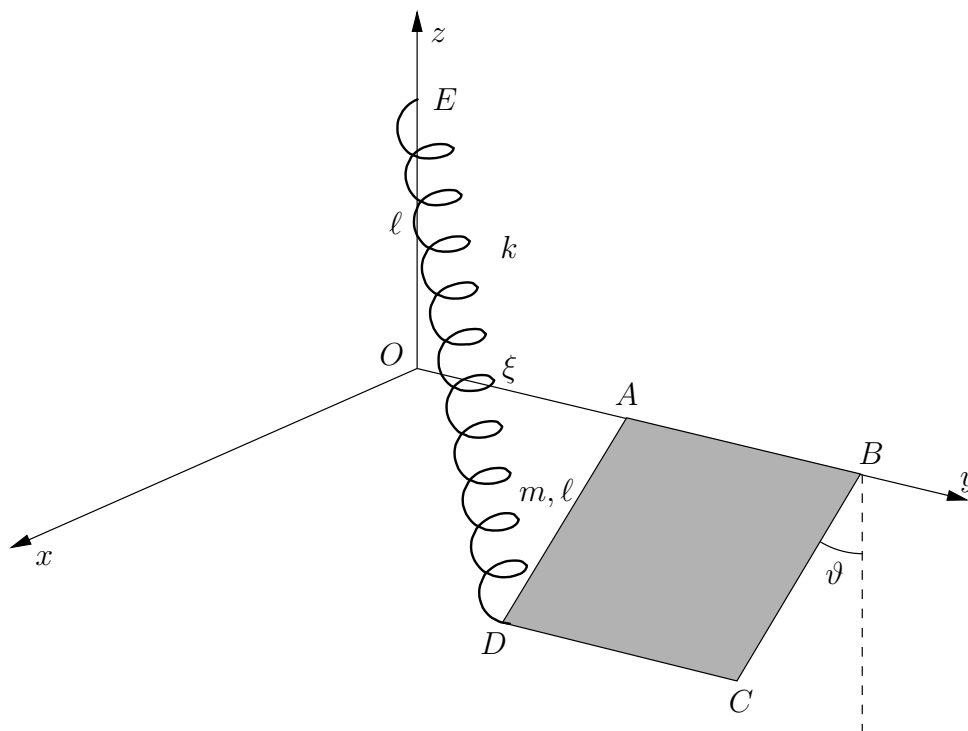
UNIVERSITÀ CATTOLICA DEL SACRO CUORE  
Prova scritta di Meccanica Analitica - 2 settembre 2022

I) Un lamina quadrata omogenea  $ABCD$  di lato  $\ell$  e massa  $m$  è libera di ruotare attorno al suo lato  $AB$ , che scorre sull'asse  $y$  di un sistema di riferimento cartesiano ortogonale  $Oxyz$ .

Sul vertice  $D$  della lamina agisce una forza elastica di coefficiente  $k > 0$  e polo il punto  $E$  di coordinate  $(0, 0, \ell)$ .

Tutto il sistema è soggetto alla forza di gravità. Supposti i vincoli lisci e posto  $\lambda = \frac{mg}{k\ell}$ , si chiede di:

1. trovare le posizioni di equilibrio del sistema;
2. discuterne la stabilità in funzione del parametro meccanico  $\lambda$ ;
3. determinare la lagrangiana del sistema e le equazioni differenziali del moto.



II) Determinare per quali valori di  $k, \alpha > 0$  la trasformazione

$$\begin{cases} Q(q, p) = kp^\alpha e^{q/2} \\ P(q, p) = kp^\alpha e^{-q/2} \end{cases}$$

è canonica e trovarne una funzione generatrice del tipo  $F_2(q, P)$ .

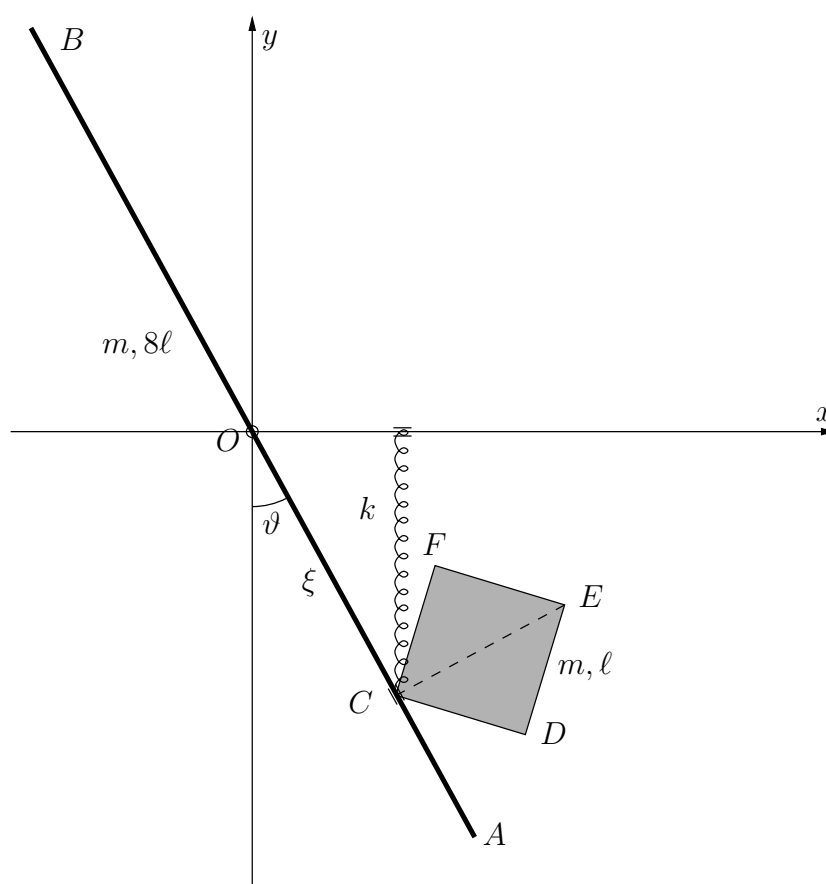


UNIVERSITÀ CATTOLICA DEL SACRO CUORE  
**Prova scritta di Meccanica Analitica - 15 luglio 2022**

I) In un piano verticale, un'asta omogenea  $AB$  di massa  $m$  e lunghezza  $8\ell$  è libera di ruotare attorno al suo baricentro fisso in  $O$ , origine di un riferimento cartesiano ortogonale  $Oxy$ . Una lamina quadrata  $CDEF$  di lato  $\ell$  e massa  $m$  è vincolata a muoversi nel piano in modo che il suo vertice  $C$  stia sull'asta  $AB$  e la diagonale  $CE$  stia sempre perpendicolare all'asta.

Su tutto il sistema agisce la forza peso e su  $C$  agisce una forza elastica sempre verticale di coefficiente  $k > 0$  e polo sull'asse  $x$ . Supposti i vincoli lisci, si chiede di:

1. trovare le posizioni di equilibrio ordinarie del sistema; discuterne la stabilità;
2. scrivere l'energia cinetica del sistema;
3. scrivere la lagrangiana linearizzata attorno ad ogni posizione di equilibrio (anche se instabile).



II) Determinare per quali valori di  $k, \alpha > 0$  la trasformazione

$$\begin{cases} Q(q, p) = kp^\alpha \sin q \\ P(q, p) = kp^\alpha \cos q \end{cases}$$

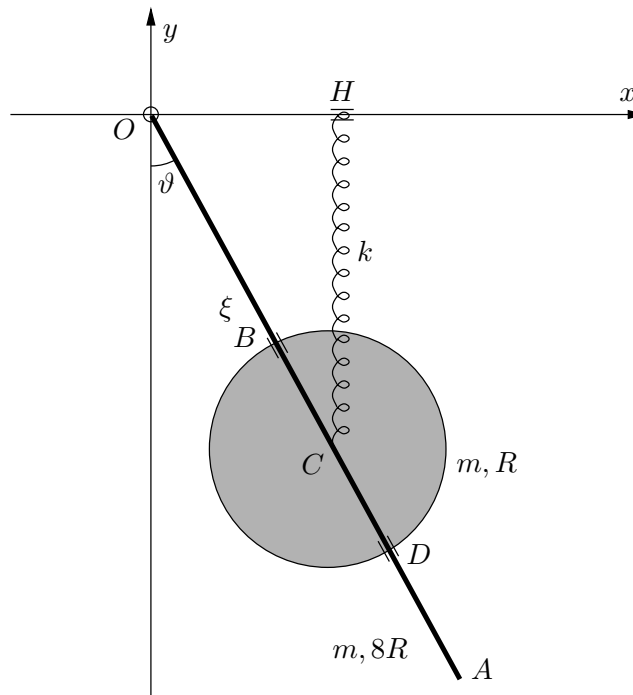
è canonica e trovarne una funzione generatrice del tipo  $F_1(q, Q)$ .

Prova scritta di Meccanica Analitica - 1 luglio 2022

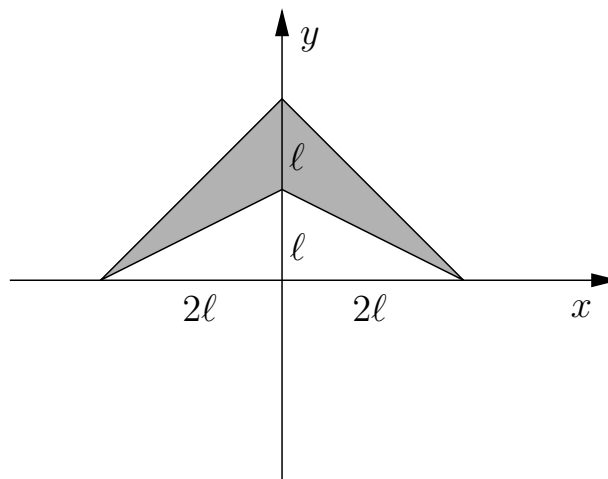
I) In un piano verticale, un'asta omogenea  $OA$  di massa  $m$  e lunghezza  $8R$  è libera di ruotare attorno al suo estremo fisso  $O$ , origine di un riferimento cartesiano ortogonale  $Oxy$ . Una lamina circolare di raggio  $R$  e massa  $m$  è vincolata a muoversi nel piano in modo che il suo diametro  $BD$  scorra lungo l'asta e il centro  $C$  non esca dall'asta.

Su tutto il sistema agisce la forza peso e su  $C$  agisce una forza elastica sempre verticale di coefficiente  $k > 0$  e polo sull'asse  $x$ . Supposti i vincoli lisci e posto  $\lambda = \frac{mg}{kR}$ , si chiede di:

1. trovare le posizioni di equilibrio ordinarie del sistema e discuterne l'esistenza e la stabilità al variare di  $\lambda$ ;
2. trovare le eventuali posizioni di equilibrio di confine;
3. scrivere l'energia cinetica del sistema.



II) Si calcoli la matrice d'inerzia della lamina omogenea in figura rispetto al sistema di riferimento indicato (l'asse  $z$  è perpendicolare al foglio). La massa totale della lamina è  $2m$ .



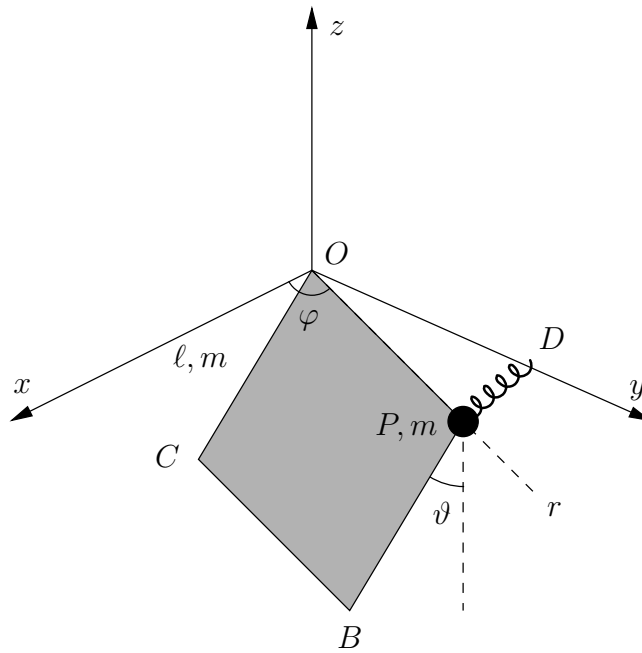
UNIVERSITÀ CATTOLICA DEL SACRO CUORE  
**Prova scritta di Meccanica Analitica - 10 giugno 2022**

I) Un corpo rigido è formato da una lamina quadrata  $OPBC$  di massa  $m$  e lato  $\ell$  a cui è saldato un punto materiale di massa  $m$  nel vertice  $P$ . Tale corpo rigido si muove in modo che il lato  $OP$  stia nel piano orizzontale  $xy$  di un sistema di riferimento  $Oxyz$  e il punto  $O$  sia fisso nell'origine.

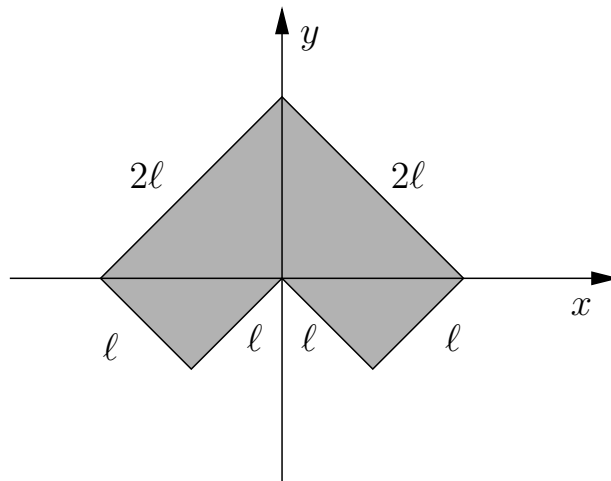
Sul punto  $P$  agisce una forza elastica di coefficiente  $k > 0$  e polo il punto  $D$  sull'asse  $y$  di coordinate  $(0, \ell, 0)$ . Inoltre il corpo rigido è soggetto alla forza peso e tutti i vincoli sono lisci.

Si denotino con  $\varphi$  l'angolo tra il semiasse delle  $x$  positive e il lato  $OP$ , e con  $\vartheta$  l'angolo tra il semipiano verticale discendente passante per  $OP$  e il semipiano della lamina. Si chiede di:

1. trovare le posizioni di equilibrio del sistema e discuterne la stabilità;
2. scrivere l'energia cinetica del sistema;
3. scrivere la lagrangiana approssimata attorno alla posizione di equilibrio stabile.



II) Si calcoli la matrice d'inerzia della lamina piana in figura, rispetto al sistema di riferimento indicato. La massa della lamina è  $3m$  e la lamina è omogenea.



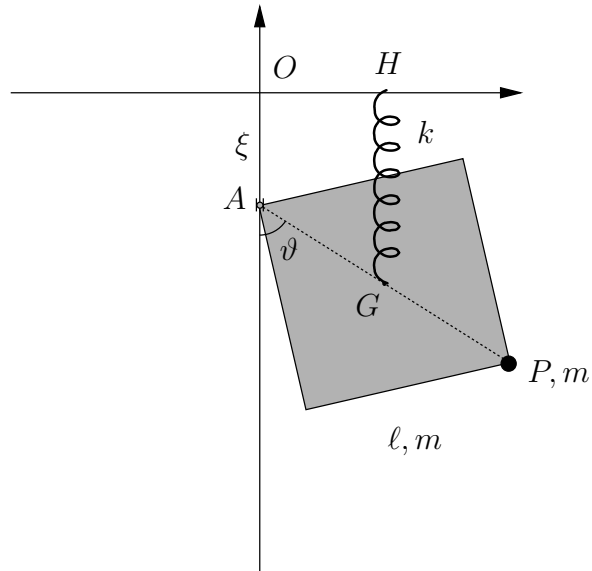
## Prova scritta di Meccanica Analitica - 4 febbraio 2022

I) Un corpo rigido piano è formato da una lamina quadrata di massa  $m$  e lato  $\ell$  a cui è saldato su un vertice un punto materiale  $P$  di massa  $m$ .

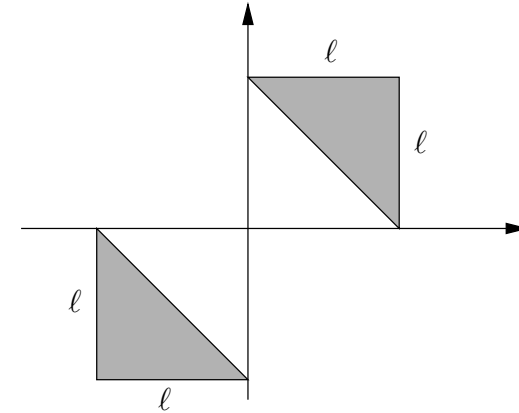
Il corpo rigido si muove in un piano verticale, in modo che il vertice della lamina opposto a  $P$  possa scorrere sull'asse verticale di un sistema di riferimento  $Oxy$  e la lamina possa ruotare attorno ad esso.

Una forza elastica di coefficiente  $k > 0$  e polo sull'asse orizzontale agisce sul centro  $G$  della lamina, mantenendosi sempre verticale. Tutto il sistema è sottoposto alla forza peso. Supposti i vincoli lisci e posto  $\lambda = \frac{mg}{k\ell}$ , si chiede di:

1. trovare le posizioni di equilibrio del corpo rigido al variare di  $\lambda$ ;
2. studiare la stabilità delle posizioni di equilibrio al variare di  $\lambda$ ;
3. determinare l'energia cinetica del sistema.



II) Si calcoli la matrice d'inerzia della lamina piana composta da due triangoli rettangoli isosceli, con cateti  $\ell$ , disposti come in figura, rispetto al sistema di riferimento indicato (l'asse  $z$  è ortogonale al piano del foglio). La massa di ogni triangolo è  $m$ .



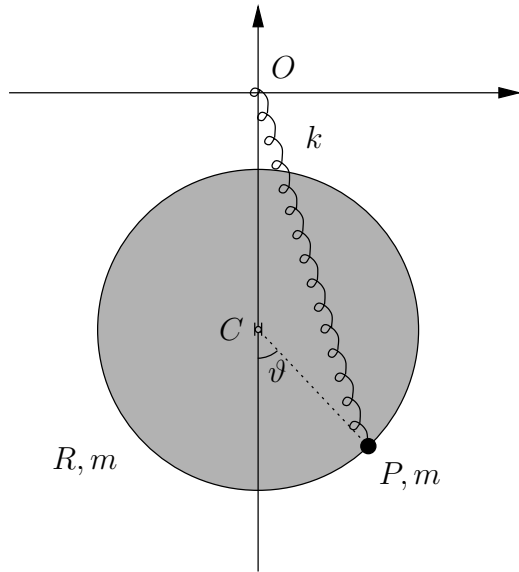
## Prova scritta di Meccanica Analitica - 14 gennaio 2022

I) Un corpo rigido piano è formato da un disco di massa  $m$  e raggio  $R$  a cui è saldato sul bordo un punto materiale  $P$  di massa  $m$ .

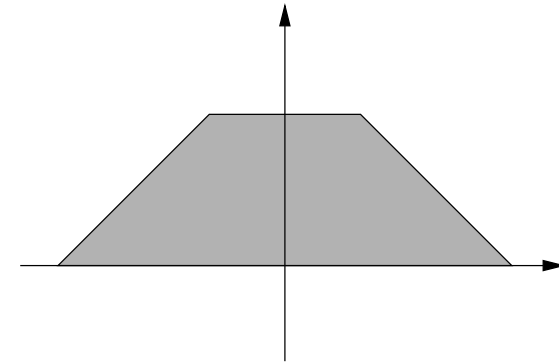
Il corpo rigido si muove in un piano verticale, in modo che il centro  $C$  del disco possa scorrere sull'asse verticale di un sistema di riferimento  $Oxy$  e il disco possa ruotare attorno ad esso.

Una forza elastica di coefficiente  $k > 0$  e polo l'origine  $O$  agisce sul punto  $P$  e tutto il sistema è sottoposto alla forza peso. Supposti i vincoli lisci e posto  $\lambda = \frac{mg}{kR}$ , si chiede di:

1. trovare le posizioni di equilibrio del corpo rigido al variare di  $\lambda$ ;
2. studiare la stabilità delle posizioni di equilibrio al variare di  $\lambda$ ;
3. determinare l'energia cinetica del sistema e la sua matrice di rappresentazione  $\mathbb{K}$  rispetto alle coordinate lagrangiane.



II) Si calcoli la matrice d'inerzia della lamina piana in figura, a forma di trapezio isoscele, che ha gli angoli alla base di  $45^\circ$  e l'altezza congruente alla base minore, rispetto al sistema di riferimento indicato (l'asse  $z$  è ortogonale al piano del foglio). La lunghezza della base minore è  $\ell$  e la massa della lamina è  $4m$ .

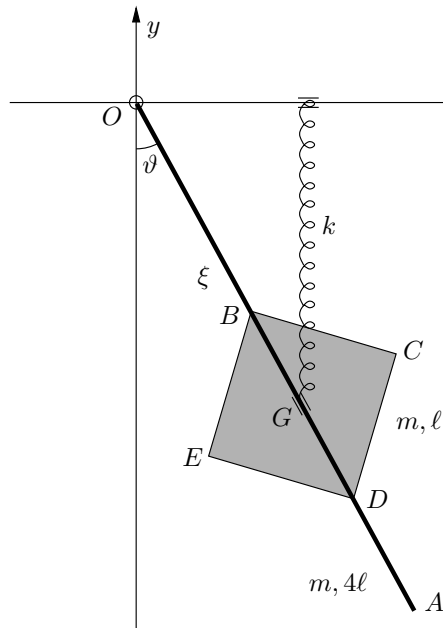


## Prova scritta di Meccanica Analitica - 24 settembre 2021

I) In un piano verticale, un'asta omogenea  $OA$  di massa  $m$  e lunghezza  $4\ell$  è libera di ruotare attorno al suo estremo fisso  $O$ , origine di un riferimento cartesiano ortogonale  $Oxy$ . Una lamina quadrata  $BCDE$ , di lato  $\ell$  e massa  $m$ , ha la diagonale  $BD$  vincolata a scorrere sull'asta in modo che il centro  $G$  del quadrato non fuoriesca dall'asta.

Su tutto il sistema agisce la forza peso e su  $G$  agisce una forza elastica sempre verticale di coefficiente  $k > 0$  e polo sull'asse  $x$ . Supposti i vincoli lisci e posto  $\lambda = \frac{mg}{k\ell}$ , si chiede di:

1. trovare le posizioni di equilibrio ordinarie del sistema e discuterne l'esistenza e la stabilità al variare di  $\lambda$ ;
2. trovare le eventuali posizioni di equilibrio di confine;
3. scrivere l'energia cinetica.



II) Il nuovo simbolo di Google Photo è formato da quattro semicerchi disposti come in figura (i colori non sono rappresentati). Se ne calcoli la matrice d'inerzia della lamina piana omogenea corrispondente, supponendo che il raggio di ogni semicerchio sia  $R$  e la massa totale sia  $4m$ , rispetto a un sistema di riferimento centrato nel centro della figura con l'asse  $z$  ortogonale al piano del foglio.

