METODI E MODELLI MATEMATICI PER LE APPLICAZIONI

PROVA SCRITTA DEL 27 MARZO 2007

1) Studiare la stabilità delle soluzioni di equilibrio dell'equazione

$$\dot{x} = x(\mu - x^2)\log(x - 1 + |\mu|)$$

al variare di μ e disegnare il diagramma di biforcazione.

2) Studiare la stabilità delle soluzioni di equilibrio del sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = (y^2 - 1)x + y - z \\ \dot{y} = -x - y^3 \\ \dot{z} = x - z^3 \end{cases}$$

[Sugg.: si tenga presente che la funzione $f(x, y) = -x^2 - y^4 + x^2y^2$ è definita negativa in un intorno di $(0, 0)$.]

3) Il prezzo $P(t)$ di un bene segue la legge differenziale

$$\ddot{P}(t) + 2k\dot{P}(t) + k^2P(t) = k\,.$$

Dopo aver trasformato l'equazione in un sistema del primo ordine, si studi la stabilità delle soluzioni di equilibrio al variare di $k \in \mathbb{R}$.

Si trovi poi la soluzione esplicita dell'equazione nel caso $P(0) = 0$, $\dot{P}(0) = 1$.

METODI E MODELLI MATEMATICI PER LE APPLICAZIONI

PROVA SCRITTA DEL 12 APRILE 2007

1) Studiare la stabilità delle soluzioni di equilibrio dell'equazione

$$\dot{x} = (\mu^2 - x)(x - 1)\log(|x - \mu + 1|)$$

al variare di $\mu \in \mathbb{R}$ e disegnare il diagramma di biforcazione.

2) Studiare la stabilità delle soluzioni di equilibrio dell'equazione differenziale

$$\ddot{x}(t) - 2\left(\frac{\dot{x}(t)^3}{3} - \dot{x}\right) + x = 0\,.$$

3) In un modello economico, il prodotto interno segue la legge

$$k\ddot{Y}(t) + \left(\frac{1}{2} - k\right)\dot{Y}(t) + \frac{1}{2}Y(t) = 1\,.$$

Dopo aver trasformato l'equazione in un sistema del primo ordine, si studi la stabilità delle soluzioni di equilibrio al variare di $k \in \mathbb{R}$.

Si trovino poi tutte le soluzioni nel caso $k = \frac{1}{2}$, imponendo $Y(0) = Y_0$ e $\dot{Y}(0) = Y_1$.

METODI E MODELLI MATEMATICI
PER LE APPLICAZIONI

19/6/07

1) Studiare la stabilità delle soluzioni di equilibrio dell'equazione

$$\dot{x} = x\,(x^3-\mu)(x+\mu)$$

al variare di μ e tracciare il diagramma di biforcazione.

2) Studiare la stabilità della soluzione di equilibrio del sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = -y+z \\ \dot{y} = x-y^3 \\ \dot{z} = -x-z^3 \end{cases}$$

3) Se il prezzo $P(t)$ di un bene segue la legge differenziale

$$a^2\,t = \frac{(P'(t))^4}{(P''(t))^2}$$

Si trovi l'andamento del prezzo per $t \geq 0$ con le condizioni $P(0)=2$ e $\lim_{t\to 1^-} P'(t) = +\infty$.

METODI E MODELLI MATEMATICI
PER LE APPLICAZIONI

PROVA SCRITTA DEL 25 SETTEMBRE 2007

1) Studiare la stabilità delle soluzioni di equilibrio dell'equazione

$$\dot{x} = (\mu - x + 1)(\mu^3 - \mu - x)$$

al variare di $\mu \in \mathbb{R}$ e disegnare il diagramma di biforcazione.

2) Studiare la stabilità della soluzione di equilibrio del sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + z - x^3 \\ \dot{y} = x - y^3 \\ \dot{z} = -x - z^3 \end{cases}$$

3) In un modello economico, il prodotto interno Y segue la legge

$$t\dot{Y}(t) + t^2\ddot{Y}(t) - kY(t) = 0\,, \quad k \geq 0\,.$$

Si determini l'espressione di $Y(t)$ al variare di k (suggerimento: si cerchino soluzioni del tipo $Y(t) = t^\alpha$).