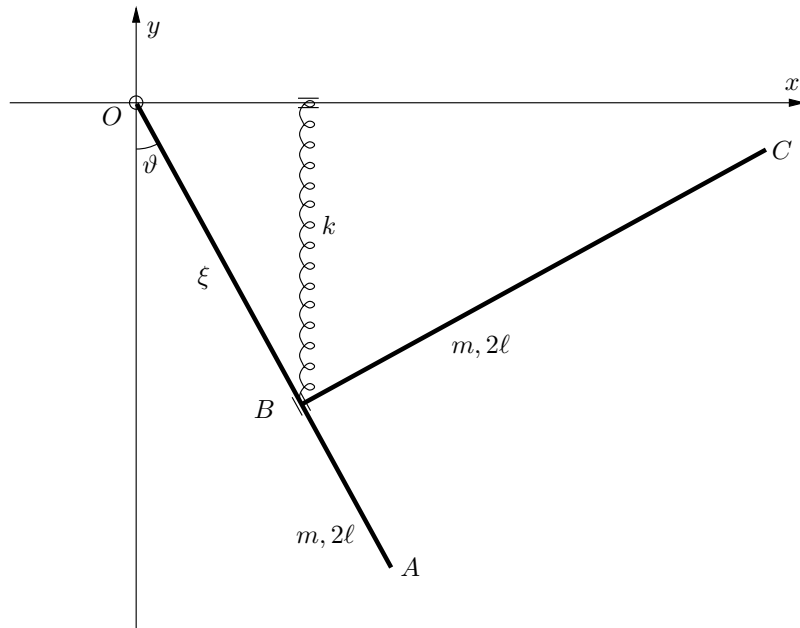


## Prova scritta di Meccanica Analitica - 10 settembre 2021

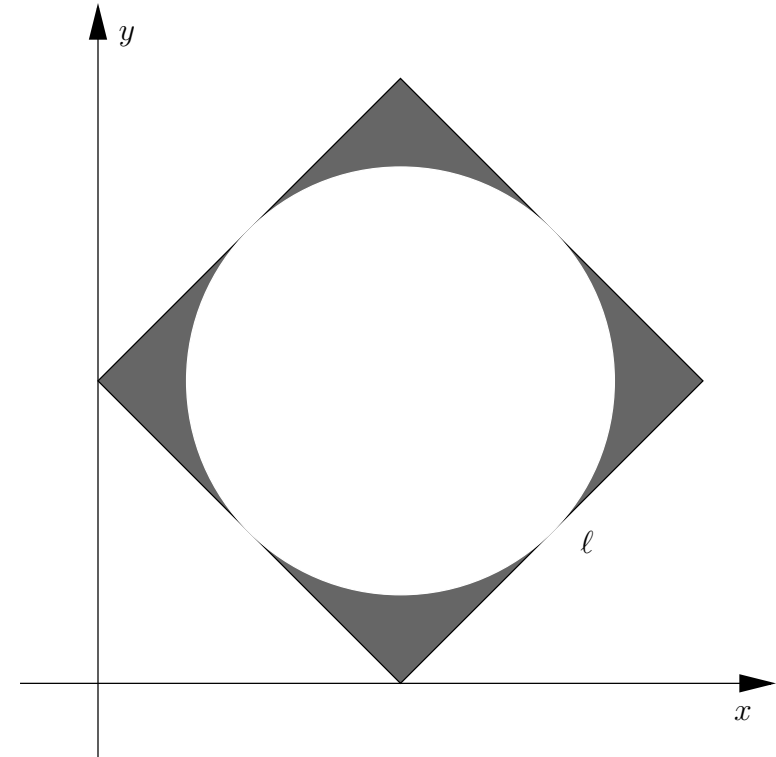
I) In un piano verticale, un'asta omogenea  $OA$  di massa  $m$  e lunghezza  $2\ell$  è libera di ruotare attorno al suo estremo fisso  $O$ , origine di un riferimento cartesiano ortogonale  $Oxy$ . Una seconda asta  $BC$ , identica alla prima, ha l'estremo  $B$  vincolato a scorrere sulla prima asta e si mantiene sempre ortogonale ad essa.

Su tutto il sistema agisce la forza peso e sul punto  $B$  agisce una forza elastica sempre verticale di coefficiente  $k > 0$  e polo sull'asse  $x$ . Supposti i vincoli lisci e posto  $\lambda = \frac{mg}{k\ell}$ , si chiede di:

1. trovare le posizioni di equilibrio ordinarie del sistema e discuterne l'esistenza al variare di  $\lambda$ ;
2. studiare la stabilità delle posizioni di equilibrio ordinarie;
3. trovare le eventuali posizioni di equilibrio di confine;
4. scrivere l'energia cinetica.



II) Si calcoli la matrice d'inerzia della lamina piana formata da un quadrato omogeneo di lato  $\ell$  con un foro circolare centrato nel centro del quadrato e di diametro uguale al lato del quadrato, rappresentata in figura rispetto al sistema di riferimento indicato (l'asse  $z$  è ortogonale al piano del foglio). La massa della lamina è  $m$ .

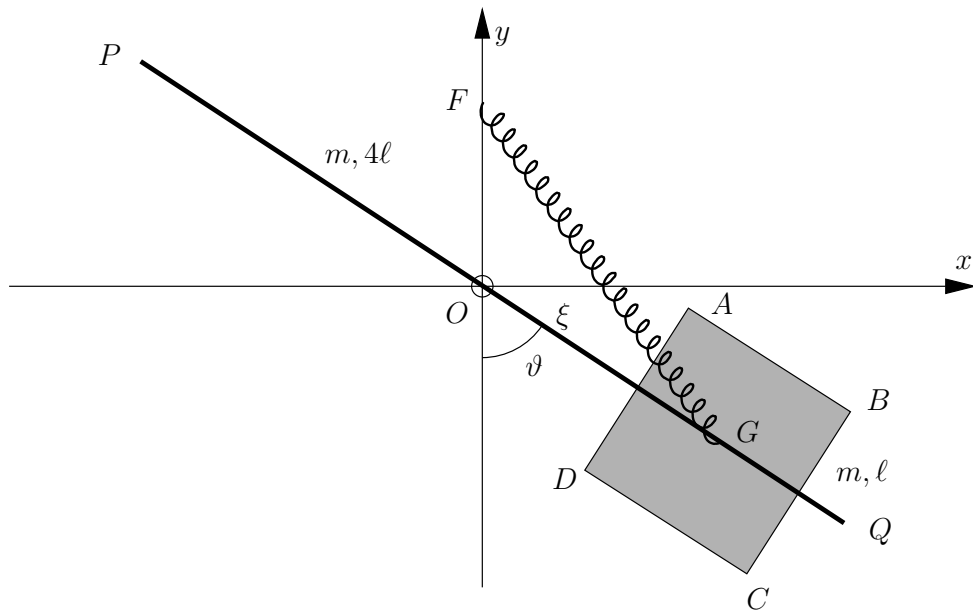


## Prova scritta di Meccanica Analitica - 16 luglio 2021

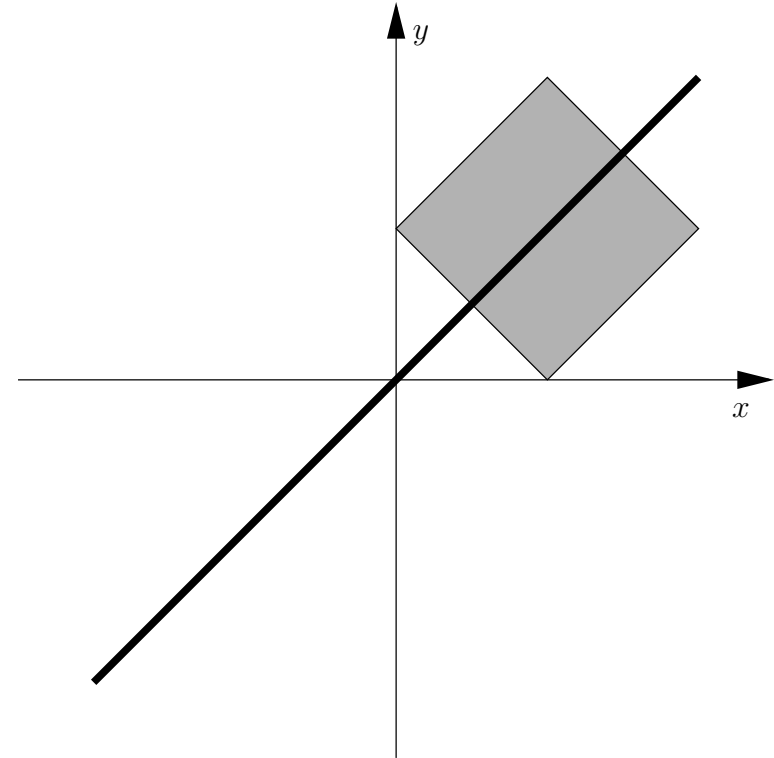
I) In un sistema piano, una lamina quadrata omogenea  $ABCD$  di massa  $m$  e lato  $\ell$  si muove in modo che i punti medi dei lati  $AD$  e  $BC$  scorrono su un'asta omogenea  $PQ$  di massa  $m$  e lunghezza  $4\ell$ . L'asta  $PQ$  può ruotare attorno al suo punto medio  $O$  fissato nell'origine di un sistema di riferimento cartesiano ortogonale  $Oxyz$ . La lamina può muoversi in modo che il baricentro  $G$  non esca dall'asta.

Tutto il sistema è soggetto alla forza di gravità e su  $G$  agisce una forza elastica di polo il punto  $F$  di coordinate  $(0, \ell)$  e coefficiente  $k > 0$ . Supposti i vincoli lisci e  $mg \neq k\ell$ , si chiede di:

1. trovare le posizioni di equilibrio del sistema;
2. discuterne la stabilità in funzione del parametro  $\lambda = \frac{mg}{k\ell}$  ( $\lambda \neq 1$ );
3. cercare le eventuali posizioni di equilibrio di confine;
4. determinare l'energia cinetica del sistema.



II) Si calcoli la matrice d'inerzia del corpo rigido in figura rispetto al sistema di riferimento indicato. Il corpo è formato da una lamina quadrata omogenea di lato  $\ell$  e massa  $m$  e un'asta omogenea di lunghezza  $4\ell$  e massa  $m$ . Il terzo asse è ortogonale al foglio.



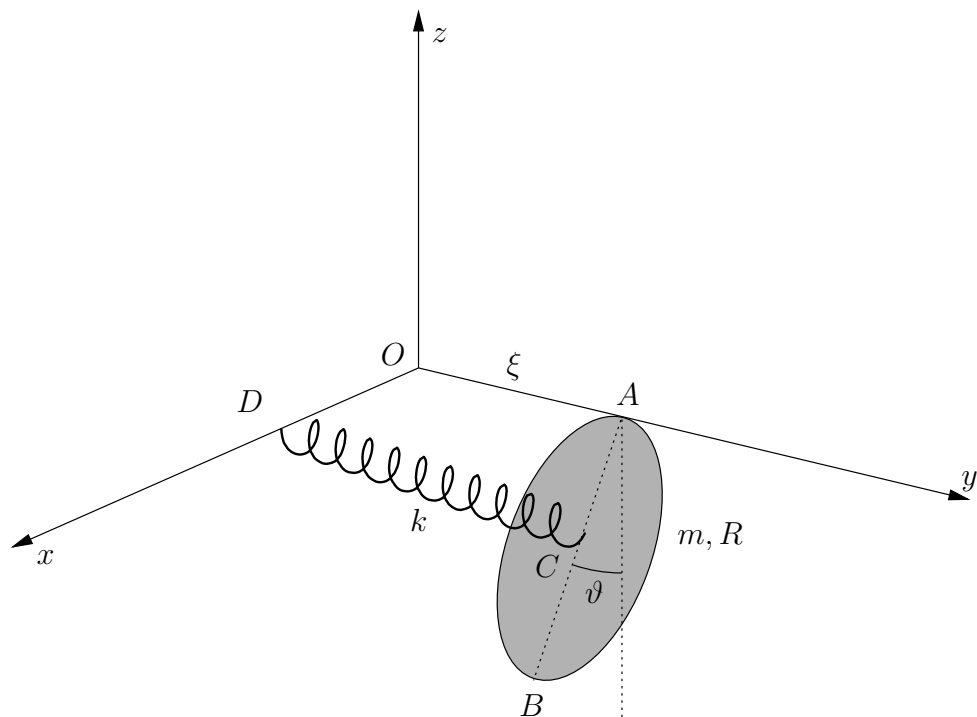


## Prova scritta di Meccanica Analitica - 2 luglio 2021

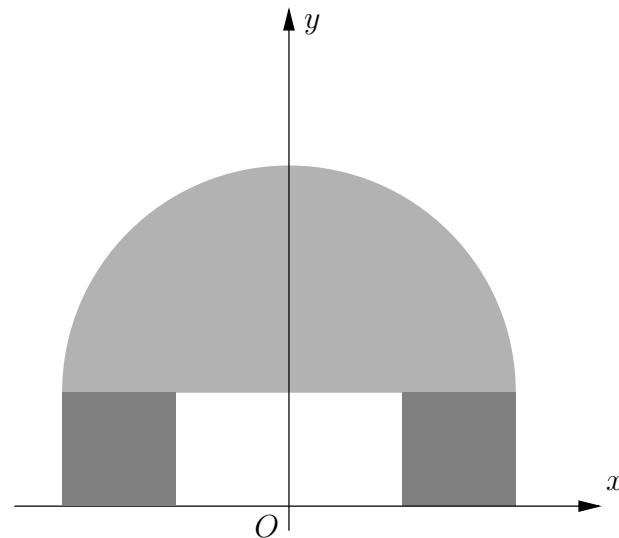
I) Un disco omogeneo di massa  $m$  e diametro  $AB = 2R$  rotola senza strisciare sull'asse  $y$  di un sistema di riferimento cartesiano ortogonale  $Oxyz$  e resta sempre complanare a tale asse.

Tutto il sistema è soggetto alla forza di gravità e sul centro  $C$  del disco agisce una forza elastica di polo il punto  $D$  di coordinate  $(R, 0, 0)$  e coefficiente  $k > 0$ . Supposti i vincoli lisci e posto  $\lambda = \frac{kR}{mg}$ , si chiede di:

1. trovare le posizioni di equilibrio del sistema e discuterne la stabilità;
2. trovare la lagrangiana del sistema;
3. determinare la lagrangiana approssimata attorno alla posizione di equilibrio stabile.



II) Si calcoli la matrice d'inerzia della lamina in figura rispetto al sistema di riferimento indicato. La lamina è formata da un semidisco omogeneo di massa  $m$  e raggio  $2R$  e da due lamine quadrate omogenee, entrambe di massa  $m$  e lato  $R$ .

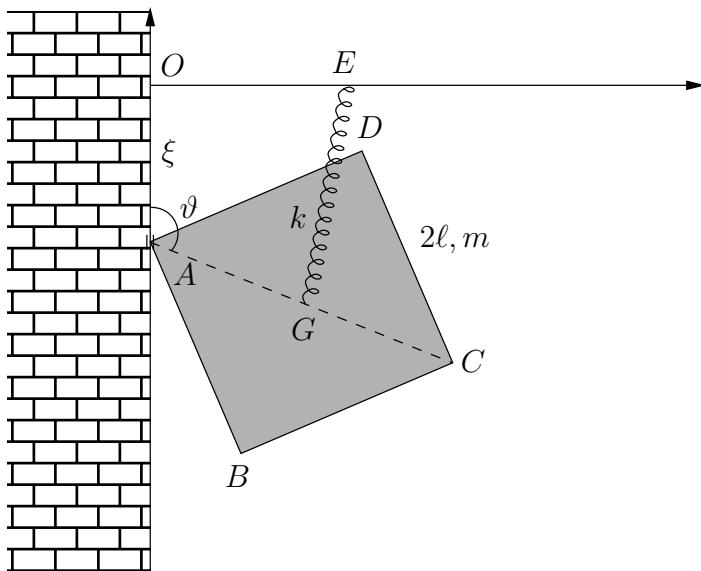


## Prova scritta di Meccanica Analitica - 14 giugno 2021

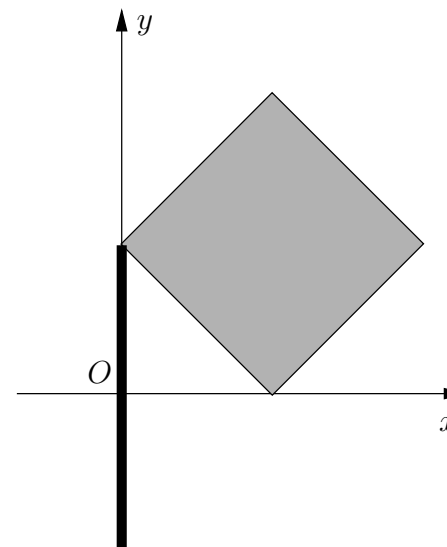
I) Una lamina quadrata omogenea  $ABCD$  di massa  $m$  e lato  $2\ell$  si muove in modo che il vertice  $A$  scorra sull'asse  $y$  di un sistema di riferimento cartesiano ortogonale  $Oxyz$  e la lamina possa stare solo nel semipiano  $x \geq 0$ .

Tutto il sistema è soggetto alla forza di gravità e sul baricentro  $G$  della lamina agisce una forza elastica di polo il punto  $E$  di coordinate  $(\ell\sqrt{2}, 0)$  e coefficiente  $k > 0$ . Supposti i vincoli lisci, si chiede di:

1. trovare le posizioni di equilibrio del sistema discuterne la stabilità;
2. trovare eventuali posizioni di equilibrio di confine;
3. determinare la lagrangiana del sistema.



II) Si calcoli la matrice d'inerzia del corpo rigido in figura rispetto al sistema di riferimento indicato. Il corpo è formato da un'asta omogenea di massa  $m$  e lunghezza  $2\sqrt{2}\ell$  e da una lamina quadrata omogenea di massa  $m$  e lato  $2\ell$ .

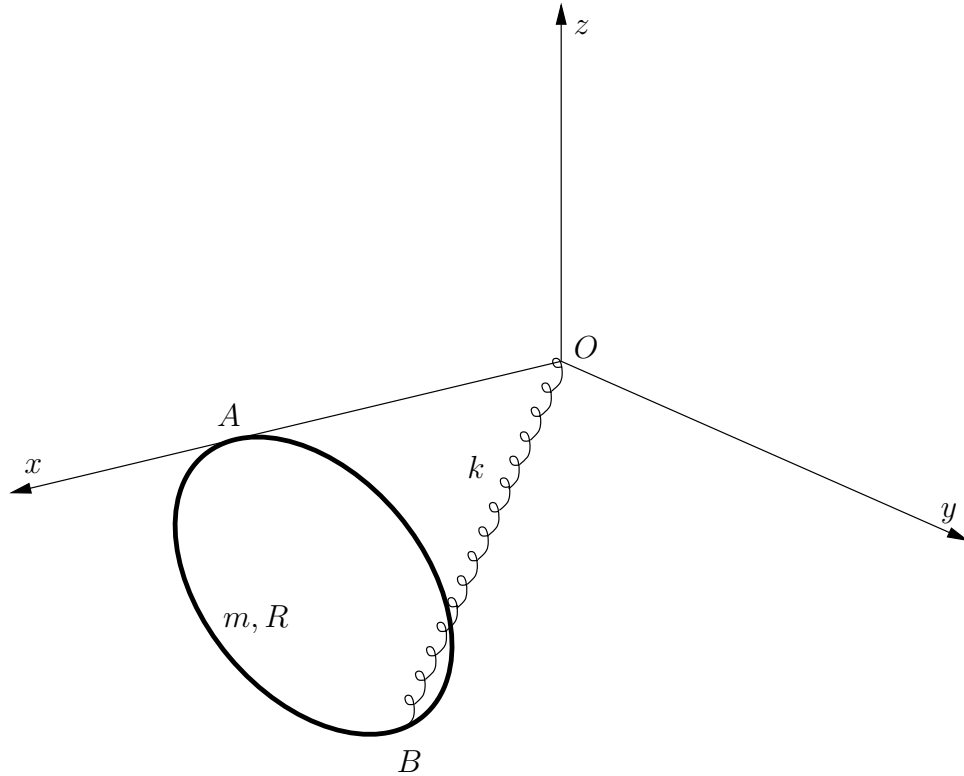


## Prova scritta di Meccanica Analitica - 5 febbraio 2021

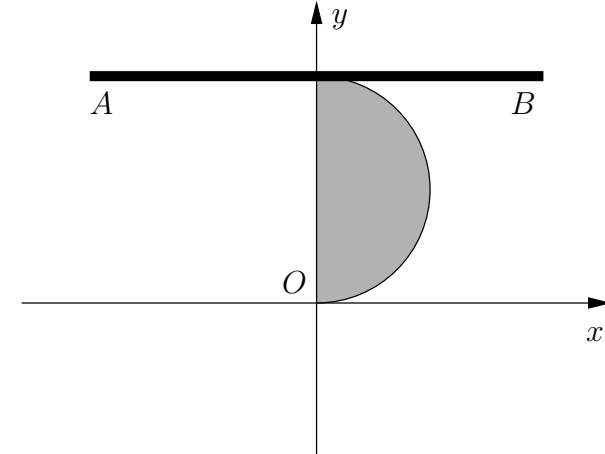
I) Una circonferenza materiale omogenea di massa  $m$  e raggio  $R$  si muove in modo che il punto  $A$  della circonferenza scorra sull'asse  $x$  di un sistema di riferimento cartesiano ortogonale  $Oxyz$ . Inoltre la circonferenza può ruotare attorno all'asse  $x$ .

Tutto il sistema è soggetto alla forza di gravità e sul punto  $B$  del diametro  $AB$  agisce una forza elastica di polo l'origine e coefficiente  $k > 0$ . Supposti i vincoli lisci, si chiede di:

1. trovare le posizioni di equilibrio del sistema;
2. discuterne la stabilità;
3. determinare la lagrangiana del sistema.



II) Si calcoli la matrice d'inerzia del corpo rigido in figura rispetto al sistema di riferimento indicato. Il corpo è formato da un'asta  $AB$  omogenea di massa  $m$  e lunghezza  $4\ell$  e da un semidisco omogeneo di massa  $m$  e raggio  $\ell$ . Il punto di contatto tra il semidisco e l'asta è il baricentro dell'asta.

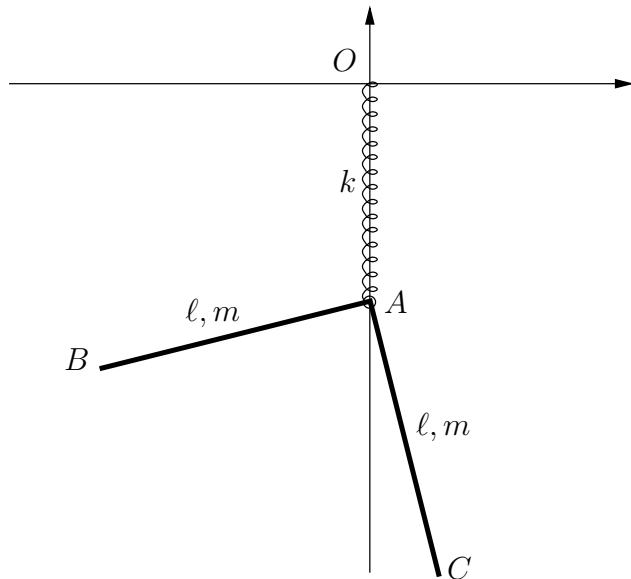


## Prova scritta di Meccanica Analitica - 8 gennaio 2021

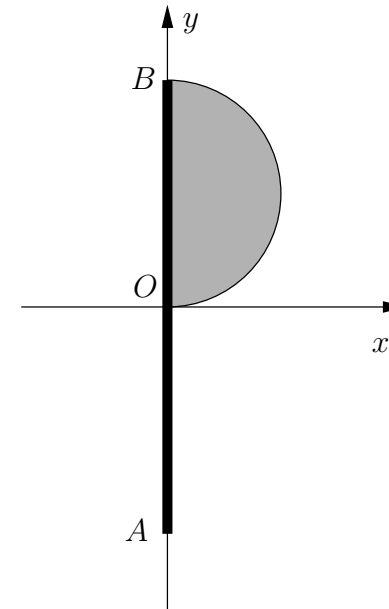
I) Un corpo rigido è formato da due aste omogenee  $AB$ ,  $AC$ , ognuna di lunghezza  $\ell$  e massa  $m$ , saldate ad angolo retto nell'estremo comune  $A$ . Il corpo è libero di ruotare in un piano verticale attorno al punto  $A$ , che può scorrere sull'asse verticale di un sistema di riferimento cartesiano ortogonale.

Tutto il sistema è soggetto alla forza di gravità e sul punto  $A$  agisce una forza elastica verticale con polo nell'origine e coefficiente  $k > 0$ . Considerando tutti i vincoli lisci, si chiede di:

1. trovare le posizioni di equilibrio del sistema
2. discuterne la stabilità;
3. scrivere la lagrangiana del sistema e le corrispondenti equazioni differenziali del moto.



II) Si calcoli la matrice d'inerzia del corpo rigido in figura rispetto al sistema di riferimento indicato. Il corpo è formato da un'asta  $AB$  omogenea di massa  $m$  e lunghezza  $4\ell$  e da un semidisco omogeneo di massa  $m$  e raggio  $\ell$ .

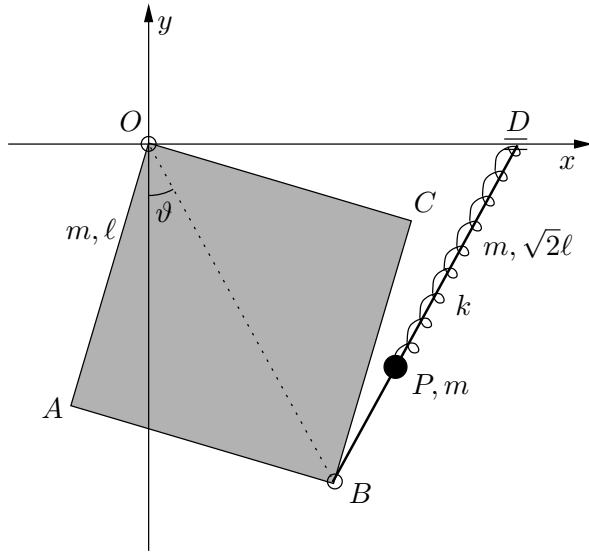


## Prova scritta di Meccanica Analitica - 18 settembre 2020

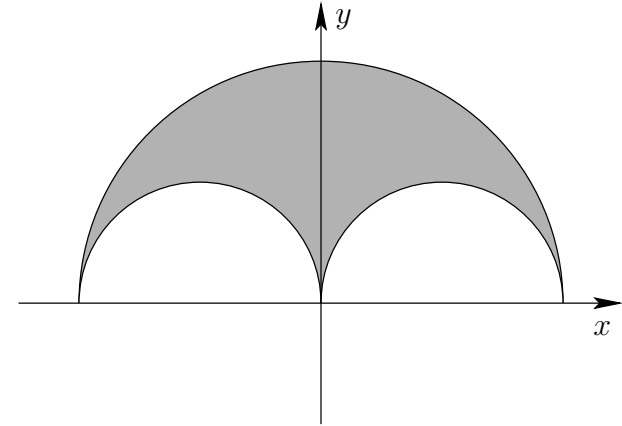
I) Una lamina quadrata omogenea  $OABC$  di massa  $m$  e lato  $\ell$  è libera di ruotare attorno al suo vertice fisso  $O$  che è l'origine di un riferimento cartesiano ortogonale  $Oxy$ . Al vertice  $B$  opposto ad  $O$  è agganciato l'estremo di un'asta omogenea  $BD$  di massa  $m$  e lunghezza  $\sqrt{2}\ell$ , che può ruotare attorno a  $B$ . L'estremo  $D$  dell'asta è vincolato a scorrere sull'asse  $x$ . Inoltre, sull'asta  $BD$  scorre un punto materiale  $P$  di massa  $m$ .

Su tutto il sistema agisce la forza peso e tra il punto  $P$  e l'estremo  $D$  dell'asta intercorre una forza elastica di coefficiente  $k > 0$ . Supposti i vincoli lisci, si chiede di:

1. trovare le posizioni di equilibrio ordinarie del sistema e discuterne l'esistenza e la stabilità in funzione del parametro meccanico  $\lambda = \frac{mg}{k\ell}$ ;
2. trovare le posizioni di equilibrio di confine;
3. determinare l'energia cinetica del sistema.



II) Si calcoli la matrice d'inerzia della lamina piana rappresentata in figura rispetto al sistema di riferimento indicato (l'asse  $z$  è ortogonale al piano del foglio). La massa della lamina è  $2m$  e il raggio del semicerchio grande misura  $2R$  mentre quello dei semicerchi piccoli è la metà.



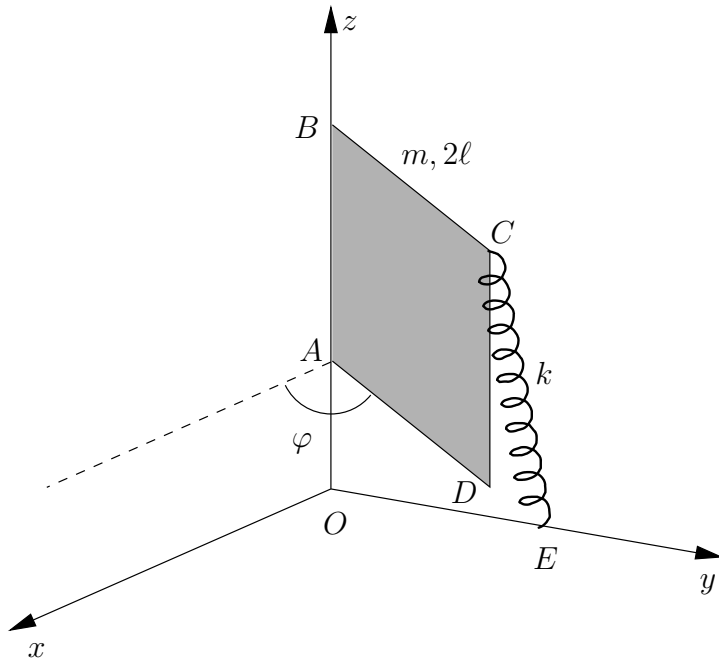
## Prova scritta di Meccanica Analitica - 4 settembre 2020

I) Una lamina quadrata omogenea  $ABCD$  di massa  $m$  e lato  $2\ell$  è libera di ruotare attorno al lato  $AB$ , che scorre sull'asse verticale di un sistema di riferimento cartesiano ortogonale  $Oxyz$ .

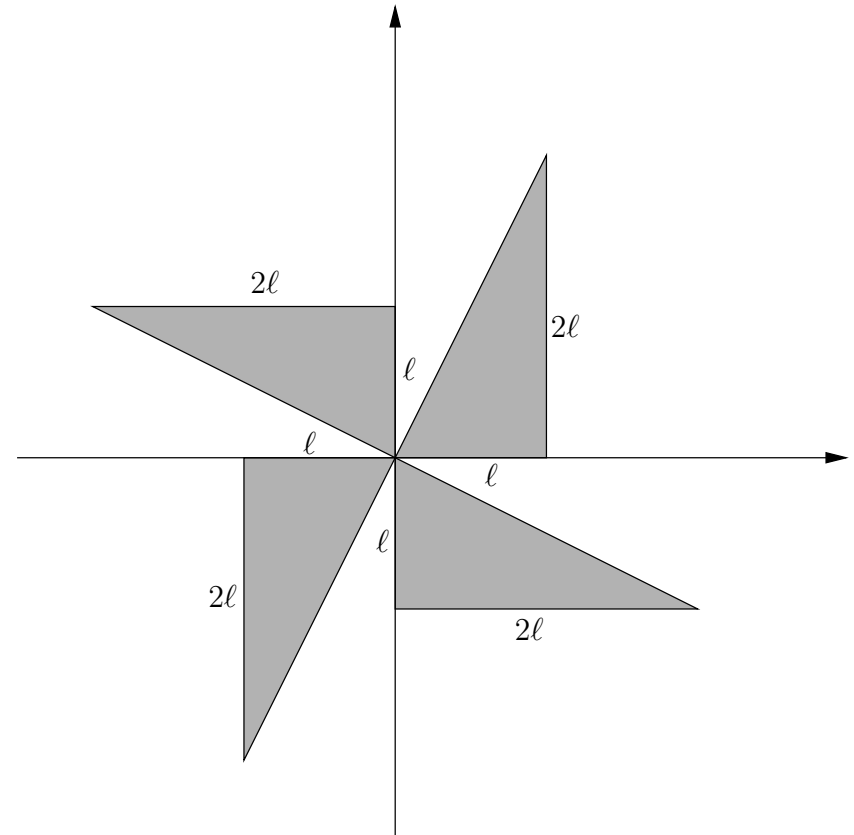
Su tutto il sistema agisce la forza peso e sul punto  $C$  agisce una forza elastica di coefficiente  $k > 0$  e polo il punto  $E(0, 2\ell, 0)$ .

Si chiede di:

1. trovare le posizioni di equilibrio del sistema e discuterne la stabilità;
2. determinare l'energia cinetica del sistema;
3. scrivere la lagrangiana approssimata attorno a una posizione di equilibrio stabile.



II) Una lamina piana omogenea di massa  $4m$  è formata da quattro triangoli rettangoli di cateti  $\ell$ ,  $2\ell$  disposti come in figura. Se ne calcoli il **momento d'inerzia rispetto all'asse perpendicolare** al piano della lamina e passante per il vertice comune ai quattro triangoli.



## Prova scritta di Meccanica Analitica - 17 luglio 2020

I) In un piano verticale, un'asta  $OA$  di massa  $m$  e lunghezza  $\ell$  si muove ruotando attorno all'estremo  $O$ , fisso nell'origine di un sistema di riferimento  $Oxy$ . Una seconda asta  $AB$  identica alla prima, ha l'estremo  $A$  in comune con la prima asta e può ruotare attorno ad esso.

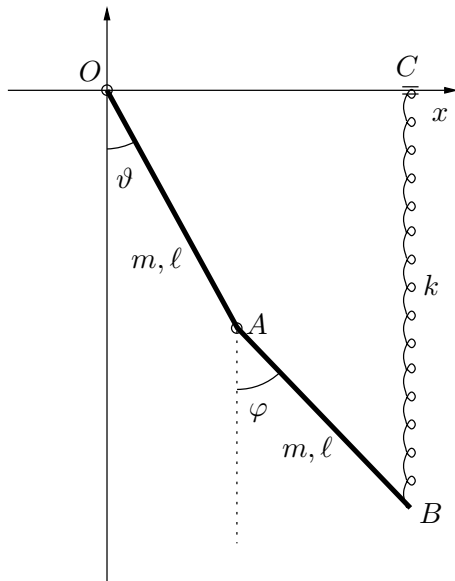
Sull'estremo  $B$  agisce una forza elastica di coefficiente  $k > 0$  e polo il punto  $C$ , proiezione di  $B$  sull'asse delle ascisse. Inoltre il sistema è soggetto alla forza peso e tutti i vincoli sono lisci.

Si chiede di:

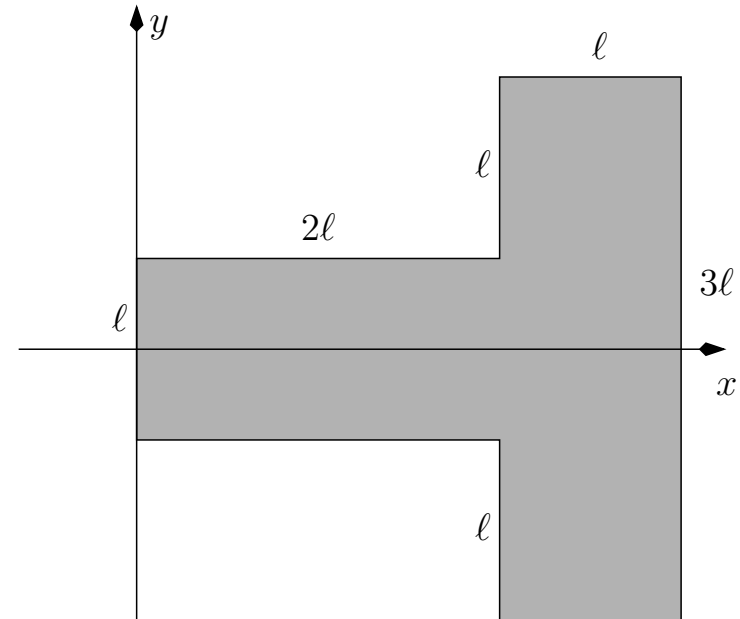
1. trovare le posizioni di equilibrio del sistema in funzione del parametro

$$\lambda = \frac{mg}{k\ell};$$

2. discutere la stabilità delle posizioni di equilibrio nel caso  $\lambda > 4$ ;
3. scrivere l'energia cinetica del sistema.



II) Si calcoli la matrice d'inerzia della lamina piana in figura, rispetto al sistema di riferimento indicato (l'asse  $z$  è ortogonale al piano del foglio). La massa della lamina è  $5m$ .



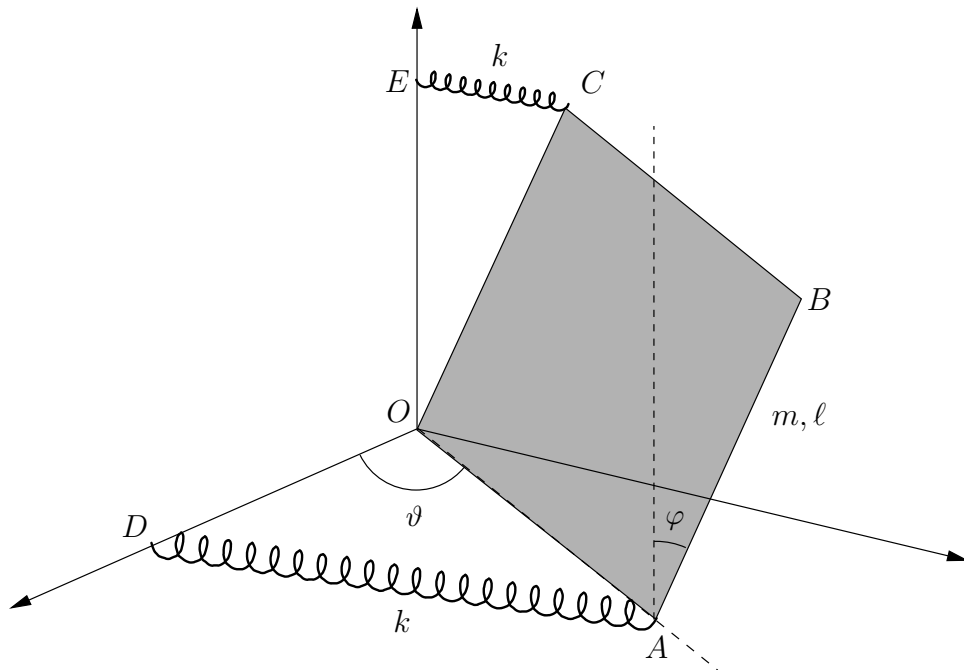
## Prova scritta di Meccanica Analitica - 26 giugno 2020

I) Una lamina quadrata  $OABC$  di massa  $m$  e lato  $\ell$  si muove in modo che il lato  $OA$  stia nel piano orizzontale  $xy$  di un sistema di riferimento  $Oxyz$  e il punto  $O$  sia fisso nell'origine.

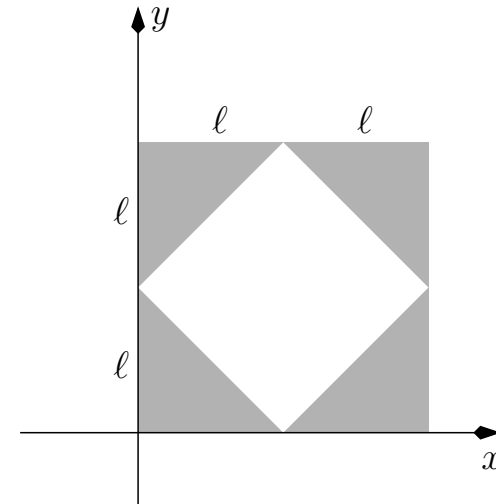
Sul vertice  $A$  della lamina agisce una forza elastica di coefficiente  $k > 0$  e polo il punto  $D$  di coordinate  $(\ell, 0, 0)$ ; sul vertice  $C$  agisce un'altra forza elastica di coefficiente  $k > 0$  e polo il punto  $E$  di coordinate  $(0, 0, \ell)$ . Inoltre il corpo rigido è soggetto alla forza peso e tutti i vincoli sono lisci.

Si denotino con  $\vartheta$  l'angolo tra il semiasse delle  $x$  positive e il lato  $OA$ , e con  $\varphi$  l'angolo tra il semipiano verticale ascendente passante per  $OA$  e il semipiano della lamina. Si chiede di:

1. scrivere l'energia cinetica del sistema;
2. trovare le posizioni di equilibrio del sistema;
3. discutere la stabilità delle posizioni di equilibrio in funzione del parametro  $\lambda = \frac{mg}{k\ell}$ .



II) Si calcoli la matrice d'inerzia della lamina piana formata da quattro triangoli rettangoli isosceli disposti come in figura, rispetto al sistema di riferimento indicato (l'asse  $z$  è ortogonale al piano del foglio). Il cateto di ogni triangolo misura  $\ell$  e la massa della lamina è  $4m$ .





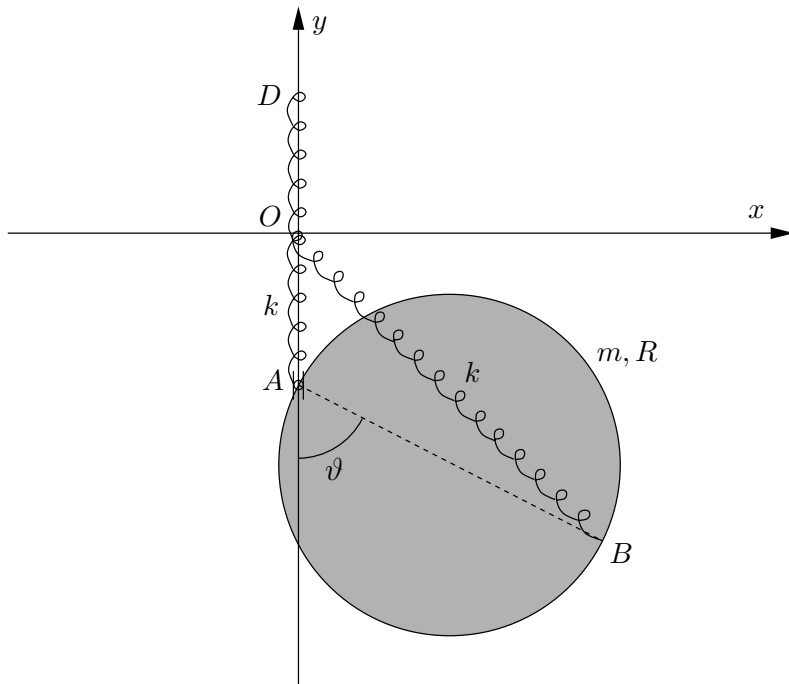
## Prova scritta di Meccanica Analitica - 12 giugno 2020

I) In un piano verticale, un disco omogeneo di massa  $m$  e raggio  $R$  è libero di ruotare attorno a un suo punto  $A$  del bordo. Tale punto  $A$  scorre sull'asse verticale di un riferimento cartesiano ortogonale  $Oxy$ .

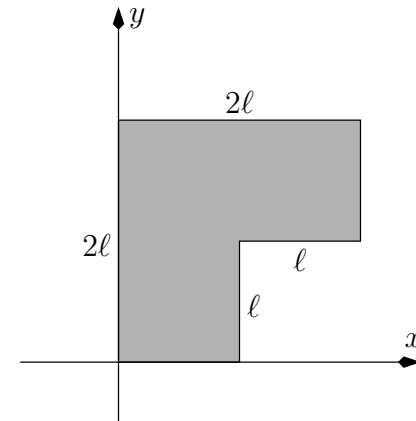
Sul punto  $A$  agisce una forza elastica di coefficiente  $k > 0$  e polo il punto  $D$  di coordinate  $(0; R)$ ; sul punto  $B$ , diametralmente opposto ad  $A$ , agisce un'altra forza elastica, sempre di coefficiente  $k > 0$ , con polo l'origine  $O$ . Inoltre su tutto il sistema agisce la forza peso.

Supposti i vincoli lisci, si chiede di:

1. trovare le posizioni di equilibrio del sistema;
2. discuterne la stabilità;
3. scrivere la lagrangiana del sistema.



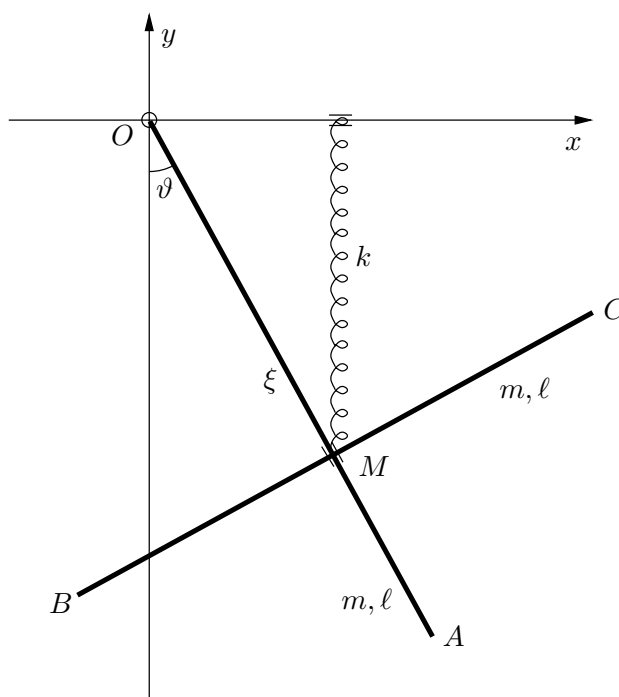
II) Si calcoli la matrice d'inerzia della lamina piana rappresentata in figura rispetto al sistema di riferimento indicato (l'asse  $z$  è ortogonale al piano del foglio). La massa della lamina è  $3m$ .



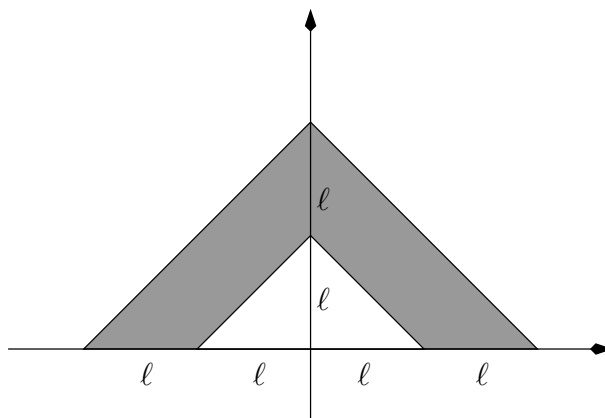
**Prova scritta di Meccanica Analitica**  
**17 gennaio 2020**

1) In un piano verticale, un'asta omogenea  $OA$  di massa  $m$  e lunghezza  $\ell$  è libera di ruotare attorno al suo estremo fisso  $O$ , origine di un riferimento cartesiano ortogonale  $Oxy$ . Una seconda asta  $BC$ , identica alla prima, ha il punto medio  $M$  vincolato a scorrere sulla prima asta e si mantiene sempre ortogonale ad essa. Su tutto il sistema agisce la forza peso e sul punto  $M$  agisce una forza elastica sempre verticale di coefficiente  $k > 0$  e polo sull'asse  $x$ . Supposti i vincoli lisci, si chiede di:

1. trovare le posizioni di equilibrio ordinarie del sistema;
2. discuterne la stabilità;
3. trovare le posizioni di equilibrio di confine;
4. scrivere le equazioni del moto.



2) Si calcoli la matrice d'inerzia della lamina piana rappresentata in figura rispetto al sistema di riferimento indicato (l'asse  $z$  è ortogonale al piano del foglio). La massa della lamina è  $2m$ .