Cosa succede se $k < 0$?

METODI E MODELLI MATEMATICI
PER LE APPLICAZIONI

PROVA SCRITTA DEL 17 MARZO 2009

1) Studiare la stabilità delle soluzioni di equilibrio dell'equazione

$$\dot{x} = \left(x - 4\mu^2\right)\left(x - \log(|\mu| + 1)\right)\left(x - |\mu| + 8\right)$$

al variare del parametro $\mu \in \mathbb{R}$.

2) Studiare la stabilità della soluzione di equilibrio $(0, 0, 0)$ del sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = -\dfrac{x^2}{2}(x + z^2) \\ \dot{y} = -3\sin y + 2z \\ \dot{z} = -\sin y + (x^3 - 1)\dfrac{z}{2} \end{cases}$$

3) In un sistema di tipo preda-predatore, dove denotiamo con N la biomassa delle prede e con P quella dei predatori, il tasso di crescita delle prede segue la legge $2 - 2N - P$, mentre quello dei predatori segue la legge $-1 + 4N - P$.

Si chiede di studiare la stabilità delle posizioni di equilibrio biologicamente accettabili.

Si chiede poi di risolvere esplicitamente il sistema differenziale ottenuto linearizzando il sistema di partenza attorno alla posizione di equilibrio stabile, supponendo che le biomasse abbiano all'istante iniziale lo stesso valore $k > 0$.

METODI E MODELLI MATEMATICI PER LE APPLICAZIONI

PROVA SCRITTA DELL'1 APRILE 2009

1) Studiare la stabilità delle soluzioni di equilibrio dell'equazione

$$\dot{x} = \left(x + 2\mu - \mu^2\right)\left(x^2 - 3(\mu + 1)x + 9\mu\right)$$

al variare del parametro $\mu \in \mathbb{R}$, e disegnare il relativo diagramma di biforcazione.

2) Mediante il metodo di linearizzazione e, dove questo fallisce, mediante il metodo della funzione di Ljapunov, si studi la stabilità della soluzione di equilibrio $(0, 0, 0)$ del sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = -x^4(x + z^2) + k \sin x \\ \dot{y} = -3y + 2z \\ \dot{z} = -y + (x^5 - 1)z \end{cases}$$

al variare di $k \in \mathbb{R}$.

3) In un lago alpino convivono due specie di pesci: i cavedani, denotati con C, e le trote marmorate, denotate con T, che stanno in *competizione* tra loro. Il tasso di crescita dei cavedani segue la legge $1 - C - 3T$, mentre quello delle trote segue la legge $1 - 4C - 2T$.

Si chiede di studiare la stabilità delle posizioni di equilibrio del sistema biologico formato dalle due specie.

Si chiede poi di risolvere esplicitamente il sistema differenziale ottenuto linearizzando il sistema di partenza attorno all'unica posizione di equilibrio stabile che prevede l'estinzione delle trote, supponendo che inizialmente i cavedani abbiano biomassa 1 e le trote biomassa 2.

METODI E MODELLI MATEMATICI
PER LE APPLICAZIONI

PROVA SCRITTA DEL 14 LUGLIO 2009

1) Studiare la stabilità delle soluzioni di equilibrio dell'equazione

$$\dot{x} = (x^3 - \mu x)(x + |\mu| - 1)$$

al variare del parametro $\mu \in \mathbb{R}$, e disegnare il relativo diagramma di biforcazione.

2) Mediante il metodo di linearizzazione e, dove questo fallisce, mediante il metodo della funzione di Ljapunov, si studi la stabilità della soluzione di equilibrio $(0, 0, 0)$ del sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = -2x + 2z \\ \dot{y} = -y^2(y + z^2) + ky \\ \dot{z} = -\sin x + (y^3 - 1)z \end{cases}$$

al variare di $k \in \mathbb{R}$.

3) Un modello preda-predatore di Gomatam si presenta nella forma

$$\begin{cases} \dot{x} = x(3 - \log x - \log y) \\ \dot{y} = y(2 - 3\log x - \log y) \end{cases} \qquad x, y > 0\,.$$

Si trovi l'unica posizione di equilibrio del sistema.