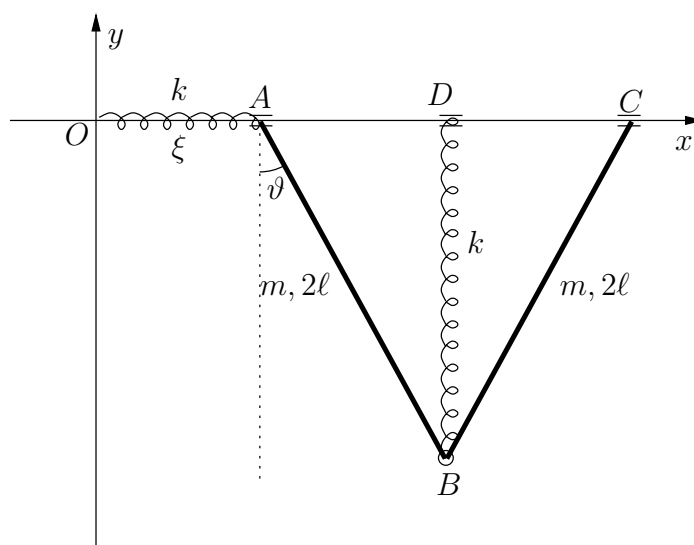


**Prova scritta di Meccanica Analitica**  
**20 settembre 2019**

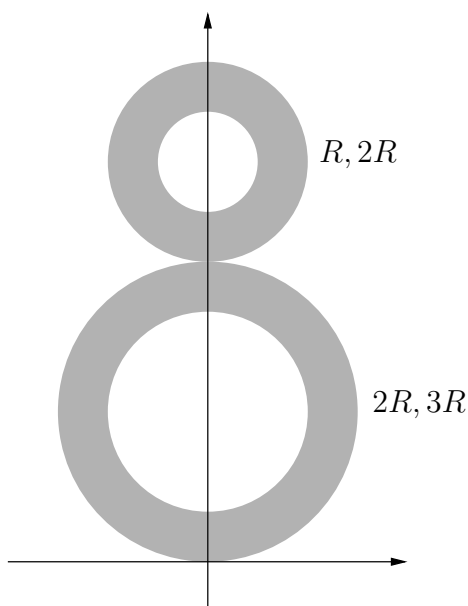
1) Un'asta  $AB$  di massa  $m$  e lunghezza  $2\ell$  è libera di ruotare attorno al proprio estremo  $A$ , che scorre sull'asse orizzontale di un riferimento cartesiano ortogonale  $Oxy$ . All'estremo  $B$  è vincolata una seconda asta  $BC$ , uguale alla prima, che può ruotare liberamente attorno a  $B$  e ha l'estremo  $C$  anch'esso vincolato a scorrere sull'asse  $x$ .

Su tutto il sistema agisce la forza peso; inoltre sull'estremo  $A$  agisce una forza elastica di coefficiente  $k > 0$  e polo l'origine, mentre sull'estremo comune  $B$  agisce una forza elastica sempre verticale di coefficiente  $k > 0$  e polo sull'asse  $x$ . Supposti i vincoli lisci e posto  $\lambda = \frac{mg}{k\ell}$ , si chiede di:

1. trovare le posizioni di equilibrio ordinarie del sistema al variare di  $\lambda$ ;
2. discuterne la stabilità in funzione di  $\lambda$ ;
3. determinare l'energia cinetica del sistema;
4. scrivere la lagrangiana linearizzata attorno a una posizione di equilibrio stabile..



2) La lamina piana rappresentata in figura è formata da due corone circolari tangenti esternamente, una di raggi  $R, 2R$  e l'altra di raggi  $2R, 3R$ . Se ne calcoli la matrice d'inerzia rispetto al sistema di riferimento indicato (l'asse  $z$  è uscente dal foglio), sapendo che la massa totale della figura è  $m$ .

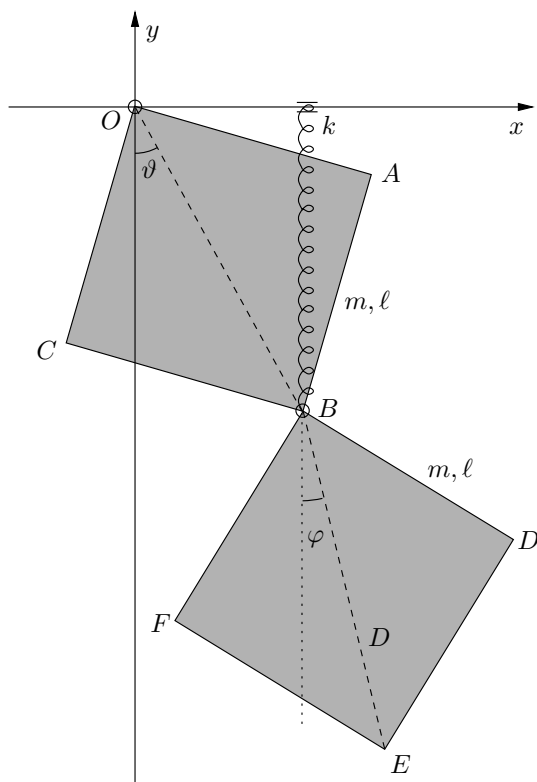


**Prova scritta di Meccanica Analitica**  
**6 settembre 2019**

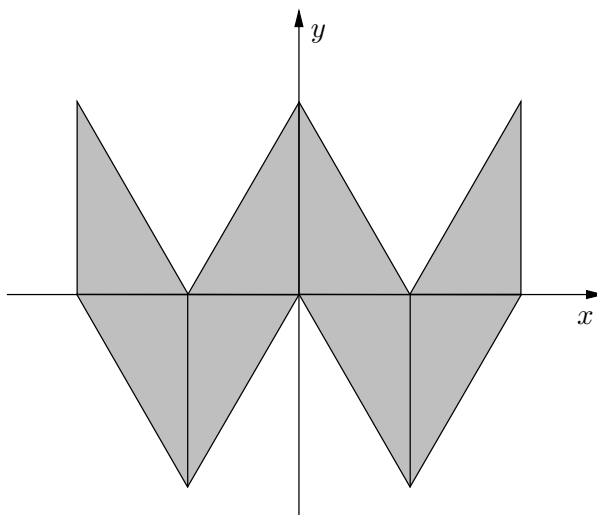
1) Una lamina quadrata  $OABC$  omogenea di massa  $m$  e lato  $\ell$  è libera di ruotare attorno al suo vertice fisso  $O$ , origine di un riferimento cartesiano ortogonale  $Oxy$ . Al vertice  $B$  della lamina opposto ad  $O$  è agganciato il vertice di una seconda lamina quadrata  $BDEF$ , identica alla prima, che può ruotare liberamente attorno a  $B$ .

Su tutto il sistema agisce la forza peso e sul vertice  $B$  agisce una forza elastica sempre verticale di coefficiente  $k > 0$  e polo sull'asse  $x$ . Supposti i vincoli lisci, si chiede di:

1. trovare le posizioni di equilibrio ordinarie del sistema;
2. discuterne la stabilità;
3. determinare l'energia cinetica del sistema;
4. scrivere le equazioni del moto.



2) La lamina piana rappresentata in figura è formata da otto triangoli emiequilateri (ovvero con gli angoli di 30, 60, 90) uguali, ognuno di massa  $m$  e ipotenusa  $2\ell$ . Se ne calcoli la matrice d'inerzia rispetto al sistema di riferimento indicato (l'asse  $z$  è uscente dal foglio).

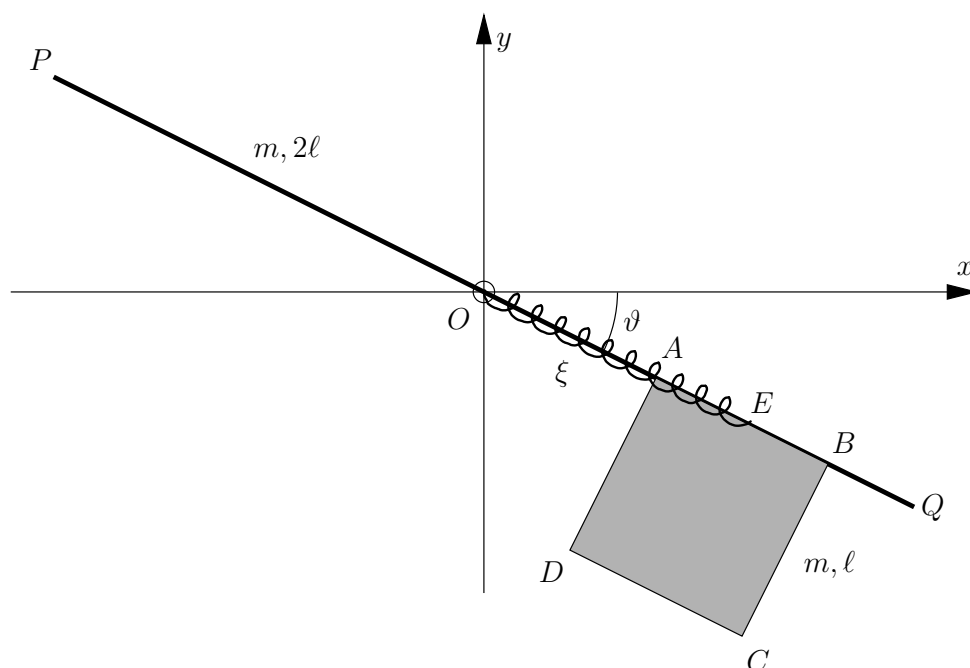


**Prova scritta di Meccanica Analitica**  
**12 luglio 2019**

I) In un sistema piano, una lamina quadrata omogenea  $ABCD$  di lato  $\ell$  e massa  $m$  scorre lungo un'asta omogenea  $PQ$  di massa  $m$  e lunghezza  $2\ell$ , in modo che il lato  $AB$  sia sempre contenuto nell'asta ( $A$  non può oltrepassare  $P$  e  $B$  non può oltrepassare  $Q$ ). L'asta  $PQ$  è libera di ruotare attorno al suo baricentro, che è fissato nell'origine  $O$  di un sistema di riferimento cartesiano ortogonale, che è fissato nell'origine  $O$  di un sistema di riferimento cartesiano ortogonale.

Tutto il sistema è soggetto alla forza di gravità e sul punto medio del lato  $AB$  della lamina quadrata agisce una forza elastica di coefficiente  $k > 0$  e polo il punto  $O$ . Si chiede di:

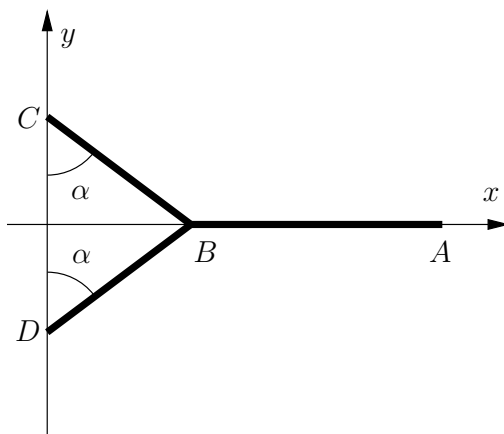
1. trovare le posizioni di equilibrio ordinarie del sistema al variare del parametro meccanico  $\lambda = \frac{mg}{k\ell}$ ;
2. discutere la stabilità di tali posizioni;
3. trovare le eventuali posizioni di equilibrio di confine;
4. scrivere la lagrangiana del sistema.



(Nota: il disegno non è in scala)

II) Un corpo rigido è formato da tre aste omogenee:  $AB$  di massa  $2m$  e lunghezza  $2\ell$ ,  $BC$  e  $BD$  ognuna di massa  $m$  e lunghezza  $\sqrt{2}\ell$ , disposte come in figura.

- Si determini il valore dell'angolo  $\alpha$  in modo che l'ascissa del baricentro del corpo rigido valga  $x_G = \frac{5}{4}\ell$ .
- Per quel valore di  $\alpha$ , si trovi la matrice d'inerzia del corpo rigido rispetto al sistema di riferimento indicato.

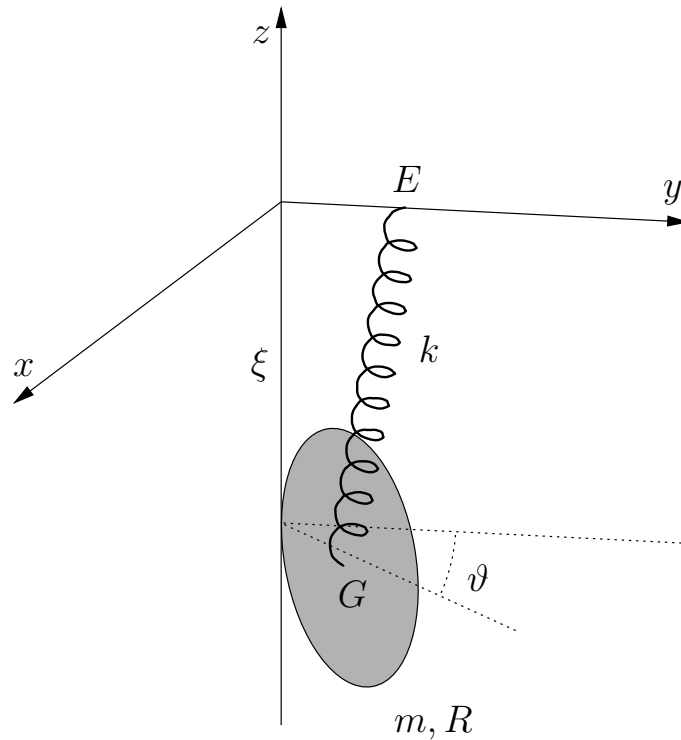


**Prova scritta di Meccanica Analitica**  
**Appello del 14 giugno 2019**

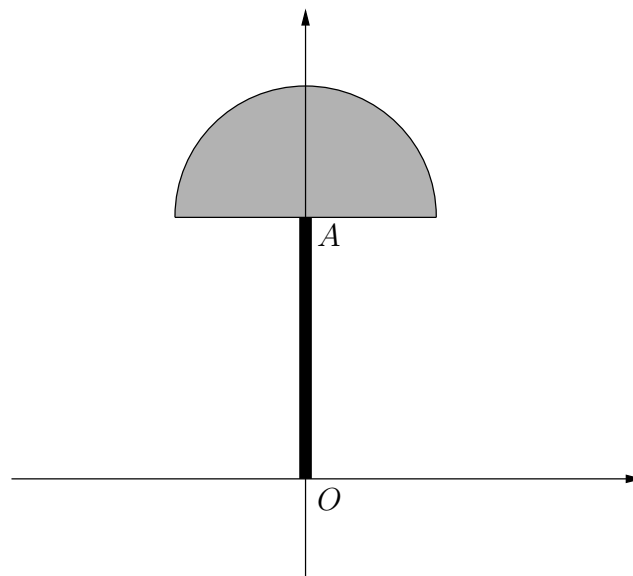
I) Un lamina circolare omogenea di raggio  $R$  e massa  $m$  **rotola senza strisciare** sull'asse  $z$  di un sistema di riferimento cartesiano ortogonale  $Oxyz$ , ed è libera di ruotare attorno a tale asse. Sul centro  $G$  della lamina agisce una forza elastica di coefficiente  $k > 0$  e polo il punto  $E$  di coordinate  $(0, R, 0)$ .

Tutto il sistema è soggetto alla forza di gravità. Si chiede di:

1. trovare le posizioni di equilibrio del sistema e discuterne la stabilità;
2. determinare le equazioni differenziali del moto del sistema;
3. scrivere la lagrangiana approssimata attorno alla posizione di equilibrio stabile.



II) Un corpo rigido piano è formato da un'asta  $OA$  di lunghezza  $2R$ , massa  $m$  e densità lineare crescente da  $O$  verso  $A$  e da un semidisco di massa  $m$  e raggio  $R$ , disposti come in figura. Se ne determini la matrice d'inerzia nel sistema di riferimento indicato.



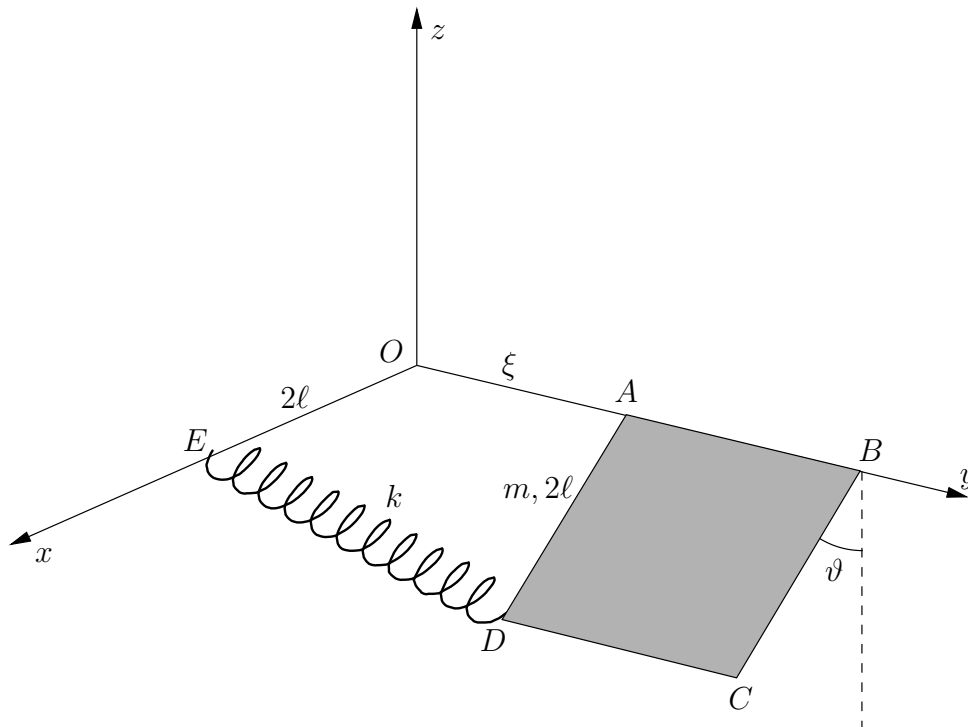
**Prova scritta di Meccanica Analitica**  
**Appello del 31 maggio 2019**

I) Un lamina quadrata omogenea  $ABCD$  di lato  $2\ell$  e massa  $m$  è libera di ruotare attorno al suo lato  $AB$ , che scorre sull'asse  $y$  di un sistema di riferimento cartesiano ortogonale  $Oxyz$ .

Sul vertice  $D$  della lamina agisce una forza elastica di coefficiente  $k > 0$  e polo il punto  $E$  di coordinate  $(2\ell, 0, 0)$ .

Tutto il sistema è soggetto alla forza di gravità. Supposti i vincoli lisci e posto  $\lambda = \frac{mg}{k\ell}$ , si chiede di:

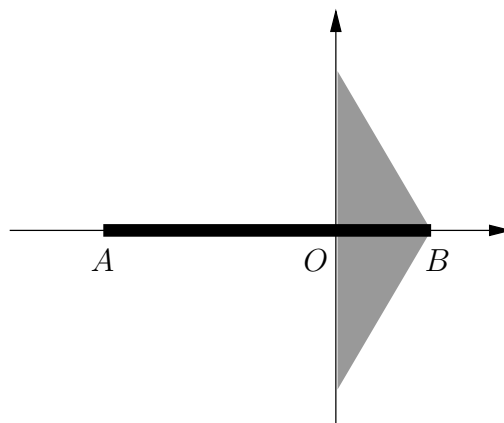
1. trovare le posizioni di equilibrio del sistema;
2. discuterne la stabilità in funzione del parametro meccanico  $\lambda$ ;
3. determinare la lagrangiana del sistema;
4. scrivere la lagrangiana approssimata attorno a una posizione di equilibrio stabile.



II) Un corpo rigido piano è formato da:

- un'asta  $AB$  di massa  $m$  e lunghezza  $\ell$  con densità *quadratica* crescente da  $A$  verso  $B$ ;
- due triangoli emiequilateri omogenei, ognuno di massa  $m$ , con base comune  $OB$ .

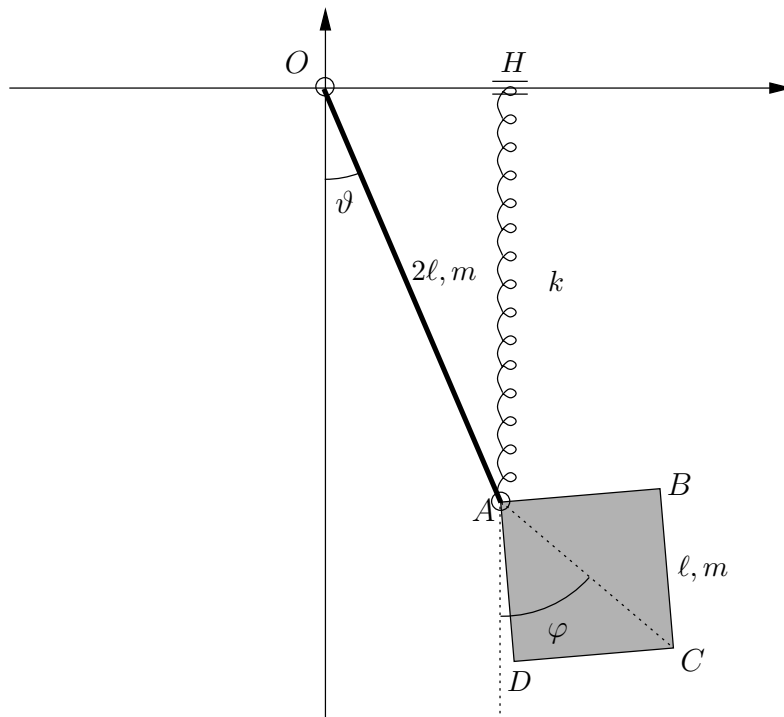
Sapendo che  $O$  è il baricentro dell'asta, si determini la matrice d'inerzia del corpo rigido nel sistema di riferimento indicato.



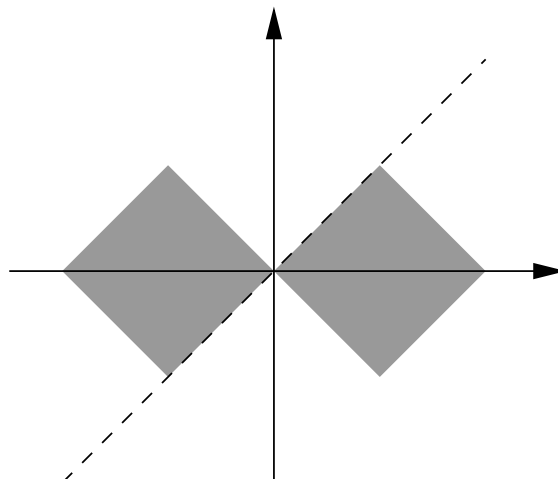
**Prova scritta di Meccanica Analitica**  
**1 febbraio 2019**

I) In un piano verticale, un'asta omogenea  $OA$  di massa  $m$  e lunghezza  $2\ell$  è vincolata a ruotare attorno all'estremo  $O$ . Nell'estremo  $A$  è vincolato il vertice di una lamina quadrata omogenea  $ABCD$  di massa  $m$  e lato  $\ell$ , libera di ruotare attorno ad  $A$ . Sull'estremo  $A$  agisce una forza elastica verticale di coefficiente  $k > 0$  e polo  $H$  sull'asse  $x$  di un sistema di riferimento cartesiano ortogonale  $Oxyz$ . Inoltre tutto il sistema è soggetto alla forza di gravità. Supposti i vincoli lisci, ponendo  $\lambda = mg/k\ell$ , si chiede di:

1. trovare le posizioni di equilibrio del sistema e discuterne la stabilità;
2. determinare la lagrangiana del sistema;
3. determinare la lagrangiana approssimata attorno a una posizione di equilibrio stabile.



II) Si calcoli la matrice d'inerzia della lamina piana omogenea della figura, formata da due quadrati, ognuno di massa  $m$  e lato  $\ell$ , rispetto al sistema indicato. Si calcoli poi il momento d'inerzia rispetto all'asse tratteggiato.

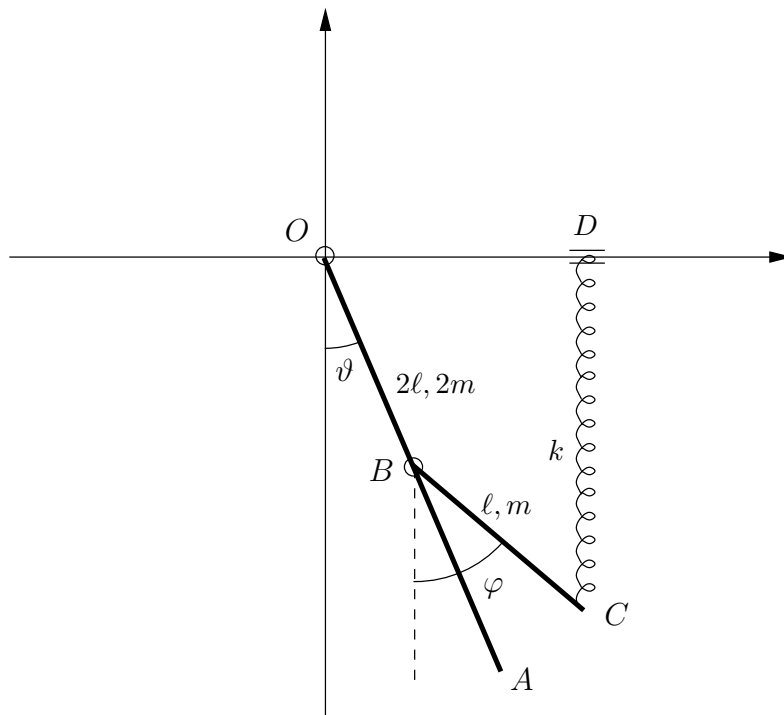




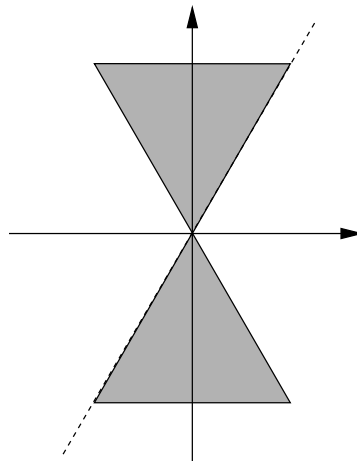
**Prova scritta di Meccanica Analitica**  
**Appello dell'11 gennaio 2019**

I) In un piano verticale, un'asta omogenea  $OA$  di massa  $2m$  e lunghezza  $2\ell$  è vincolata a ruotare attorno all'estremo  $O$ . Nel punto medio  $B$  di  $OA$  è vincolato l'estremo di una seconda asta omogenea  $BC$ , di massa  $m$  e lunghezza  $\ell$ , libera di ruotare attorno a  $B$ . Sull'estremo libero  $C$  agisce una forza elastica verticale di coefficiente  $k > 0$  e polo  $D$  sull'asse  $x$  di un sistema di riferimento cartesiano ortogonale  $Oxyz$ . Inoltre tutto il sistema è soggetto alla forza di gravità. Supposti i vincoli lisci, ponendo  $\lambda = mg/k\ell$ , si chiede di:

1. determinare la lagrangiana del sistema;
2. trovare le posizioni di equilibrio del sistema;
3. discuterne la stabilità nel caso  $\lambda = 3$ ;
4. sempre nel caso  $\lambda = 3$ , scrivere le pulsazioni delle piccole oscillazioni attorno a una posizione di equilibrio stabile.



II) Si calcoli la matrice d'inerzia della lamina piana omogenea della figura, formata da due triangoli equilateri, rispetto al sistema indicato. Si calcoli poi il momento d'inerzia rispetto all'asse tratteggiato.



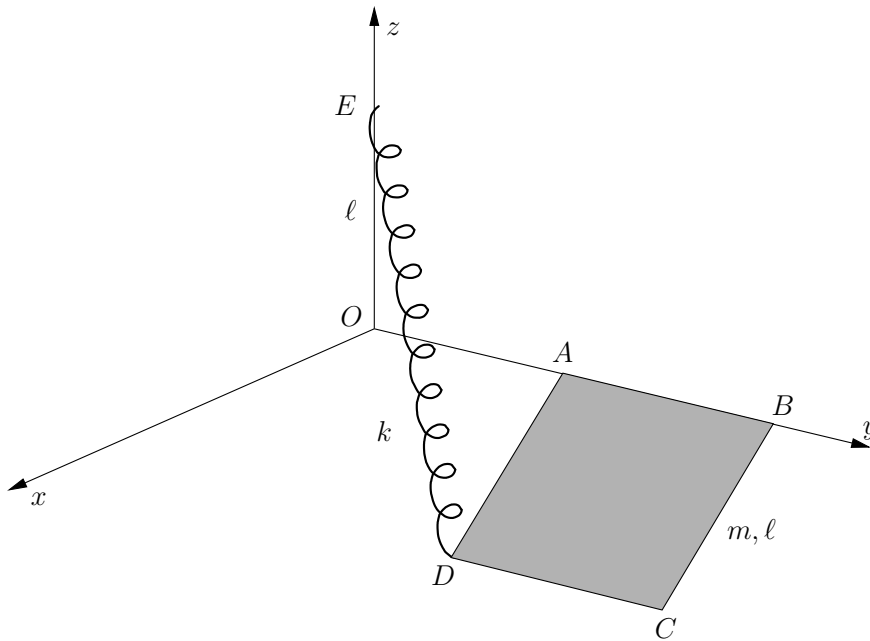
**Prova scritta di Meccanica Analitica**  
**Appello del 14 settembre 2018**

I) Un lamina quadrata omogenea  $ABCD$  di lato  $\ell$  e massa  $m$  è libera di ruotare attorno al suo lato  $AB$ , che scorre sull'asse  $y$  di un sistema di riferimento cartesiano ortogonale  $Oxyz$ .

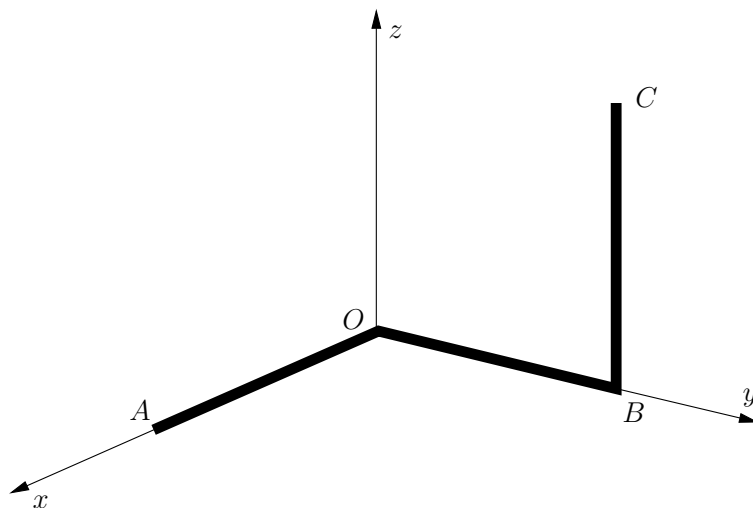
Sul vertice  $D$  della lamina agisce una forza elastica di coefficiente  $k > 0$  e polo il punto  $E$  di coordinate  $(0, 0, \ell)$ .

Tutto il sistema è soggetto alla forza di gravità. Supposti i vincoli lisci, si chiede di:

1. trovare le posizioni di equilibrio ordinarie del sistema;
2. discuterne la stabilità in funzione dei parametri meccanici;
3. determinare la lagrangiana del sistema;
4. scrivere la lagrangiana approssimata attorno a una posizione di equilibrio stabile.



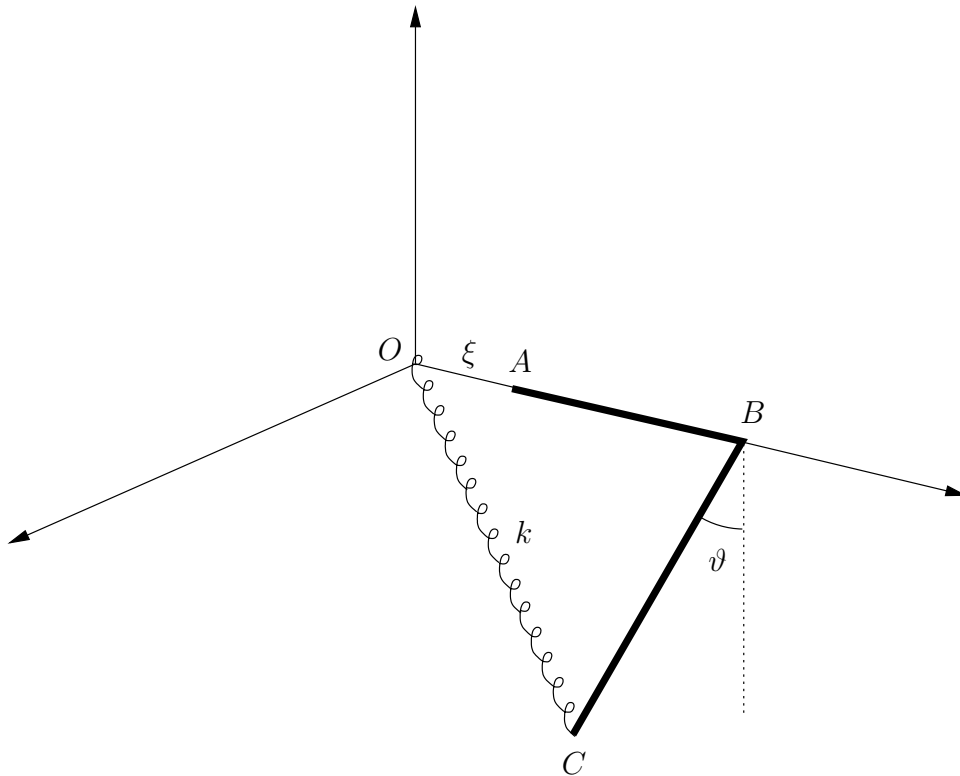
II) Un corpo rigido  $AOBC$  è formato da tre aste omogenee  $AO$ ,  $OB$ ,  $BC$ , tutte di massa  $m$  e lunghezza  $\ell$ , perpendicolari tra loro e disposte come in figura. Se ne calcoli la matrice d'inerzia rispetto al sistema di riferimento indicato.



**Prova scritta di Meccanica Analitica**  
**Appello del 7 settembre 2018**

I) Un corpo rigido piano è formato da due aste  $AB$  e  $BC$ , entrambe di massa  $m$  e lunghezza  $\ell$ , saldate ad angolo retto. Tale corpo si muove in modo che l'asta  $AB$  scorra sull'asse  $y$  di un sistema di riferimento cartesiano ortogonale  $Oxyz$ . Inoltre il corpo può ruotare attorno all'asse  $y$ . Tutto il sistema è soggetto alla forza di gravità e sull'estremo  $C$  della seconda asta agisce una forza elastica di polo l'origine e coefficiente  $k > 0$ . Supposti i vincoli lisci, si chiede di:

1. trovare le posizioni di equilibrio del sistema e discuterne la stabilità;
2. determinare la lagrangiana del sistema;
3. scrivere le pulsazioni delle piccole oscillazioni attorno alla posizione di equilibrio stabile.



II) Data la trasformazione

$$\begin{cases} Q = \frac{q}{p} \sqrt{kp^2 - 1} \\ P = k \sqrt{kp^2 - 1} \end{cases}$$

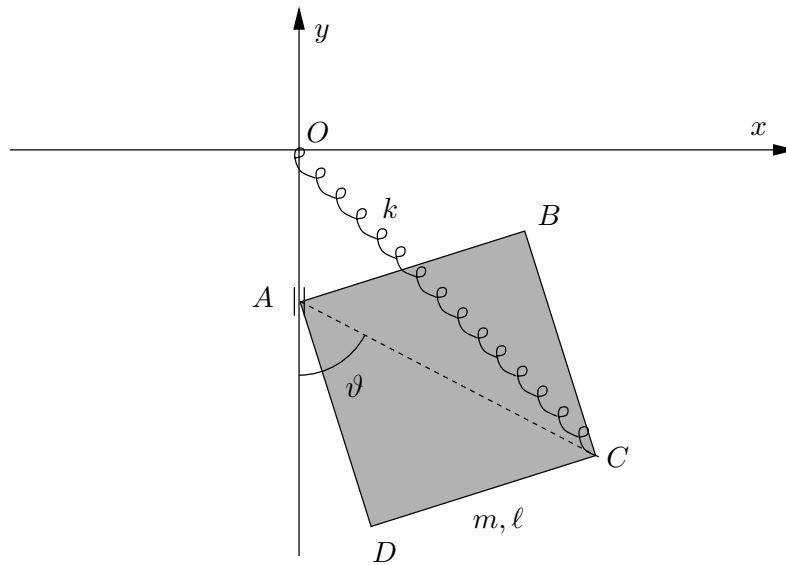
si trovino i valori di  $k \in \mathbb{R}$  per cui essa è canonica. Nei casi affermativi si trovi poi una funzione generatrice del tipo  $F_2(q, P)$ .

**Prova scritta di Meccanica Analitica**  
**Appello del 6 luglio 2018**

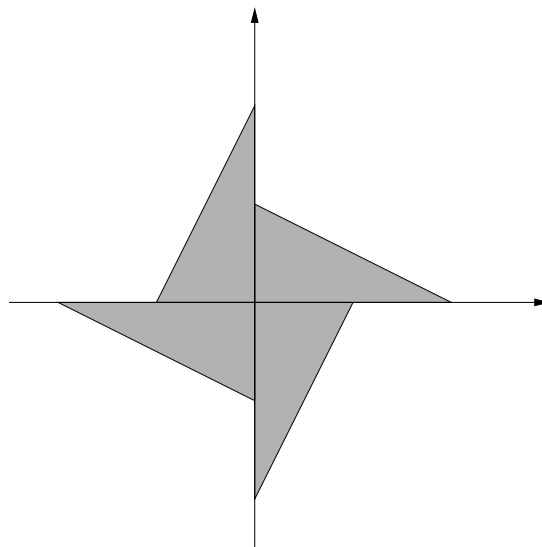
1) Sia dato un sistema di riferimento cartesiano ortogonale  $Oxy$  in un piano verticale. Una lamina quadrata omogenea di massa  $m$  e lato  $\ell$  è libera di ruotare attorno al suo vertice  $A$ , che scorre sull'asse verticale. Sulla lamina agisce la forza peso e sul vertice  $C$  opposto ad  $A$  agisce una forza elastica di coefficiente  $k > 0$  e polo l'origine  $O$ .

Supposti i vincoli lisci, si chiede di:

1. trovare le posizioni di equilibrio del sistema;
2. discuterne la stabilità al variare del parametro  $\frac{mg}{k\ell}$ ;
3. determinare l'energia cinetica del sistema e mostrare che la matrice dell'energia cinetica è invertibile;
4. discutere l'esistenza di integrali primi del moto.



2) Una lamina piana omogenea di massa  $m$  è formata da quattro triangoli rettangoli di cateti  $\ell, 2\ell$  disposti come in figura. Se ne calcoli la matrice d'inerzia nel sistema di riferimento indicato (l'asse  $z$  è perpendicolare al foglio).

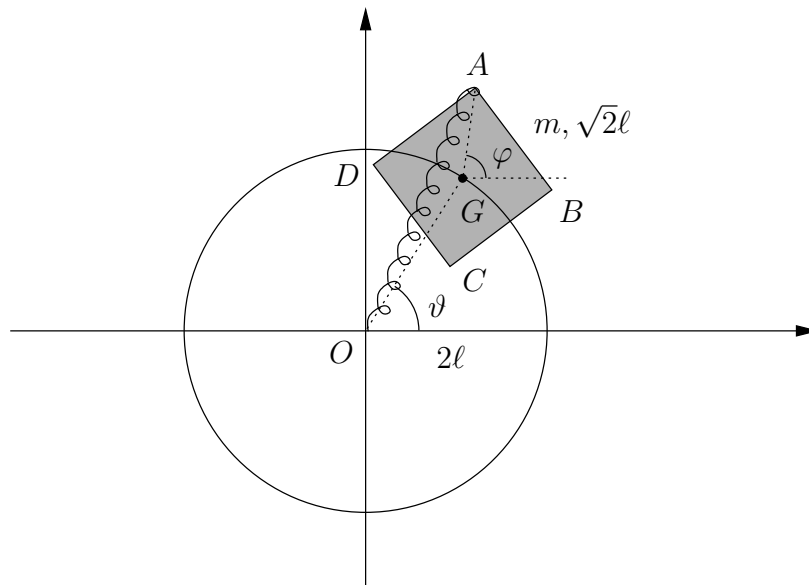


**Prova scritta di Meccanica Analitica**  
**15 giugno 2018**

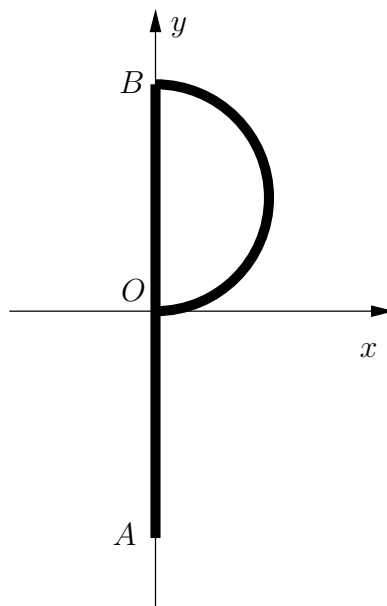
I) In un sistema piano, una lamina quadrata omogenea  $ABCD$  di lato  $\sqrt{2}\ell$  e massa  $m$  ruota attorno al suo centro  $G$ , il quale si muove su una guida circolare di centro  $O$  e raggio  $2\ell$ .

Tutto il sistema è soggetto alla forza di gravità e sul vertice  $A$  della lamina agisce una forza elastica di coefficiente  $k > 0$  e polo il punto  $O$ . Si chiede di:

1. trovare le posizioni di equilibrio del sistema;
2. discuterne la stabilità in funzione del parametro meccanico  $\lambda = \frac{mg}{kR}$ ;
3. scrivere la lagrangiana del sistema;
4. scrivere l'equazione delle piccole oscillazioni attorno a una posizione di equilibrio stabile.



II) Si calcoli la matrice d'inerzia del corpo rigido in figura rispetto al sistema di riferimento indicato. Il corpo è formato da un'asta  $AB$  omogenea di massa  $m$  e raggio  $4\ell$  e da una semicirconferenza omogenea di massa  $m$  e raggio  $\ell$ .

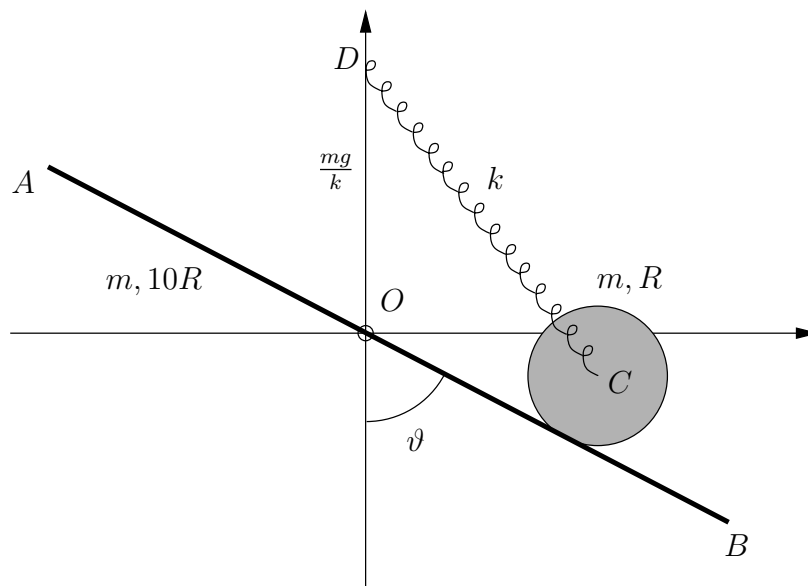


**Prova scritta di Meccanica Analitica**  
**1 giugno 2018**

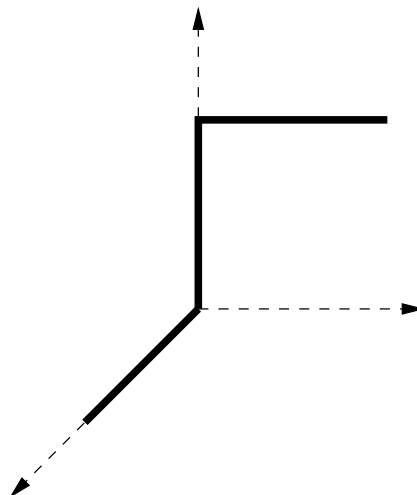
I) In un sistema piano, un disco omogeneo di raggio  $R$  e massa  $m$  ruota senza strisciare lungo un'asta omogenea  $AB$  di massa  $m$  e lunghezza  $10R$ . L'asta  $AB$  è libera di ruotare attorno al suo baricentro, che è fissato nell'origine  $O$  di un sistema di riferimento cartesiano ortogonale.

Tutto il sistema è soggetto alla forza di gravità e sul centro  $C$  del disco agisce una forza elastica di coefficiente  $k > 0$  e polo il punto  $D$  di coordinate  $(0, \frac{mg}{k})$ . Si chiede di:

1. trovare le posizioni di equilibrio ordinarie del sistema in funzione del parametro meccanico  $\lambda = \frac{mg}{kR}$ ;
2. discuterne la stabilità;
3. trovare le eventuali posizioni di equilibrio di confine;
4. scrivere la lagrangiana del sistema e le corrispondenti equazioni differenziali del moto.



II) Un corpo rigido è formato da tre aste omogenee, ognuna di massa  $m$  e lunghezza  $\ell$ , disposte come in figura (le aste sono mutuamente perpendicolari). Se ne trovi la matrice d'inerzia rispetto al sistema di riferimento indicato.

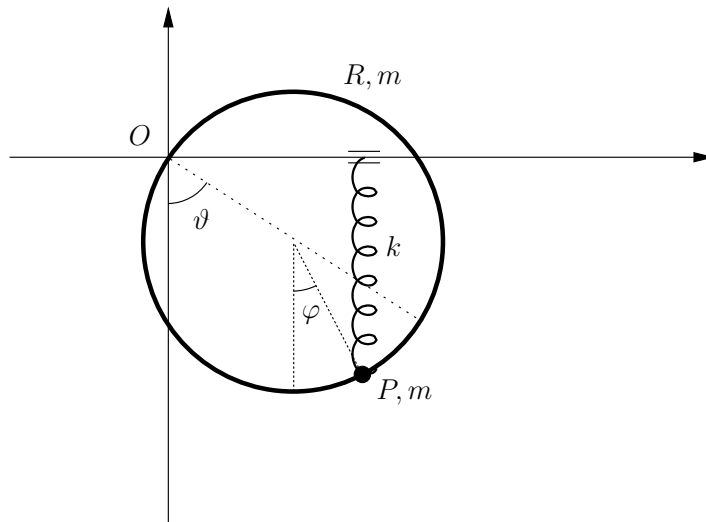


**Prova scritta di Meccanica Analitica**  
**2 febbraio 2018**

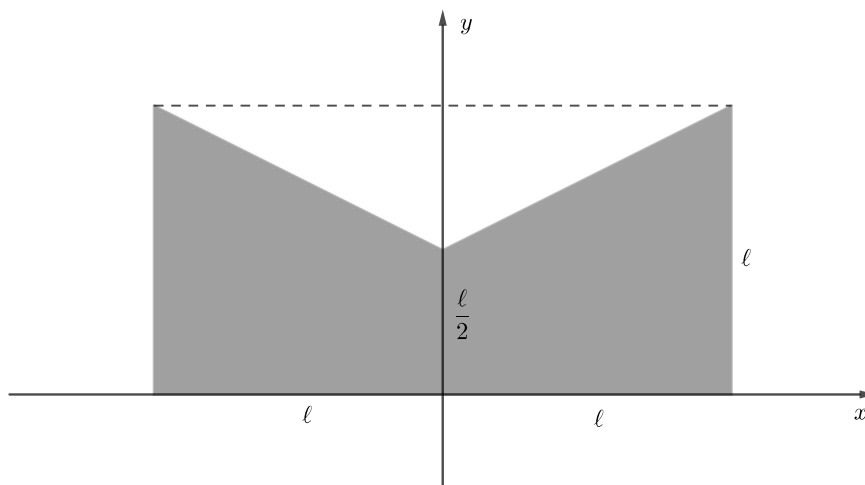
I) Una circonferenza materiale di raggio  $R$  e massa  $m$  è libera di ruotare attorno a un suo punto, fissato nell'origine di un sistema di riferimento cartesiano ortogonale. Un punto materiale  $P$  di massa  $m$  scorre sulla circonferenza materiale.