Si trovi poi la traiettoria del sistema uscente dal punto $x = e^3$, $y = 1$ e si mostri che tale traiettoria tende alla posizione di equilibrio per $t \to +\infty$.

[Suggerimento: si usi il cambio di variabili $\xi = \log x$, $\eta = \log y$.]

METODI E MODELLI MATEMATICI
PER LE APPLICAZIONI

PROVA SCRITTA DEL 4 SETTEMBRE 2009

1) Studiare la stabilità delle soluzioni di equilibrio dell'equazione

$$\dot{x} = (\mu - \log(1 + |x|)(x^2 + \mu^2 - 1)x$$

al variare del parametro $\mu \in \mathbb{R}$ e disegnare il relativo diagramma di biforcazione.

Nota: è facoltativo lo studio della stabilità dei punti in cui il metodo di linearizzazione fallisce.

2) Si studi la stabilità della soluzione di equilibrio $(0, 0, 0)$ del sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = \sin y \cos y + x(z^5 - 1) \\ \dot{y} = -\dfrac{1}{2}x^5 - \sin y \\ \dot{z} = -z(1 + x^6 z^3)\,. \end{cases}$$

3) Un modello biologico di *competizione* tra due specie x e y è caratterizzato dal sistema differenziale

$$\begin{cases} \dot{x} = x(1 - 2x - 4y) \\ \dot{y} = y(1 - 3x - y)\,. \end{cases}$$

Si chiede di studiare la stabilità delle posizioni di equilibrio del sistema biologico formato dalle due specie.

Si chiede poi di risolvere esplicitamente il sistema differenziale ottenuto linearizzando il sistema di partenza attorno all'unica posizione di equilibrio stabile che prevede l'estinzione della specie x, con le condizioni iniziali $x(0) = 2$ e $y(0) = 1$.

METODI E MODELLI MATEMATICI PER LE APPLICAZIONI

PROVA SCRITTA DEL 22 SETTEMBRE 2009

1) Studiare la stabilità delle soluzioni di equilibrio dell'equazione

$$\dot{x} = (1 + |x| - \mu)(|x| - e^{\mu})x$$

al variare del parametro $\mu \in \mathbb{R}$ e disegnare il relativo diagramma di biforcazione.

Nota: è facoltativo lo studio della stabilità dei punti in cui il metodo di linearizzazione fallisce.

2) Si studi la stabilità della soluzione di equilibrio $(0, 0, 0)$ del sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = x(y^3 - x^2) \\ \dot{y} = z^3 - y^3 - x \sin x \\ \dot{z} = -z^2(z + y^3)\,. \end{cases}$$

3) Un modello economico sull'andamento del prezzo P di un bene in funzione del tempo è caratterizzato dall'equazione differenziale del secondo ordine

$$\ddot{P}(t) + a\dot{P}(t) + bP(t) = 0$$

dove $a, b \in \mathbb{R}$ e $a > 0$. Dopo aver trasformato l'equazione in un sistema del primo ordine, si chiede di studiare la stabilità delle posizioni di equilibrio al variare dei parametri a e b.

Supponendo poi che il tempo sia misurato in giorni e il prezzo in euro, si chiede poi, nel caso $a = 3$ e $b = 2$, di determinare il prezzo del bene dopo 3 giorni, sapendo che $P(0) = 20$€ e $\dot{P}(0) = 5$€/giorno.

UNIVERSITÀ CATTOLICA DEL S. CUORE

Sede di Brescia

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali

METODI E MODELLI MATEMATICI PER LE APPLICAZIONI

PROVA SCRITTA DEL 30 MARZO 2010

1) Studiare la stabilità delle soluzioni di equilibrio dell'equazione

$$\dot{x} = x(x^2 - \mu\,|\mu|^3)(x + \mu)$$

al variare di μ e tracciare il relativo diagramma di biforcazione.

2) Studiare la stabilità della soluzione di equilibrio del sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = -x^3 - y^2 \\ \dot{y} = x^3 y - y^3. \end{cases}$$

3) La velocità $u(t, x)$ in un modello di traffico segue l'equazione del primo ordine

$$\frac{\partial u}{\partial t} + te^x \frac{\partial u}{\partial x} = 1.$$

Trovare la velocità in ogni istante sapendo che $u(0, x) = \cos x$.