Tutto il sistema è soggetto alla forza di gravità e sul punto  $P$  agisce una forza elastica verticale con polo sull'asse  $x$  e coefficiente  $k > 0$ . Considerando tutti i vincoli lisci, si chiede di:

1. trovare le posizioni di equilibrio ordinarie del sistema;
2. discuterne la stabilità in funzione del parametro meccanico  $\lambda = \frac{mg}{kR}$ ;
3. scrivere la lagrangiana del sistema e le corrispondenti equazioni differenziali del moto.



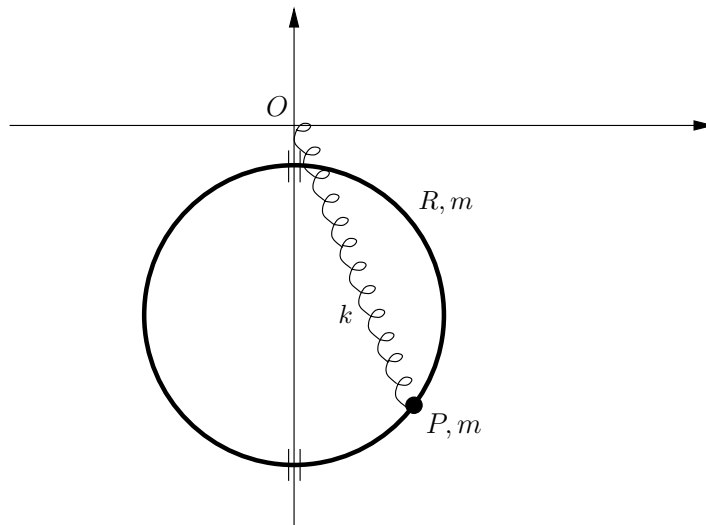
II) Un corpo rigido piano omogeneo di massa  $m$  ha la forma disegnata in figura. Se ne calcoli il **baricentro** e la **matrice d'inerzia** rispetto al sistema di riferimento indicato (l'asse  $z$  non è rappresentato).



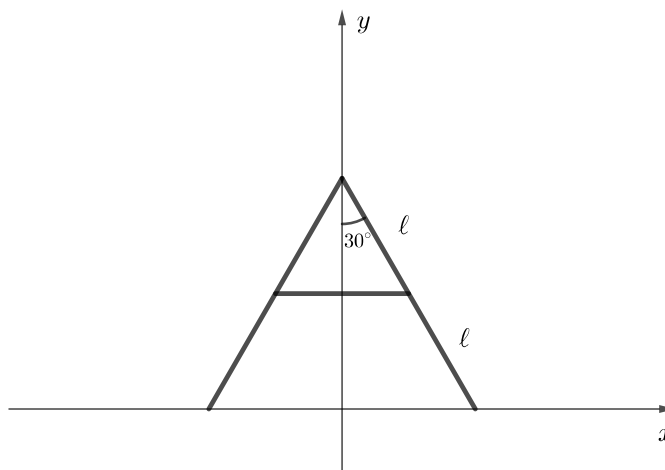
**Prova scritta di Meccanica Analitica**  
**12 gennaio 2018**

1) Un corpo rigido formato da una circonferenza materiale di raggio  $R$  e massa  $m$  è libero di traslare in verticale, in modo che un suo diametro resti sempre sull'asse  $y$  di un sistema di riferimento cartesiano ortogonale. Un punto materiale  $P$  di massa  $m$  scorre sulla circonferenza materiale. Tutto il sistema è soggetto alla forza di gravità e sul punto  $P$  agisce una forza elastica con polo nell'origine e coefficiente  $k > 0$ . Considerando tutti i vincoli lisci, si chiede di:

1. trovare le posizioni di equilibrio ordinarie del sistema;
2. discuterne la stabilità in funzione del parametro meccanico  $\lambda = \frac{mg}{kR}$ ;
3. scrivere la lagrangiana del sistema e le corrispondenti equazioni differenziali del moto;
4. scrivere le pulsazioni delle piccole oscillazioni attorno a una posizione di equilibrio stabile.



2) Una corpo rigido piano omogeneo è formato da tre aste, due di lunghezza  $2\ell$  e una di lunghezza  $\ell$ , disposte come in figura. Sapendo che la massa totale del corpo rigido è  $m$ , se ne calcoli la matrice d'inerzia rispetto al sistema di riferimento indicato (l'asse  $z$  non è rappresentato).



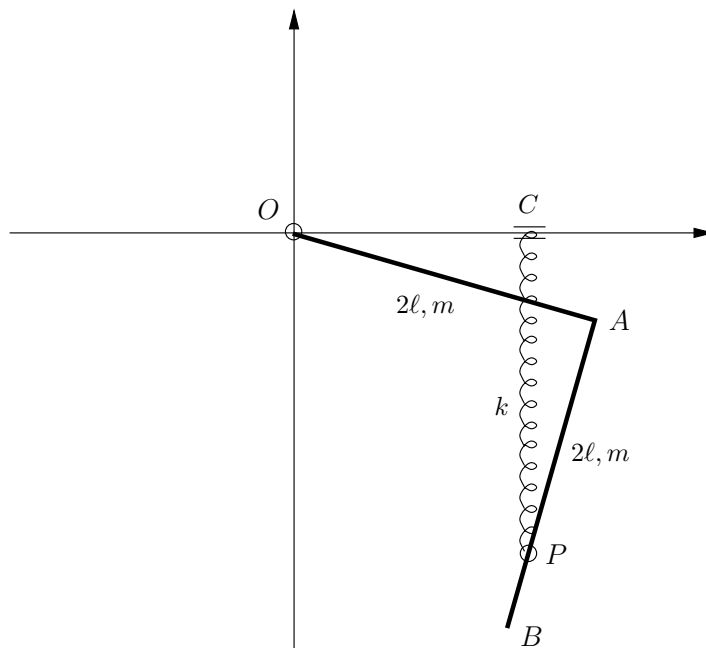


**Prova scritta di Meccanica Analitica**  
**22 settembre 2017**

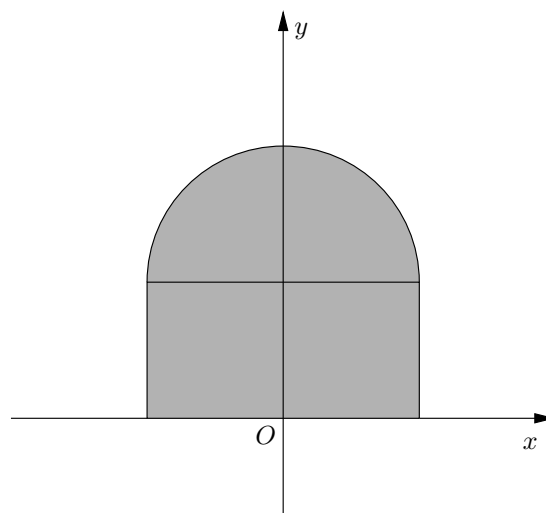
1) Un corpo rigido è formato da due aste omogenee  $OA$ ,  $AB$ , ognuna di lunghezza  $2\ell$  e massa  $m$ , saldate ad angolo retto nell'estremo comune  $A$ . Il corpo è libero di ruotare in un piano verticale e il punto  $O$  è fisso nell'origine di un sistema di riferimento cartesiano ortogonale. Sull'asta  $AB$  scorre poi un punto  $P$  di massa trascurabile.

Tutto il sistema è soggetto alla forza di gravità e sul punto  $P$  agisce una forza elastica verticale con polo sull'asse orizzontale e coefficiente  $k > 0$ . Considerando tutti i vincoli lisci, si chiede di:

1. trovare le posizioni di equilibrio ordinarie del sistema e discuterne la stabilità;
2. trovare le eventuali posizioni di equilibrio di confine del sistema;
3. scrivere la lagrangiana del sistema e le corrispondenti equazioni differenziali del moto.



2) Una lamina piana omogenea è formata da un semidisco di raggio  $R$  e massa  $m$  saldato a un rettangolo di lati  $R, 2R$ . Se ne calcoli la matrice d'inerzia rispetto al sistema di riferimento in figura (l'asse  $z$  non è rappresentato).

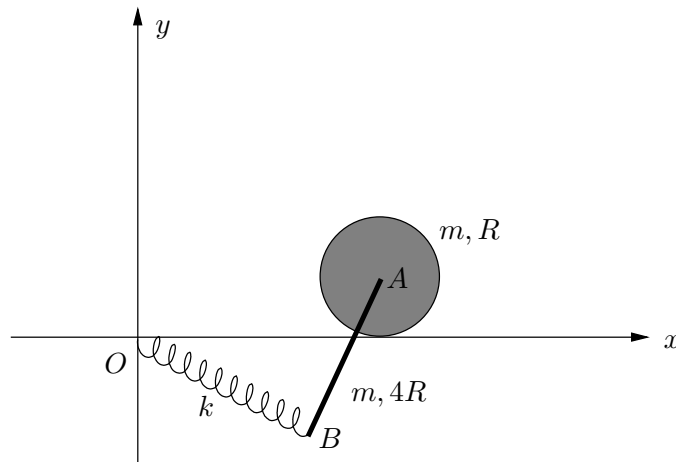


**Prova scritta di Meccanica Analitica**  
**Appello dell'8 settembre 2017**

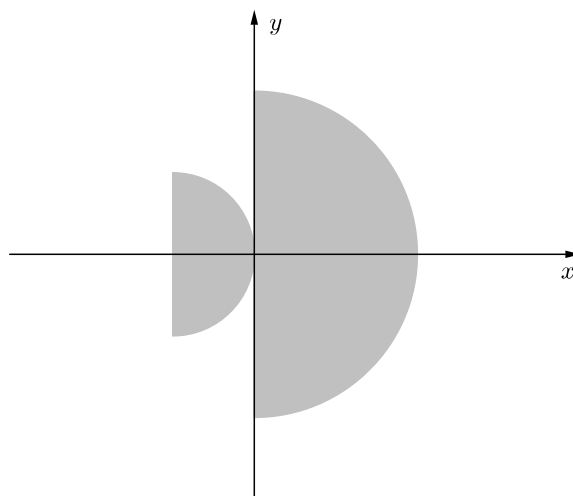
1) Un disco omogeneo di massa  $m$  e raggio  $R$  rotola senza strisciare sull'asse orizzontale di un sistema di riferimento piano  $Oxy$ . Un'asta omogenea  $AB$  di massa  $m$  e lunghezza  $4R$  ha l'estremo  $A$  vincolato al centro del disco ed è libera di ruotare attorno ad esso.

Su tutto il sistema agisce la forza peso e sull'estremo  $B$  dell'asta agisce una forza elastica di coefficiente  $k > 0$  e polo il punto  $O$ . Supposti i vincoli lisci, si chiede di:

- (a) trovare le posizioni di equilibrio del sistema;
- (b) discuterne la stabilità in funzione del parametro meccanico adimensionale  $\lambda = \frac{mg}{kR}$ ;
- (c) determinare la lagrangiana del sistema.



2) Una lamina piana omogenea è formata da due semicerchi di raggi  $R, 2R$  disposti come in figura. Sapendo che la massa della lamina vale  $5m$ , se ne calcoli la matrice d'inerzia rispetto al sistema di riferimento indicato.



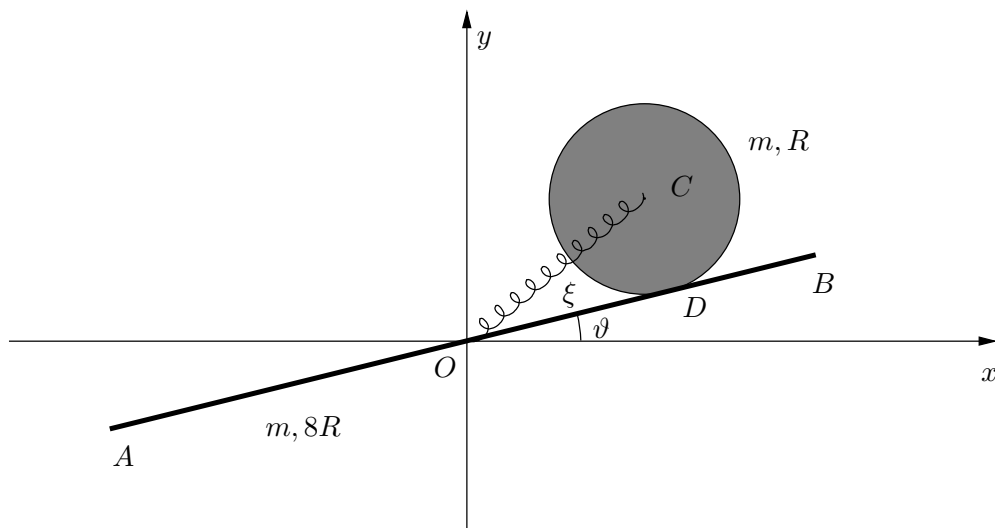
**Prova scritta di Meccanica Analitica**  
**Appello del 14 luglio 2017**

1) Un'asta omogenea  $AB$  di massa  $m$  e lunghezza  $8R$  è libera di ruotare attorno al suo baricentro, fisso nell'origine di un sistema di riferimento piano  $Oxy$ . Un disco omogeneo di massa  $m$  e raggio  $R$  rotola senza strisciare sull'asta, in modo che il punto di contatto  $D$  non esca dall'asta.

Si denoti con  $\xi$  la lunghezza con segno del vettore  $(D - O)$  e con  $\theta$  l'angolo tra la parte positiva dell'asse delle ascisse e l'asta.

Su tutto il sistema agisce la forza peso e sul centro  $C$  del disco agisce una forza elastica di coefficiente  $k > 0$  e polo il punto  $O$ . Supposti i vincoli lisci, si chiede di:

- (a) trovare le posizioni di equilibrio ordinarie del sistema;
- (b) discuterne la stabilità in funzione di  $\lambda = \frac{mg}{kR}$ ;
- (c) trovare le eventuali posizioni di equilibrio di confine;
- (d) determinare l'energia cinetica del sistema.



2) Determinare per quali valori di  $k \in \mathbb{R}$  la trasformazione

$$\begin{cases} Q(q, p) = kqp \\ P(q, p) = \log(kp) - \log q \end{cases}$$

è canonica e trovarne una funzione generatrice del tipo  $F(q, P)$ .

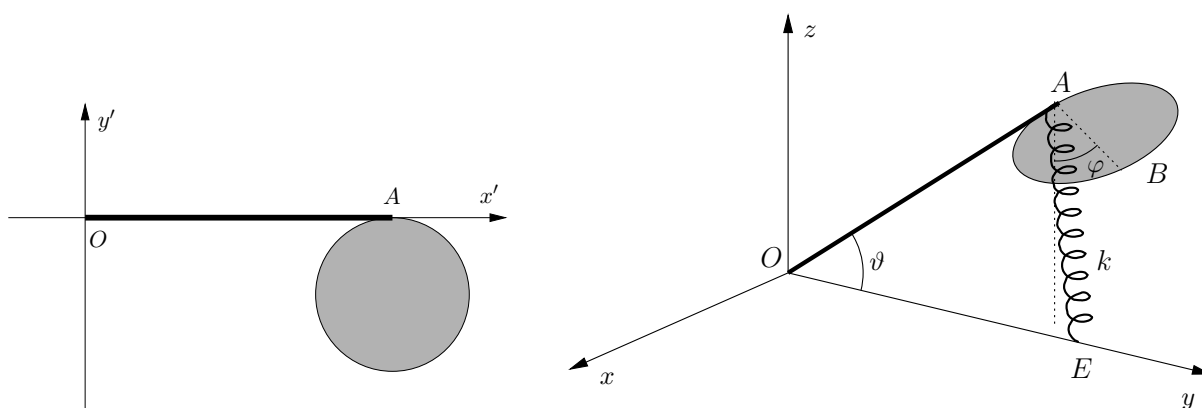
**Prova scritta di Meccanica Analitica**  
**Appello del 30 giugno 2017**

1) Un corpo rigido **piano** è formato da un'asta omogenea  $OA$  di massa  $m$  e lunghezza  $4R$  al cui estremo  $A$  è saldato il bordo di una lamina circolare omogenea di massa  $m$  e raggio  $R$ . Il corpo si muove in modo che l'asta  $OA$  stia nel piano verticale  $yz$  di un sistema di riferimento  $Oxyz$  e il punto  $O$  sia fisso nell'origine.

Sul punto  $A$  agisce una forza elastica di coefficiente  $k > 0$  e polo il punto  $E$  di coordinate  $(0, 4R, 0)$ .

Il sistema è soggetto alla forza peso e tutti i vincoli sono lisci. Posto  $\lambda = \frac{mg}{kR}$  si chiede di:

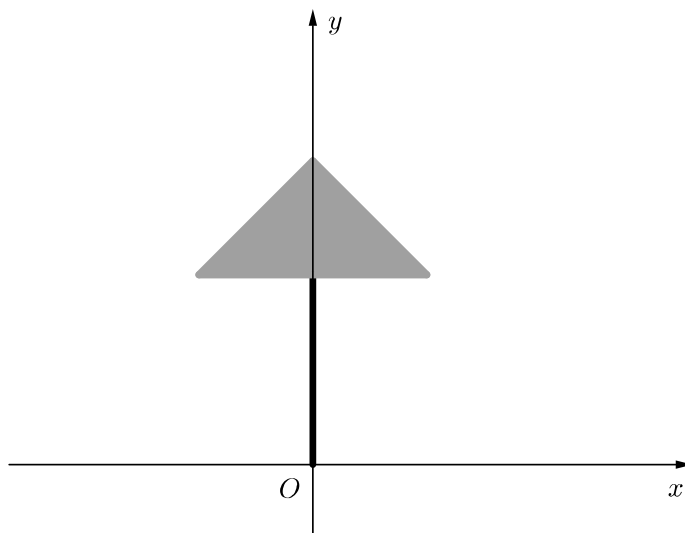
1. trovare la matrice d'inerzia del corpo rigido nel sistema indicato nella prima figura;
2. trovare le posizioni di equilibrio del sistema e discuterne la stabilità;
3. determinare la lagrangiana del sistema.



2) Una lamina piana è formata da un'asta lunga  $\ell$  e con densità del tipo

$$\rho(y) = \rho y^n, \quad \rho \in \mathbb{R}$$

e da una lamina triangolare omogenea con base  $\ell$  e altezza  $\ell/2$ . Sapendo che entrambe le lamine hanno massa  $m$  e che l'ordinata del baricentro dell'asta è  $4\ell/5$ , si calcoli la matrice d'inerzia del corpo rigido rispetto al sistema di riferimento indicato.

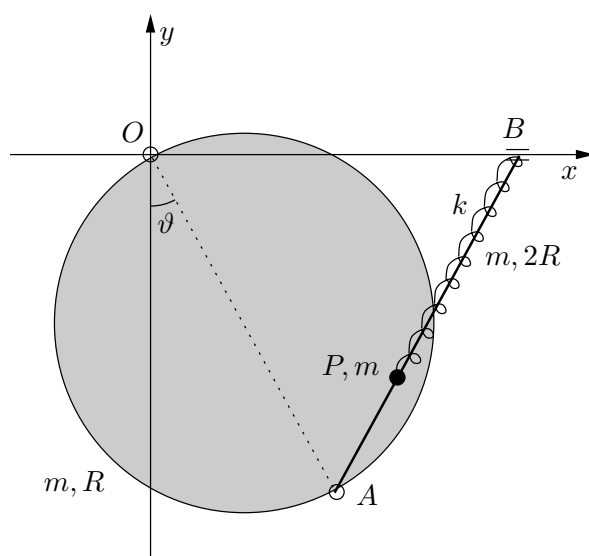


**Prova scritta di Meccanica Analitica**  
**Appello del 9 giugno 2017**

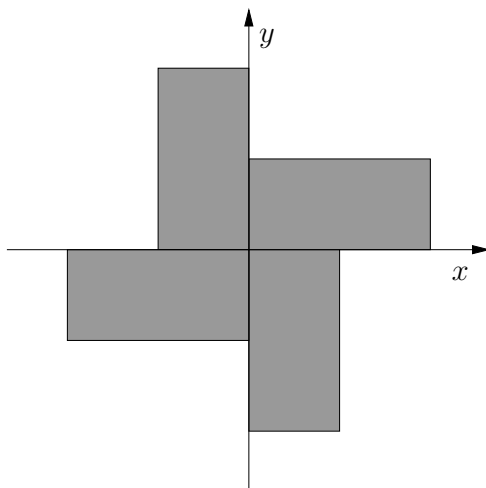
1) Una lamina circolare omogenea di massa  $m$  e raggio  $R$  è libera di ruotare attorno al suo vertice fisso  $O$  che è l'origine di un riferimento cartesiano ortogonale  $Oxy$ . Al punto  $A$  sul bordo della lamina diametralmente opposto ad  $O$  è agganciato l'estremo di un'asta omogenea  $AB$  di massa  $m$  e lunghezza  $2R$ , che può ruotare attorno a  $A$ . L'estremo  $B$  dell'asta è vincolato a scorrere sull'asse  $x$ . Inoltre, sull'asta  $AB$  scorre un punto materiale  $P$  di massa  $m$ .

Su tutto il sistema agisce la forza peso e tra il punto  $P$  e l'estremo  $B$  dell'asta intercorre una forza elastica di coefficiente  $k > 0$ . Supposti i vincoli lisci, si chiede di:

1. trovare le posizioni di equilibrio ordinarie del sistema e discuterne la stabilità in funzione del parametro meccanico  $\lambda = \frac{mg}{kR}$ ;
2. trovare le posizioni di equilibrio di confine;
3. determinare l'energia cinetica del sistema;
4. scrivere la lagrangiana approssimata attorno a una posizione di equilibrio stabile.



2) Una lamina piana omogenea è formata da quattro rettangoli di lati  $a, 2a$  disposti come in figura. Sapendo che la massa di ogni rettangolo vale  $m$ , se ne calcoli la matrice d'inerzia rispetto al sistema di riferimento indicato.