TEMPO: 2 ORE

UNIVERSITÀ CATTOLICA DEL S. CUORE

Sede di Brescia

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali

METODI E MODELLI MATEMATICI PER LE APPLICAZIONI

PROVA SCRITTA DEL 13 APRILE 2010

1) Studiare la stabilità delle soluzioni di equilibrio dell'equazione

$$\dot{x} = x(x - \sqrt{1-\mu^2})(x + \mu - 1)$$

al variare di μ e tracciare il relativo diagramma di biforcazione.

2) Studiare la stabilità della soluzione nulla del sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = -x^2 y - x^3(y^2+1) \\ \dot{y} = x^5 - y(x^2+1). \end{cases}$$

3) Il potere d'acquisto $u(t,x)$ di un continuo di soggetti, parametrizzati da x, in un modello economico segue l'equazione del primo ordine

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{t}{x}\frac{\partial u}{\partial x} = u.$$

Trovare il potere d'acquisto in ogni istante sapendo che $u(0,x) = 1/x$.

TEMPO: 2 ORE

UNIVERSITÀ CATTOLICA DEL S. CUORE

Sede di Brescia

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali

METODI E MODELLI MATEMATICI PER LE APPLICAZIONI

PROVA SCRITTA DEL 25 GIUGNO 2010

1) Studiare la stabilità delle soluzioni di equilibrio dell'equazione

$$\dot{x} = x(1 - x^2 - \mu^2)(2 - 2x^2 - \mu^2)$$

al variare di μ e tracciare il relativo diagramma di biforcazione.

2) Mostrare che esiste $\alpha < 0$ tale che la soluzione nulla del sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = \mu x + e^{\mu} y \\ \dot{y} = 2x + 2\mu y. \end{cases}$$

sia asintoticamente stabile per $\alpha < \mu < 0$.

3) In un modello di traffico la velocità $u(t, x)$ segue l'equazione

$$\frac{\partial u}{\partial t} + tx\frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

Trovare la velocità in ogni istante sapendo che $u(0, x) = x$.

TEMPO: 2 ORE

UNIVERSITÀ CATTOLICA DEL S. CUORE

Sede di Brescia

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali

METODI E MODELLI MATEMATICI PER LE APPLICAZIONI

PROVA SCRITTA DEL 20 LUGLIO 2010

1) Studiare la stabilità delle soluzioni di equilibrio dell'equazione

$$\dot{x} = x(x + \mu^2 - 1)(x - \mu^2 + 1)$$

al variare di μ e tracciare il relativo diagramma di biforcazione.

2) In un modello economico, gli scostamenti P_n, Q_n di due prezzi da un valore di riferimento seguono la legge ricorsiva

$$\begin{cases} P_{n+1} = -P_n + \mu Q_n^2 \\ Q_{n+1} = 2P_n + 3Q_n. \end{cases}$$

Trovare le posizioni di equilibrio di questo sistema e discutere, ove possibile, la loro stabilità mediante linearizzazione al variare di μ.

3) In un modello di traffico la velocità $u(t,x)$ segue l'equazione

$$(x+1)\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 1.$$

Trovare la velocità in ogni istante sapendo che $u(0,x) = 1 - x$.

TEMPO: 2 ORE

UNIVERSITÀ CATTOLICA DEL S. CUORE

Sede di Brescia

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali

Corso di laurea in Matematica

METODI E MODELLI MATEMATICI PER LE APPLICAZIONI

PROVA SCRITTA DEL 28 SETTEMBRE 2010

1) Studiare la stabilità delle soluzioni di equilibrio dell'equazione

$$\dot{x} = x(x + \mu^2 - 1)(x^2 + \mu^2 - 1)$$

al variare di μ e tracciare il relativo diagramma di biforcazione.

2) Studiare la stabilità della soluzione nulla del sistema lineare

$$\begin{cases} \dot{x} = (\mu + 3)x + (\mu^2 + 2\mu)y \\ \dot{y} = x + 2(\mu + 1)y \end{cases}$$

al variare di $\mu \in \mathbb{R}$.

3) Studiare la stabilità della soluzione di equilibrio del sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + z \\ \dot{y} = x - y^7 \\ \dot{z} = -x - z^5. \end{cases}$$

UNIVERSITÀ CATTOLICA DEL S. CUORE

Sede di Brescia

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali

Corso di laurea in Matematica

METODI E MODELLI MATEMATICI PER LE APPLICAZIONI

PROVA SCRITTA DEL 11 GENNAIO 2011

1) Studiare la stabilità delle soluzioni di equilibrio dell'equazione

$$\dot{x} = x(x - \operatorname{sen}\mu)(x^2 - \mu)$$

al variare di μ e tracciare il relativo diagramma di biforcazione.

2) Studiare la stabilità della soluzione nulla del sistema lineare

$$\begin{cases} \dot{x} = \mu x + (2-\mu)y \\ \dot{y} = x - (4+\mu)y \end{cases}$$

al variare di $\mu \in \mathbb{R}$.

3) Studiare la stabilità della soluzione di equilibrio del sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = x + \operatorname{sen} y \\ \dot{y} = 1 - \cos x - 2z \\ \dot{z} = x \end{cases}$$

avente $|y| < 1$.

METODI E MODELLI MATEMATICI PER LE APPLICAZIONI

PROVA SCRITTA DEL 25 MARZO 2011

1) Studiare la stabilità delle soluzioni di equilibrio dell'equazione

$$\dot{x} = x(\mu - \log|x|)(x^2 + (1-\mu)^2 - 2)$$

al variare del parametro $\mu \in \mathbb{R}$.

2) Studiare la stabilità delle soluzioni di equilibrio del sistema <u>lineare</u>

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + z \\ \dot{y} = -y + kz \\ \dot{z} = x + y - z \end{cases}$$

al variare di $k \in \mathbb{R}$.

3) In un sistema di tipo preda-predatore, dove denotiamo con N la biomassa delle prede e con P quella dei predatori, il tasso di crescita delle prede segue la legge $2-P$, mentre quello dei predatori segue la legge $-1+4N$.

Si chiede di studiare la stabilità delle posizioni di equilibrio biologicamente accettabili.

Si chiede poi di risolvere esplicitamente il sistema differenziale ottenuto linearizzando il sistema di partenza attorno alla posizione di equilibrio stabile, supponendo che le biomasse abbiano all'istante iniziale lo stesso valore $N(0) = P(0) = 1$.

METODI E MODELLI MATEMATICI PER LE APPLICAZIONI

PROVA SCRITTA DEL 5 APRILE 2011

1) Studiare la stabilità delle soluzioni di equilibrio dell'equazione

$$\dot{x} = x(x^2 + \mu^2 - 1)(\mu - x^2 + 1)$$

al variare del parametro $\mu \in \mathbb{R}$.

2) Studiare la stabilità della soluzione di equilibrio $(0, 0, 0)$ del sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = -\sin x - y \\ \dot{y} = -y + \sin x + yz \\ \dot{z} = -z^3 - 3y^2. \end{cases}$$

3) La *mappa a tenda* è un sistema dinamico discreto definito sull'intervallo $[0, 1]$ da

$$x_{h+1} = f(x_h), \qquad f(x) = \begin{cases} \alpha x & \text{se } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ \alpha(1 - x) & \text{se } \frac{1}{2} \leq x \leq 1, \end{cases}$$

dove $0 \leq \alpha \leq 2$ è un parametro.

Si chiede di determinare, al variare di $\alpha \neq 1$, i punti fissi della mappa a tenda e la loro stabilità.

Nel caso $\alpha = 2$ si chiede poi di determinare l'orbita uscente da $x_0 = \frac{2}{7}$.

METODI E MODELLI MATEMATICI PER LE APPLICAZIONI

PROVA SCRITTA DEL 28 GIUGNO 2011

1) Studiare la stabilità delle soluzioni di equilibrio dell'equazione

$$\dot{x} = x(1 + \mu + e^x)(1 + \mu - e^x)$$

al variare del parametro $\mu \in \mathbb{R}$.