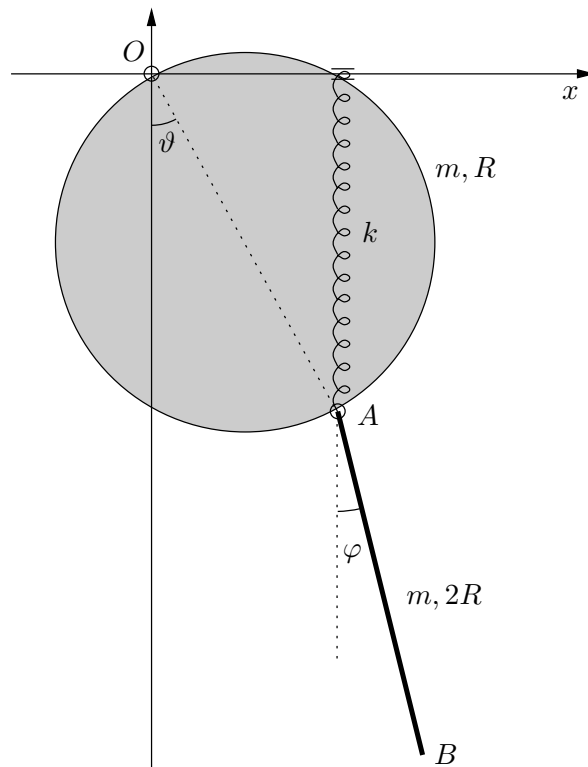


**Prova scritta di Meccanica Analitica**  
**Appello del 17 febbraio 2017**

1) Una lamina circolare omogenea di massa  $m$  e raggio  $R$  è libera di ruotare attorno al suo vertice fisso  $O$  che è l'origine di un riferimento cartesiano ortogonale  $Oxy$ . Al punto  $A$  sul bordo della lamina diametralmente opposto ad  $O$  è agganciato l'estremo di un'asta omogenea  $AB$  di massa  $m$  e lunghezza  $2R$ , che può ruotare liberamente attorno a  $A$ .

Su tutto il sistema agisce la forza peso e sul punto  $A$  agisce una forza elastica sempre verticale di coefficiente  $k > 0$  e polo sull'asse  $x$ . Supposti i vincoli lisci, si chiede di:

1. trovare le posizioni di equilibrio ordinarie del sistema;
2. discuterne la stabilità;
3. determinare l'energia cinetica del sistema.
4. scrivere la lagrangiana approssimata attorno a una posizione di equilibrio stabile.



2) In una lamina rettangolare omogenea di lati  $a < b$  è praticato un foro circolare nel centro, di raggio  $a/2$ . Sapendo che la massa della parte rimanente vale  $m$ , se ne calcoli la matrice d'inerzia rispetto a un sistema di riferimento baricentrale opportuno.

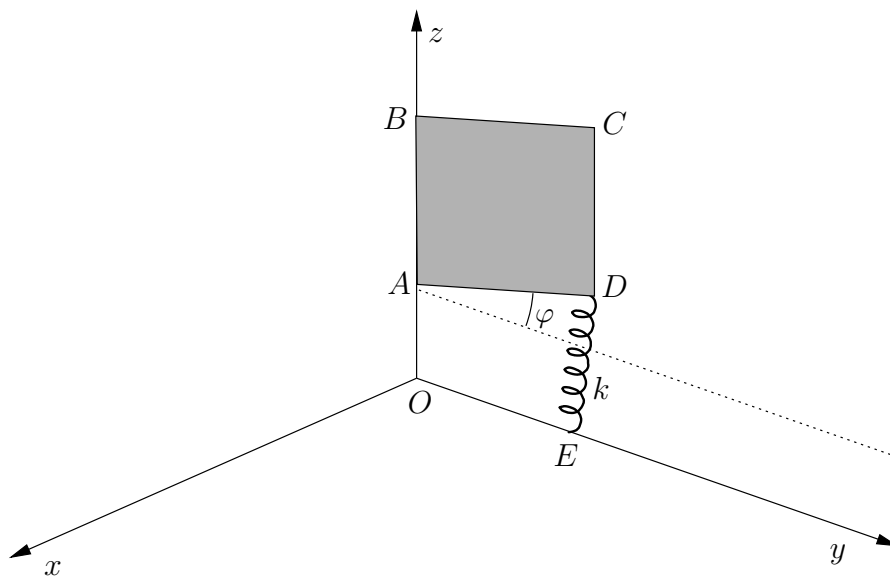
**Prova scritta di Meccanica Analitica**  
**Appello del 27 settembre 2016**

1) Una lamina quadrata omogenea  $ABCD$  di massa  $m$  e lato  $\ell$  è libera di ruotare attorno al lato  $AB$ , che scorre sull'asse verticale di un sistema di riferimento cartesiano ortogonale  $Oxyz$ .

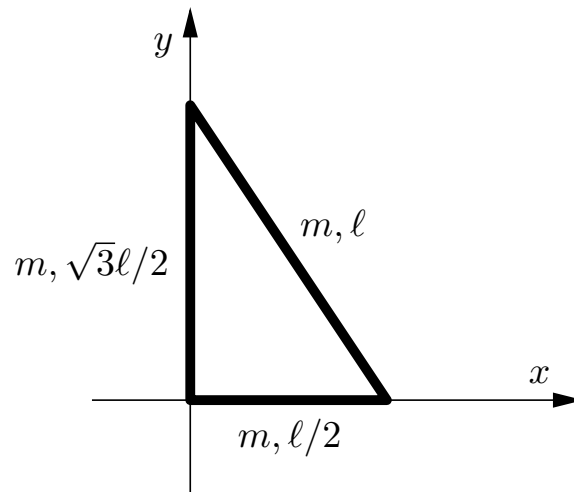
Su tutto il sistema agisce la forza peso e sul punto  $D$  agisce una forza elastica di coefficiente  $k > 0$  e polo il punto  $E(0, \ell, 0)$ .

Si chiede di:

- A) trovare le posizioni di equilibrio del sistema e discuterne la stabilità;
- B) determinare le equazioni differenziali del moto;
- C) scrivere le equazioni del moto linearizzate attorno a una posizione di equilibrio stabile.



2) Si calcoli la matrice d'inerzia della figura composta da tre aste omogenee, tutte di massa  $m$ , mostrata in figura rispetto al sistema di riferimento indicato (l'asse  $z$  è ortogonale al foglio).



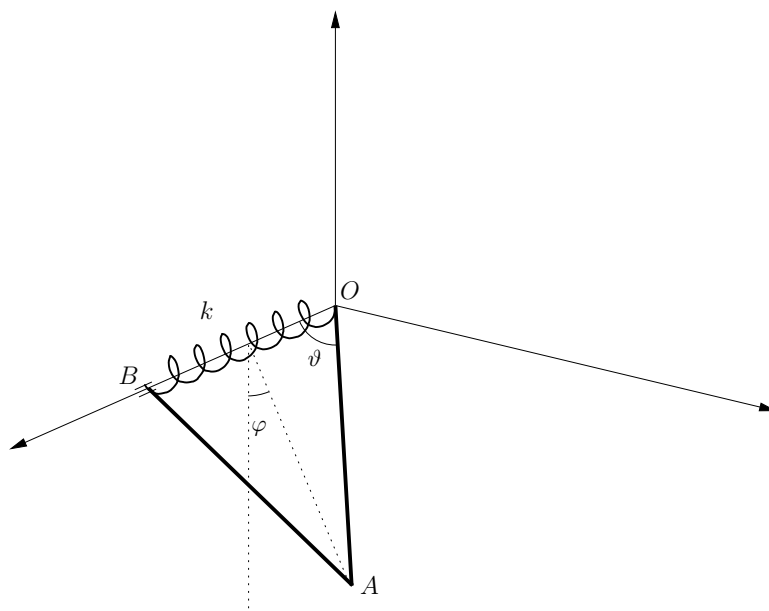
**Prova scritta di Meccanica Analitica**  
**Appello del 2 settembre 2016**

1) Un'asta omogenea  $OA$  di massa  $m$  e lunghezza  $2\ell$  è libera di ruotare attorno all'estremo  $O$ , fisso in un sistema di riferimento cartesiano  $Oxyz$ . Una seconda asta  $AB$ , identica alla prima, ha l'estremo  $A$  vincolato a quello della prima asta e l'estremo  $B$  che può scorrere sulla parte positiva dell'asse  $x$ .

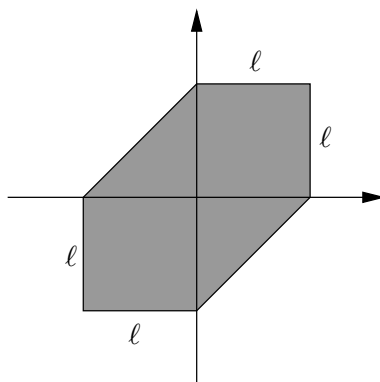
Su tutto il sistema agisce la forza peso e sul punto  $B$  agisce una forza elastica di coefficiente  $k > 0$  e polo il punto  $O$ .

Si chiede di:

- A) trovare le posizioni di equilibrio ordinarie del sistema;
- B) discuterne la stabilità delle posizioni di equilibrio ordinarie;
- C) trovare le eventuali posizioni di equilibrio di confine;
- D) determinare l'energia cinetica del sistema.



2) Si calcoli la matrice d'inerzia della lamina omogenea di massa  $m$  mostrata in figura rispetto al sistema di riferimento indicato (l'asse  $z$  è ortogonale al foglio).



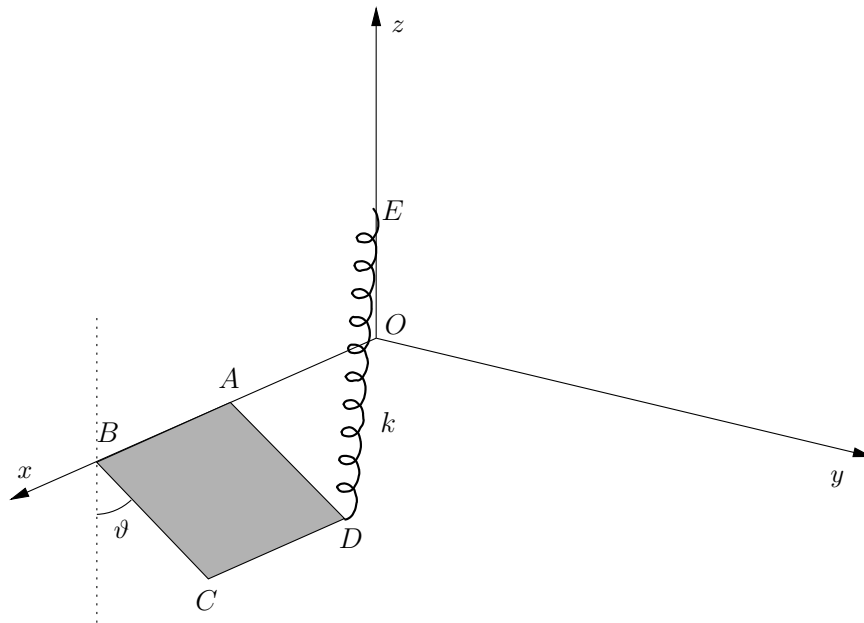


**Prova scritta di Meccanica Analitica**  
**Appello del 15 luglio 2016**

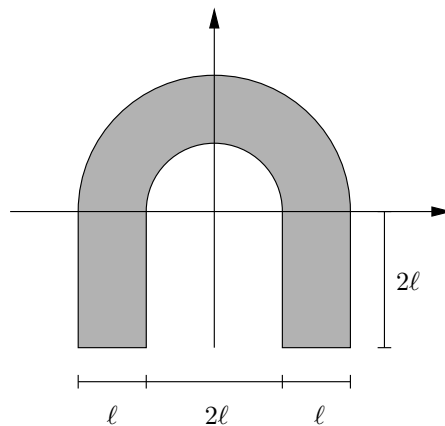
1) Una lamina quadrata omogenea  $ABCD$  di massa  $m$  e lato  $\ell$  si muove in modo che il lato  $AB$  scorra sull'asse  $x$  di un sistema di riferimento  $Oxyz$ . Sull'estremo  $D$  della lamina agisce una forza elastica di coefficiente  $k > 0$  e polo il punto  $E$  di coordinate  $(0, 0, \ell)$ .

Il sistema è soggetto alla forza peso e tutti i vincoli sono lisci. Si chiede di:

1. trovare le posizioni di equilibrio del sistema;
2. discuterne la stabilità;
3. determinare la lagrangiana del sistema;
4. trovare le equazioni differenziali del moto linearizzate attorno a una posizione di equilibrio stabile.



2) Si trovi la posizione del baricentro della lamina omogenea indicata in figura, formata da due rettangoli di lati  $2\ell, \ell$  e una corona semicircolare di raggi  $2\ell, \ell$ , nel sistema di riferimento indicato.



3) Si trovi la matrice d'inerzia della lamina dell'esercizio 2) nel sistema di riferimento indicato.

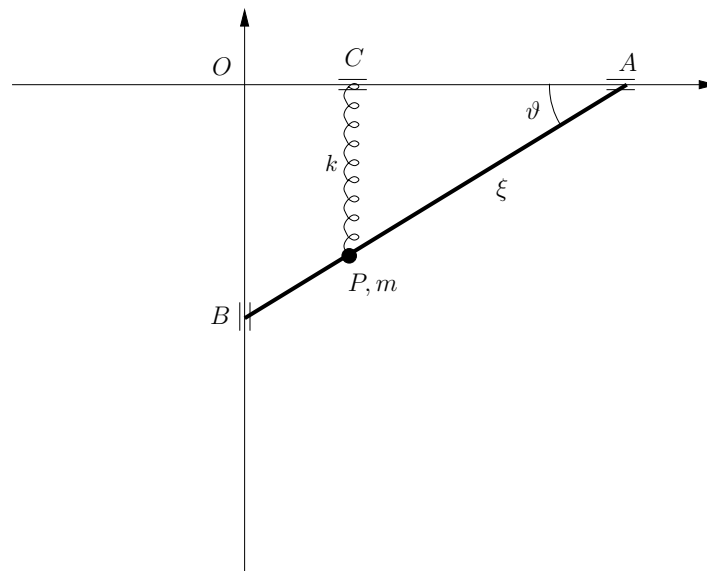
**Prova scritta di Meccanica Analitica**  
**Appello del 24 giugno 2016**

1) Un'asta omogenea  $AB$  di massa  $m$  e lunghezza  $2\ell$  si muove in modo che l'estremo  $A$  scorra sull'asse orizzontale e l'estremo  $B$  sull'asse verticale di un sistema di riferimento piano verticale  $Oxy$ . Sull'asta  $AB$  scorre un punto materiale  $P$  di massa  $m$ .

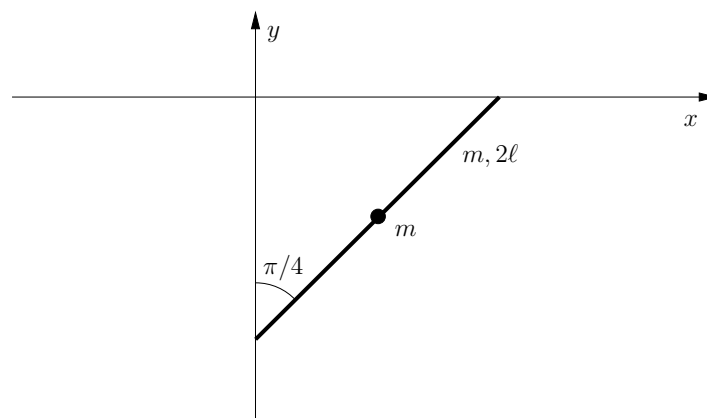
Sul punto  $P$  agisce una forza elastica sempre verticale di coefficiente  $k > 0$  e polo sull'asse delle ascisse.

Il sistema è soggetto alla forza peso e tutti i vincoli sono lisci. Si chiede di:

1. trovare le posizioni di equilibrio del sistema e discuterne la stabilità;
2. trovare le posizioni di equilibrio di confine;
3. determinare la lagrangiana del sistema;
4. trovare le pulsazioni delle piccole oscillazioni attorno a una posizione di equilibrio stabile.



2) Si calcoli la matrice d'inerzia del corpo rigido formato da un'asta omogenea di massa  $m$  e lunghezza  $2\ell$  e un punto materiale di massa  $m$  nel suo baricentro, rispetto al sistema di riferimento indicato in figura.



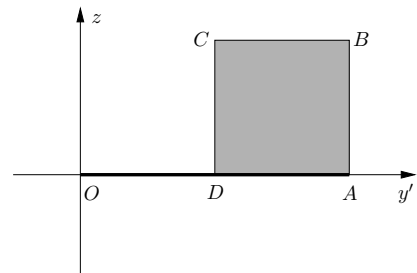
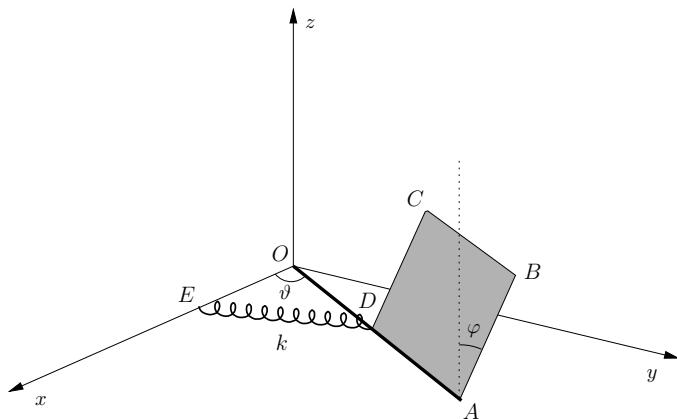
**Prova scritta di Meccanica Analitica**  
**Appello del 10 giugno 2016**

1) Un corpo rigido è formato da un'asta omogenea  $OA$  di massa  $m$  e lunghezza  $2\ell$  a cui è saldata una lamina quadrata  $ABCD$  di massa  $m$  e lato  $\ell$ , come si vede in figura. Il corpo si muove in modo che l'asta  $OA$  stia nel piano orizzontale  $xy$  di un sistema di riferimento  $Oxyz$  e il punto  $O$  sia fisso nell'origine. La lamina quadrata si muove in modo da ruotare attorno all'asta  $OA$ .

Sull'estremo  $D$  della lamina agisce una forza elastica di coefficiente  $k > 0$  e polo il punto  $E$  di coordinate  $(\ell, 0, 0)$ .

Il sistema è soggetto alla forza peso e tutti i vincoli sono lisci. Si chiede di:

1. trovare le posizioni di equilibrio del sistema e discuterne la stabilità;
2. trovare la matrice d'inerzia del corpo rigido nel sistema indicato in figura;
3. determinare l'energia cinetica del sistema;
4. trovare le pulsazioni delle piccole oscillazioni attorno a una posizione di equilibrio stabile;
5. scrivere la **quantità di moto** del sistema in funzione dei parametri lagrangiani.



2) Determinare per quali valori di  $k \neq 0$  la trasformazione

$$\begin{cases} Q(q, p) = q^2 e^{-\frac{p}{kq}} \\ P(q, p) = e^{\frac{p}{kq}} \end{cases}$$

è canonica e trovarne una funzione generatrice del tipo  $F(q, P)$ .

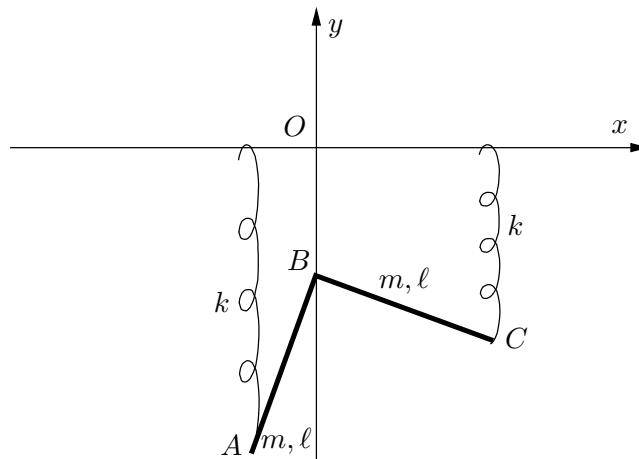
**Prova scritta di Meccanica Analitica**  
**Appello del 12 febbraio 2016**

1) Un corpo rigido è formato da due aste omogenee  $AB$  e  $BC$  di massa  $m$  e lunghezza  $\ell$  saldate ad angolo retto nell'estremo comune  $B$ . Tale corpo è libero di ruotare attorno al punto  $B$ , che si muove sull'asse verticale di un sistema di riferimento piano  $Oxy$ .

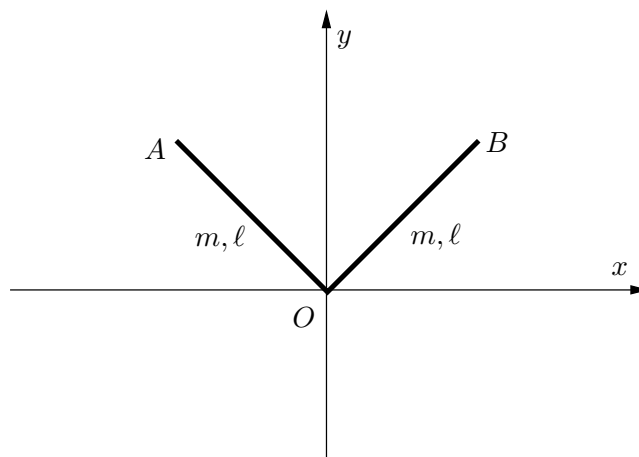
Su tutto il sistema agisce la forza peso e sui punti  $A$  e  $C$  agiscono due forze elastiche sempre verticali di coefficiente  $k > 0$  e poli sull'asse delle  $x$ .

Si chiede di:

- A) trovare le posizioni di equilibrio del sistema;
- B) discuterne la stabilità delle posizioni di equilibrio;
- C) determinare le equazioni differenziali del moto;
- D) scrivere le equazioni del moto linearizzate attorno a una posizione di equilibrio stabile.

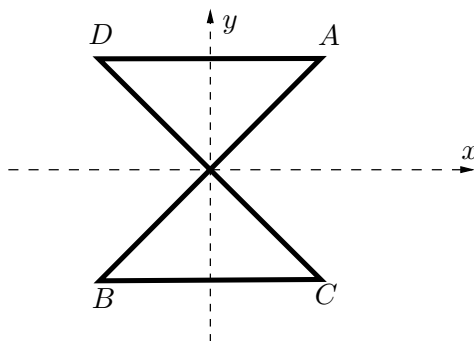


2) Si calcoli la matrice d'inerzia di un corpo rigido formato da due aste omogenee  $AO$  e  $OB$  di massa  $m$  e lunghezza  $\ell$  saldate ad angolo retto nel punto  $O$ , disposte a  $45^\circ$  rispetto al sistema di riferimento indicato in figura (l'asse  $z$  è ortogonale al foglio).



**Prova scritta di Meccanica Analitica**  
**Appello del 26 gennaio 2016**

1) Un corpo rigido è formato da due aste  $AD$  e  $BC$  di massa  $m$  e lunghezza  $\ell$  e due aste  $AB$  e  $CD$  di massa  $m$  e lunghezza  $\ell\sqrt{2}$ , disposte in un poligono intrecciato come in figura. Si calcoli la matrice d'inerzia del corpo rigido rispetto al sistema di riferimento indicato (l'asse  $z$  è ortogonale al foglio).

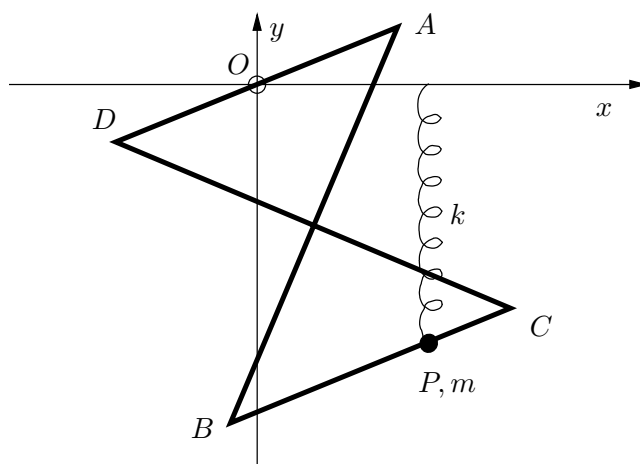


2) Il corpo rigido dell'esercizio precedente è vincolato a mantenere il punto medio dell'asta  $AD$  nell'origine di un sistema di riferimento piano  $Oxy$  ed è libero di ruotare attorno ad esso. Sull'asta  $BC$  scorre senza attrito un punto materiale  $P$  di massa  $m$ .

Il sistema giace in un piano **orizzontale** e sul punto  $P$  agisce una forza elastica di coefficiente  $k > 0$  e polo sull'asse  $x$ , che si mantiene sempre parallela all'asse  $y$ .

Si chiede di:

- A) trovare le posizioni di equilibrio ordinarie del sistema;
- B) trovare le posizioni di confine;
- C) discutere la stabilità delle posizioni di equilibrio ordinarie;
- D) determinare la lagrangiana del sistema.



[Nota: non c'è bisogno di dirvi che "piano orizzontale" significa assenza di forza peso]

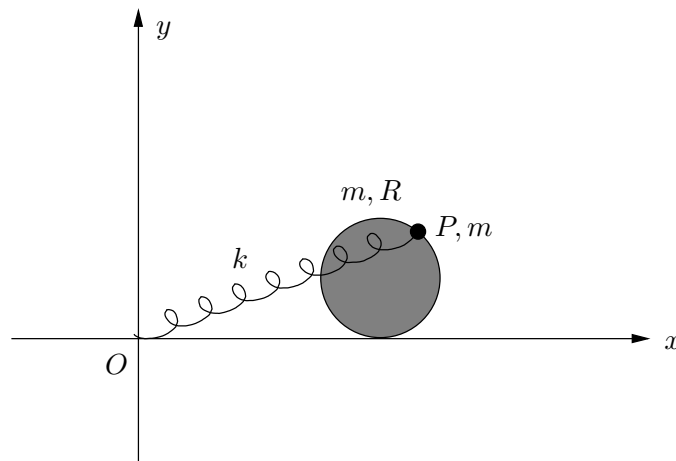
**Prova scritta di Meccanica Analitica**  
**Appello del 29 settembre 2015**

1) Un disco omogeneo di massa  $m$  e raggio  $R$  rotola senza strisciare sull'asse orizzontale di un sistema di riferimento piano  $Oxy$ . Sul bordo del disco scorre senza attrito un punto materiale  $P$  di massa  $m$ .

Su tutto il sistema agisce la forza peso e sul punto  $P$  agisce una forza elastica di coefficiente  $k > 0$  e polo il punto  $O$ .

Si chiede di:

1. trovare le posizioni di equilibrio del sistema;
2. discuterne la stabilità delle posizioni di equilibrio;
3. determinare le equazioni differenziali del moto;
4. scrivere le equazioni del moto linearizzate attorno a una posizione di equilibrio stabile.



2) Data la trasformazione

$$\begin{cases} Q(q, p) = \frac{k}{p} e^{2q} \\ P(q, p) = p^2 e^{-2q} \end{cases}$$

determinare per quali  $k > 0$  è canonica e trovarne una funzione generatrice del tipo  $F(q, P)$ .

**Prova scritta di Meccanica Analitica**  
**Appello dell'11 settembre 2015**

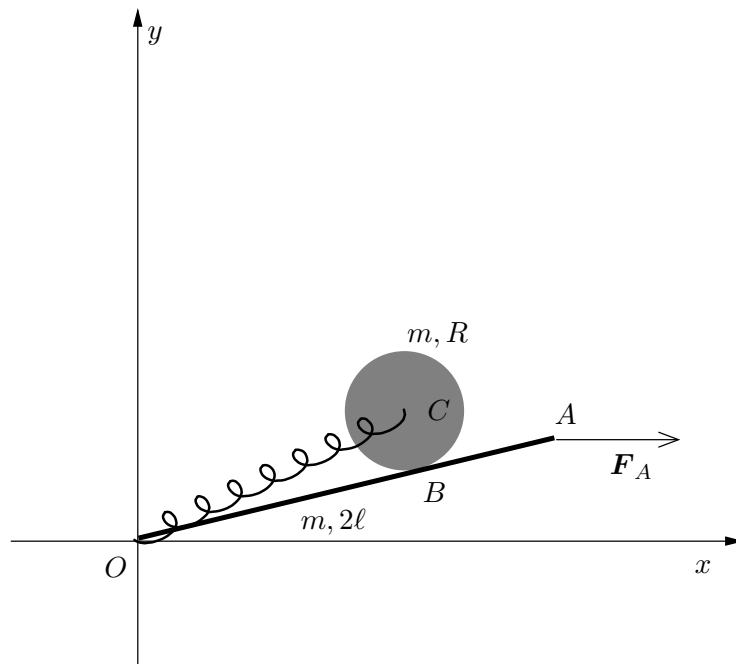
1) Un'asta omogenea  $OA$  di massa  $m$  e lunghezza  $2\ell$  è libera di ruotare attorno all'origine di un sistema di riferimento piano  $Oxy$ . Un disco omogeneo di massa  $m$  e raggio  $R$  rotola senza strisciare sull'asta, in modo che il punto di contatto  $B$  non esca dall'asta.

Si denoti con  $\xi$  la distanza del punto  $B$  dall'origine e con  $\theta$  l'angolo tra la parte positiva dell'asse delle ascisse e l'asta.

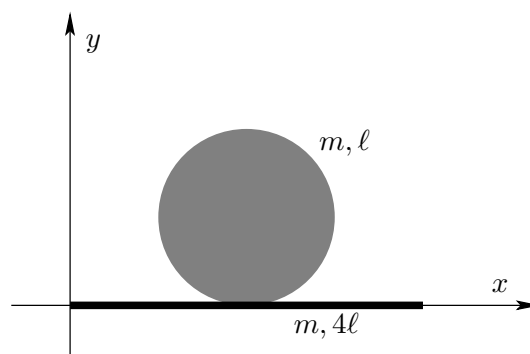
Su tutto il sistema agisce la forza peso e sul centro  $C$  del disco agisce una forza elastica di coefficiente  $k > 0$  e polo il punto  $O$ . Inoltre, sull'estremo  $A$  dell'asta agisce una forza  $\mathbf{F}_A$  di potenziale  $U_A = mgR \cos \theta$ .

Supposti i vincoli lisci, si chiede di:

1. trovare le posizioni di equilibrio ordinarie del sistema e discuterne la stabilità in funzione di  $\lambda = \frac{k\ell}{mg}$ ;
2. trovare le eventuali posizioni di equilibrio di confine;
3. determinare l'energia cinetica del sistema;
4. nel caso  $\lambda = 1$  trovare le pulsazioni delle piccole oscillazioni attorno alla posizione di equilibrio stabile.



2) Si calcoli la matrice d'inerzia del corpo rigido piano in figura, formato da un'asta omogenea di massa  $m$  e lunghezza  $4\ell$  e un disco di massa  $m$  e raggio  $\ell$ , in cui un punto del bordo del disco è saldato al baricentro dell'asta, rispetto al sistema di riferimento indicato.

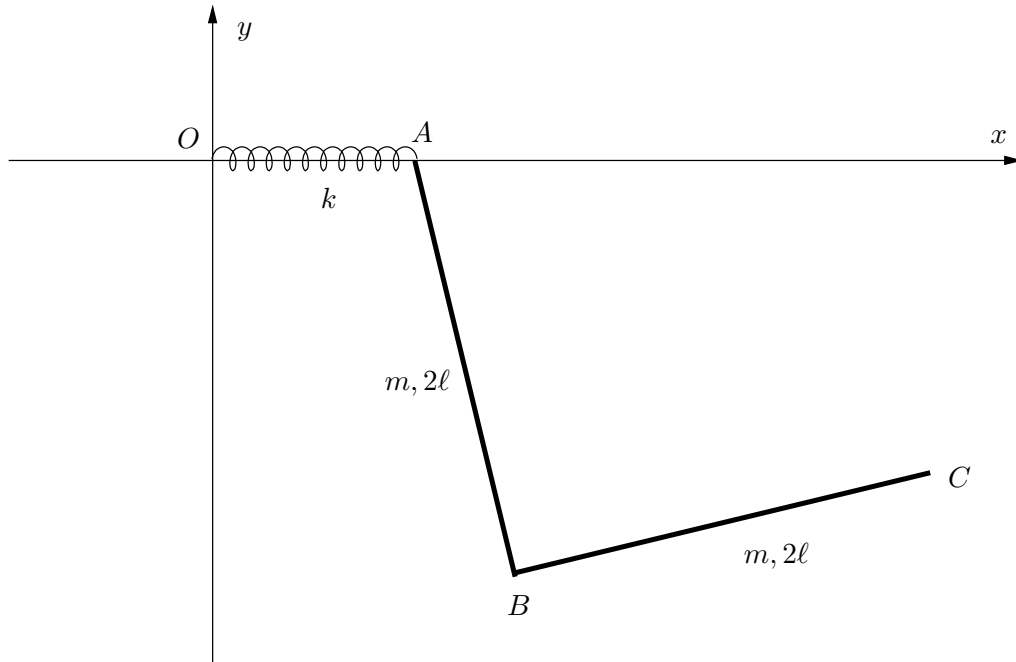


**Prova scritta di Meccanica Analitica**  
**Appello del 10 luglio 2015**

1) Un corpo rigido è formato da due aste omogenee  $AB$  e  $BC$ , entrambe di massa  $m$  e lunghezza  $2\ell$ , saldate ad angolo retto nell'estremo  $B$ . Tale corpo si muove in un piano ruotando attorno al suo estremo  $A$ , che può scorrere sull'asse orizzontale di un riferimento cartesiano ortogonale  $Oxy$ .

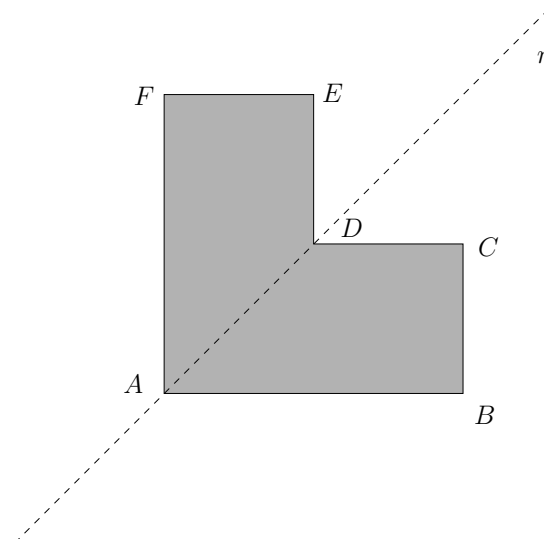
Su tutto il sistema agisce la forza peso e su  $A$  agisce una forza elastica di coefficiente  $k > 0$  e polo l'origine  $O$ . Supposti i vincoli lisci, si chiede di:

1. trovare le posizioni di equilibrio del sistema e discuterne la stabilità;
2. determinare l'energia cinetica del sistema;
3. scrivere le pulsazioni delle piccole oscillazioni attorno a una posizione di equilibrio stabile.



2) Si calcoli la matrice d'inerzia della lamina piana omogenea di massa  $m$  rappresentata in figura rispetto a un opportuno sistema di riferimento centrato in  $A$ , sapendo che  $AB = AF = 2\ell$  e  $BC = CD = DE = EF = \ell$ .

Si calcoli poi il momento d'inerzia della lamina rispetto all'asse  $r$  tratteggiato in figura.





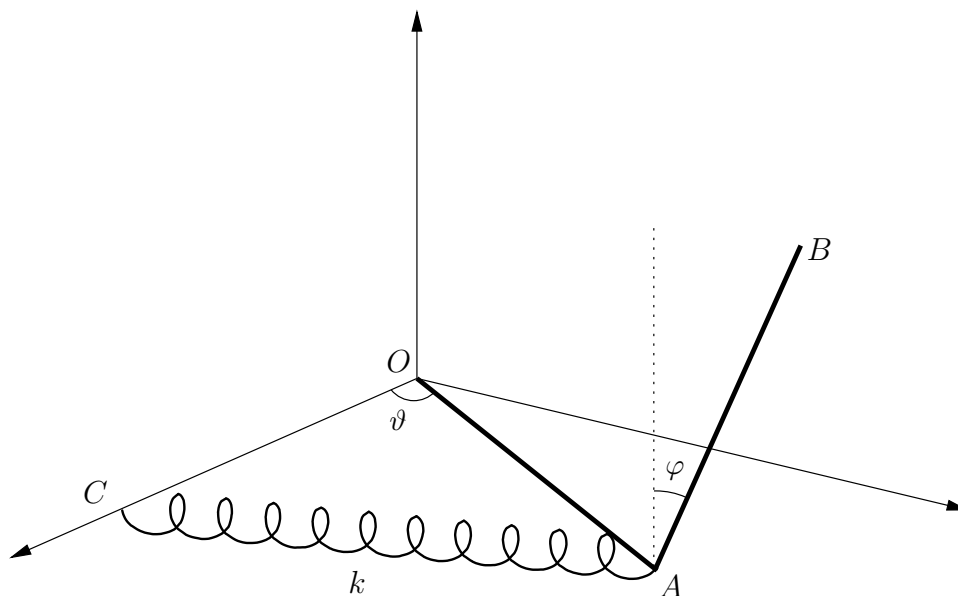
**Prova scritta di Meccanica Analitica**  
**Appello del 26 giugno 2015**

1) Un corpo rigido è formato da due aste omogenee  $OA$  e  $AB$ , entrambe di massa  $m$  e lunghezza  $2\ell$ , saldate ad angolo retto nell'estremo  $A$ . Il corpo si muove in modo che l'asta  $OA$  stia nel piano orizzontale  $xy$  di un sistema di riferimento  $Oxyz$  e il punto  $O$  sia fisso nell'origine.

Sull'estremo  $A$  dell'asta agisce una forza elastica di coefficiente  $k > 0$  e polo il punto  $C$  di coordinate  $(2\ell, 0, 0)$ .

Il sistema è soggetto alla forza peso e tutti i vincoli sono lisci. Si chiede di:

1. trovare le posizioni di equilibrio del sistema e discuterne la stabilità;
2. determinare l'energia cinetica del sistema;
3. trovare le equazioni del moto linearizzate attorno a una posizione di equilibrio stabile.



2) Determinare per quali valori di  $a, b \in \mathbb{R}$  la trasformazione

$$\begin{cases} Q(q, p) = ae^q + bp^2e^{-q} \\ P(q, p) = \arctan \frac{p}{e^q} \end{cases}$$

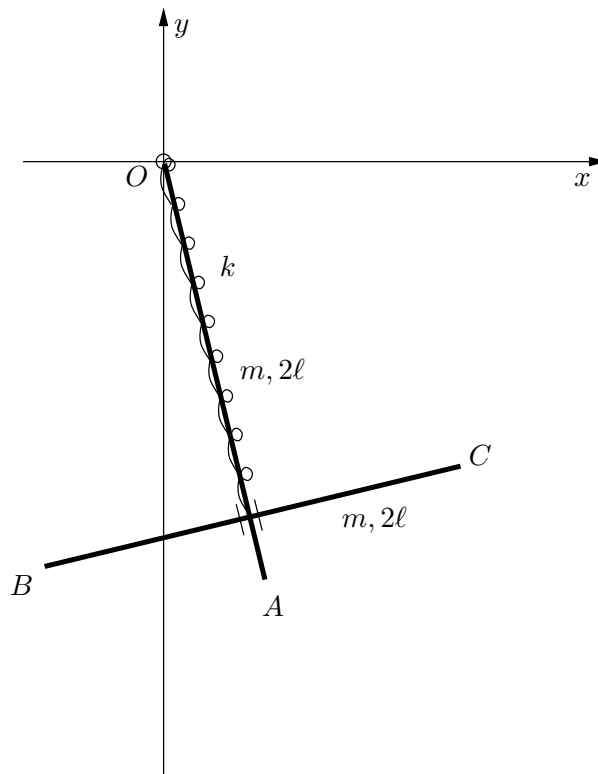
è canonica e trovarne una funzione generatrice del tipo  $F(q, P)$ .

**Prova scritta di Meccanica Analitica**  
**Appello del 5 giugno 2015**

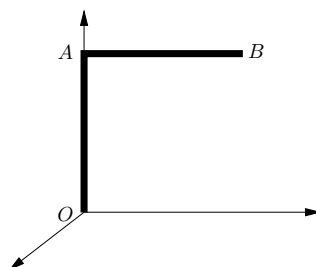
1) In un sistema piano, un'asta omogenea  $OA$  di massa  $m$  e lunghezza  $2\ell$  è libera di ruotare attorno al suo estremo fisso  $O$ , centrato in un riferimento cartesiano ortogonale  $Oxy$ . Sull'asta  $OA$  scorre il centro  $G$  di una seconda asta  $BC$  uguale alla prima e che resta sempre ortogonale a  $OA$ , come in figura.

Su tutto il sistema agisce la forza peso e su  $G$  agisce una forza elastica di coefficiente  $k > 0$  e polo l'origine. Supposti i vincoli lisci, si chiede di:

1. trovare le posizioni di equilibrio ordinarie del sistema e discuterne la stabilità in funzione di  $\lambda = mg/k\ell$ ;
2. trovare le eventuali posizioni di equilibrio di confine;
3. determinare l'energia cinetica del sistema;
4. nel caso  $\lambda = 1$ , trovare le pulsazioni delle piccole oscillazioni attorno alla posizione di equilibrio stabile.



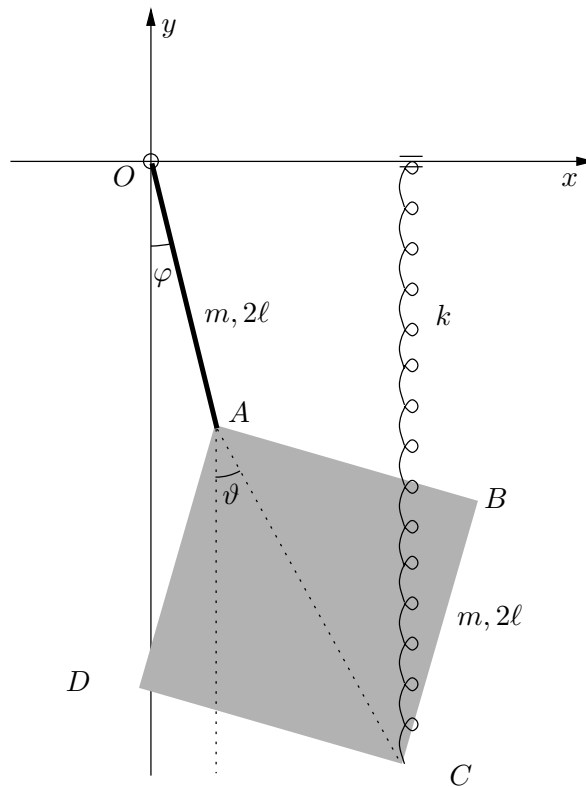
2) Si calcoli la matrice d'inerzia del corpo rigido formato da due aste omogenee di massa  $m$  e lunghezza  $\ell$  saldate ad angolo retto in un loro estremo, rispetto al sistema di riferimento indicato in figura.



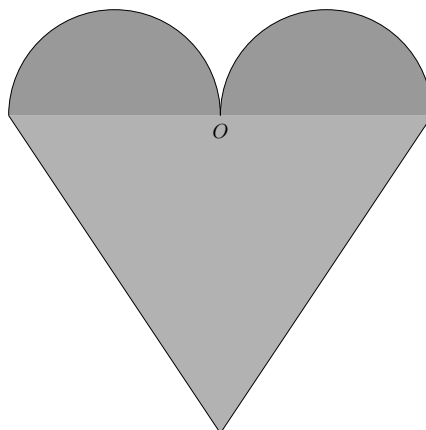
**Prova scritta di Meccanica Analitica**  
**Appello del 13 febbraio 2015**

1) Un'asta omogenea  $OA$  di massa  $m$  e lunghezza  $2\ell$  è libera di ruotare attorno al suo estremo fisso  $O$ , centrato in un riferimento cartesiano ortogonale  $Oxy$ . All'estremo  $A$  dell'asta è agganciato il vertice di una lamina quadrata omogenea di massa  $m$  e lato  $2\ell$ , che può ruotare liberamente attorno a  $A$ . Su tutto il sistema agisce la forza peso e sul vertice  $C$  della lamina agisce una forza elastica sempre verticale di coefficiente  $k > 0$  e polo sull'asse  $x$ . Supposti i vincoli lisci, si chiede di:

1. trovare le posizioni di equilibrio ordinarie del sistema;
2. discuterne la stabilità;
3. determinare l'energia cinetica del sistema;
4. nel caso  $mg = 10k\ell$ , scrivere la lagrangiana approssimata attorno ad una posizione di equilibrio stabile.



2) Una lamina piana è formata da due semicerchi omogenei di raggio  $R$  e massa  $m$  tangenti in  $O$  e da un triangolo isoscele omogeneo di altezza  $3R$  e massa  $2m$  disposto come in figura. Si calcoli la matrice d'inerzia della lamina rispetto a un opportuno sistema di riferimento centrato in  $O$ .

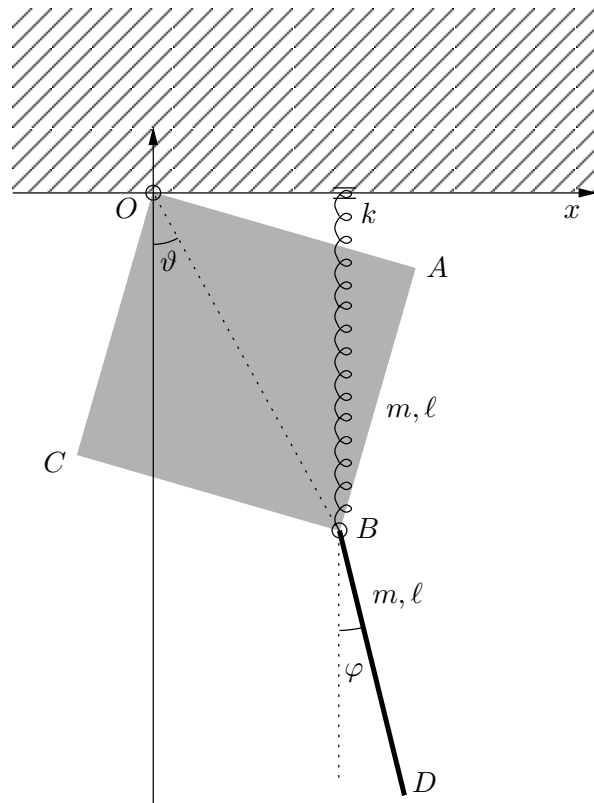


**Prova scritta di Meccanica Analitica**  
**Appello del 23 gennaio 2015**

1) Una lamina quadrata omogenea di massa  $m$  e lato  $\ell$  è libera di ruotare attorno al suo vertice fisso  $O$ , in modo da non occupare mai il semipiano  $y > 0$  di un riferimento cartesiano ortogonale  $Oxy$ . Al vertice  $B$  della lamina opposto ad  $O$  è agganciato l'estremo di un'asta omogenea  $BD$  di massa  $m$  e lunghezza  $\ell$ , che può ruotare liberamente attorno a  $B$ .

Su tutto il sistema agisce la forza peso e sul vertice  $B$  agisce una forza elastica sempre verticale di coefficiente  $k > 0$  e polo sull'asse  $x$ . Supposti i vincoli lisci, si chiede di:

1. trovare le posizioni di equilibrio ordinarie del sistema;
2. discuterne la stabilità;
3. trovare le eventuali posizioni di confine;
4. determinare l'energia cinetica del sistema.



2) In una lamina quadrata omogenea di lato  $\ell$  è praticato un foro quadrato concentrico, di lato  $\ell/2$ , ruotato di  $45^\circ$  rispetto alla lamina. Sapendo che la massa della parte rimanente vale  $m$ , se ne calcoli la matrice d'inerzia rispetto al sistema di riferimento indicato.