2) Studiare la stabilità delle soluzioni di equilibrio del sistema lineare

$$\begin{cases} \dot{x} = -hx - y \\ \dot{y} = -hy + x \\ \dot{z} = -z - 3y \end{cases}$$

al variare di $h \in \mathbb{R}$.

3) Un modello di Gomatam di tipo preda-predatore è della forma

$$\begin{cases} \dot{x} = x(1 - \log x - 2\log y) \\ \dot{y} = y(2 - \log x - \log y) \end{cases} \qquad x, y > 0\,.$$

Dopo aver trovato la posizione di equilibrio del sistema, si determini la traiettoria uscente dal punto $x = 1$, $y = e^2$ e si mostri che tale traiettoria tende alla posizione di equilibrio per $t \to +\infty$.

METODI E MODELLI MATEMATICI PER LE APPLICAZIONI

PROVA SCRITTA DEL 9 DICEMBRE 2011

1) Studiare la stabilità delle soluzioni di equilibrio dell'equazione differenziale

$$\dot{x} = (|x| - \mu)(x^2 + \mu)x$$

al variare del parametro $\mu \in \mathbb{R}$ e disegnare il relativo diagramma di biforcazione.

2) Si studi la stabilità della soluzione di equilibrio $(0, 0, 0)$ del sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = -x^2(x + z^3) \\ \dot{y} = y(z^3 - y^2) \\ \dot{z} = x^3 - z^3 - y \sin y \,. \end{cases}$$

3) Un modello economico sull'andamento del prezzo P di un bene in funzione del tempo è caratterizzato dall'equazione differenziale del secondo ordine

$$\ddot{P}(t) + \dot{P}(t) - k(k+1)P(t) = 0$$

dove $k \in \mathbb{R}$. Dopo aver trasformato l'equazione in un sistema del primo ordine, si chiede di studiare la stabilità delle posizioni di equilibrio al variare del parametro.

Supponendo poi che il tempo sia misurato in giorni e il prezzo in euro si chiede, nel caso $k = -1$, di determinare il prezzo del bene dopo 4 giorni, sapendo che $P(0) = 10$€ e $\dot{P}(0) = 3$€/giorno.

METODI E MODELLI MATEMATICI
PER LE APPLICAZIONI

PROVA SCRITTA DELL'11 GENNAIO 2012

1) Studiare la stabilità delle soluzioni di equilibrio dell'equazione differenziale

$$\dot{x} = x(|x| + \mu)(x^2 - \mu)$$

al variare del parametro $\mu \in \mathbb{R}$ e disegnare il relativo diagramma di biforcazione.

2) Si studi la stabilità delle soluzioni del sistema lineare

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + ky + z \\ \dot{y} = ky \\ \dot{z} = x + kz\,. \end{cases}$$

3) In un sistema di tipo preda-predatore, dove denotiamo con N la biomassa delle prede e con P quella dei predatori, il tasso di crescita delle prede segue la legge $2 - 2P$, mentre quello dei predatori segue la legge $-1 + 3N$.

Si chiede di studiare la stabilità delle posizioni di equilibrio biologicamente accettabili.

Si chiede poi di risolvere esplicitamente il sistema differenziale ottenuto linearizzando il sistema di partenza attorno alla posizione di equilibrio stabile, supponendo che le biomasse abbiano all'istante iniziale lo stesso valore $N(0) = P(0) = 1$.

METODI E MODELLI MATEMATICI PER LE APPLICAZIONI

PROVA SCRITTA DEL 30 MARZO 2012

1) Studiare la stabilità delle soluzioni di equilibrio dell'equazione differenziale

$$\dot{x} = \mu(x - \arctan \mu)(\mu^2 + 2 - x)$$

al variare del parametro $\mu \in \mathbb{R}$ e disegnare il relativo diagramma di biforcazione.

2) In un modello economico a prezzo distribuito la domanda D e l'offerta S dipendono dal prezzo $P(t,x)$ tramite le relazioni

$$D = 2 - P, \qquad S = 2P - 1 + x\frac{\partial P}{\partial x}.$$

Sfruttando la legge della domanda e dell'offerta nella forma

$$\frac{\partial P}{\partial t} = D - S,$$

si chiede di

a) determinare il valore di equilibrio $\overline{P}$ del prezzo;
b) trovare la soluzione $P(t,x)$ sapendo che $P(0,x) = 1 + x^2$.

[Si consiglia di porre $u(t,x) = P(t,x) - \overline{P}$.]

3) Determinare la stabilità della soluzione nulla del sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = y - \dfrac{x^3}{x+y+1} \\ \dot{y} = -x - y^3. \end{cases}$$

4) Un modello di Gomatam di tipo preda-predatore logistico è della forma

$$\begin{cases} \dot{x} = x(3 - \log(x^2 y)) \\ \dot{y} = y(-4 + \log x^2) \end{cases} \qquad x, y > 0\,.$$

Dopo aver trovato le posizioni di equilibrio del sistema e averne studiato la stabilità, si determini la traiettoria uscente dal punto $x = e$, $y = 1$ e si calcoli il limite per $t \to +\infty$ di tale traiettoria.

[Si consiglia di porre $\log x = N$, $\log y = P$.]

METODI E MODELLI MATEMATICI PER LE APPLICAZIONI

PROVA SCRITTA DEL 4 APRILE 2012

1) Data la famiglia di equazioni differenziali

$$\dot{x} = x(x^2 - \mu|\mu|)(x^2 + \mu - 1)$$

si chiede di studiare la stabilità delle posizioni di equilibrio al variare di μ.

2) È dato un modello continuo di traffico regolato dall'equazione

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0$$

dove $q = e^{-t}\rho(1-\rho)$. Si chiede

(a) di trovare la soluzione $\rho(t,x)$ del sistema tale che $\rho(0,x) = x$;

(b) di calcolare $\lim_{t\to+\infty} \rho(t,x)$ al variare di $x \in \mathbb{R}$;

(c) di mostrare che esiste un tempo $\tau > 0$ in corrispondenza del quale ρ non è definita.

[Può essere comodo osservare che anche $-e^{-t} + 1$ è una primitiva di $e^{-t}\dots$]

3) Determinare la stabilità di *tutte* le soluzioni di equilibrio del sistema differenziale

$$\begin{cases} \dot{x} = -x \\ \dot{y} = y(3-z) \\ \dot{z} = z(-2+2y). \end{cases}$$

4) In un sistema dinamico di popolazioni di tipo competitivo, dove denotiamo con x, y le biomasse delle due specie in competizione, il tasso di crescita della specie x segue la legge $k - x - y$, mentre quello della specie y segue la legge $1 - x - ky$, dove k è un parametro positivo.

Si chiede di studiare la stabilità delle posizioni di equilibrio biologicamente accettabili e di classificarne le orbite in un intorno (sella, nodo, fuoco) ove possibile.

METODI E MODELLI MATEMATICI PER LE APPLICAZIONI

PROVA SCRITTA DEL 22 GIUGNO 2012

1) Data la famiglia di equazioni differenziali
$$\dot{x} = x(x - \mu|\mu|)(1 - x^2 - \mu^2)$$
si chiede di studiarne la stabilità delle posizioni di equilibrio al variare di μ.

2) La velocità in un modello di traffico segue l'equazione di evoluzione
$$(1 + t^2)\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = u$$
e si sa che
$$\lim_{t \to +\infty} u(t, x) = 2x.$$
Trovare la funzione u.

3) Dato il sistema
$$\begin{cases} \dot{x} = -x + y + \mu x \cos x \\ \dot{y} = -x - y^3 \end{cases}$$
discutere la stabilità della soluzione nulla al variare di $\mu \in \mathbb{R}$.

4) In un sistema dinamico di tipo preda-predatore, in cui denotiamo con N la biomassa delle prede e con P quella dei predatori, il tasso di crescita della specie N segue la legge $3 - P$, mentre quello della specie P segue la legge $2N - 4$.

Si chiede di:

- studiare la stabilità delle posizioni di equilibrio biologicamente accettabili;
- scrivere il sistema di equazioni linearizzato attorno alla posizione di equilibrio stabile;
- verificare che le soluzioni del sistema linearizzato sono periodiche e trovarne il periodo in funzione di un'arbitraria condizione iniziale.

METODI E MODELLI MATEMATICI
PER LE APPLICAZIONI

PROVA SCRITTA DEL 13 LUGLIO 2012

1) Studiare la stabilità al variare di $\mu \in \mathbb{R}$ delle soluzioni di equilibrio dell'equazione

$$\dot{x} = (e^x - \mu)(e^{x-\mu})(x + \mu - 1)$$

e tracciarne il relativo diagramma di biforcazione.

2) Un modello di traffico prevede la seguente equazione per la velocità $u(t, x)$:

$$\begin{cases} e^x \dfrac{\partial u}{\partial t} + e^t \dfrac{\partial u}{\partial x} = 0 \\ u(0, x) = \sin x \end{cases}$$

Si chiede di trovare $u(t, x)$ per $t \geq 0$.

3) Dato il sistema dinamico discreto definito da

$$x_{h+1} = a x_h + x_h^2,$$

se ne trovino i punti di equilibrio e si discuta la loro stabilità al variare di $a \in \mathbb{R}$.

Si mostri poi che tale sistema non ammette cicli di ordine 2 nel caso $a = 1$. Che cosa si può dire, sempre nel caso $a = 1$, per i cicli di ordine più alto?

4) In un sistema dinamico di popolazioni di tipo competitivo, in cui denotiamo con x, y la biomassa delle due specie, il tasso di crescita della specie x segue la legge $1 - 2x - 3y$, mentre quello della specie P segue la legge $1 - x - 2y$.

Si chiede di:

- studiare la stabilità delle posizioni di equilibrio biologicamente accettabili, classificandone le orbite in un intorno delle posizioni, quando possibile;
- scrivere il sistema di equazioni linearizzato attorno a ogni posizione di equilibrio stabile.

METODI E MODELLI MATEMATICI
PER LE APPLICAZIONI

PROVA SCRITTA DEL 6 SETTEMBRE 2012

1) Studiare la stabilità delle soluzioni di equilibrio dell'equazione

$$\dot{x} = (\mu^2 - x)(x^2 - \mu^2)(x - 1)$$

al variare di $\mu \in \mathbb{R}$ e disegnare il diagramma di biforcazione.

2) Studiare la stabilità, al variare di $h, k \in \mathbb{R}$, delle soluzioni di equilibrio dell'equazione differenziale

$$\ddot{x} + k(1 - x^2)\dot{x} + hx = 0,$$

distinguendo tra fuochi, nodi e selle.

3) In un modello economico, il prodotto interno segue la legge

$$(1 - k)\ddot{Y}(t) + k\dot{Y}(t) + Y(t) = 1\,.$$

Dopo aver trasformato l'equazione in un sistema del primo ordine, si studi la stabilità delle soluzioni di equilibrio al variare di $k \in \mathbb{R}$.

Si trovino poi tutte le soluzioni nel caso $k = \frac{4}{5}$, imponendo $Y(0) = 1$ e $\dot{Y}(0) = 2$.

4) Dato il sistema dinamico discreto definito da

$$x_{h+1} = ax_h(1 - x_h),$$

se ne trovino i punti di equilibrio e si discuta la loro stabilità al variare di $a \in \mathbb{R}$.

Si trovino poi i valori di a per cui il sistema non ammette cicli di ordine 2.

METODI E MODELLI MATEMATICI PER LE APPLICAZIONI

PROVA SCRITTA DEL 28 SETTEMBRE 2012

1) Data la famiglia di equazioni differenziali

$$\dot{x} = \mu(x^4 - \mu^4)(1 - x^2 - \mu^2)$$

si chiede di studiarne la stabilità delle posizioni di equilibrio al variare di μ.

2)

3)

4) Studiare la stabilità, al variare di $h, k \in \mathbb{R}$, delle soluzioni di equilibrio dell'equazione differenziale

$$\ddot{x} + k(1 - \sin x)\dot{x} + hx = 0,$$

distinguendo tra fuochi, nodi e selle.

5) In un sistema dinamico di tipo preda-predatore, in cui denotiamo con N la biomassa delle prede e con P quella dei predatori, il tasso di crescita della specie N segue la legge $3 - 3P$, mentre quello della specie P segue la legge $N - 2$.

Si chiede:

- di studiare la stabilità delle posizioni di equilibrio biologicamente accettabili;
- di scrivere il sistema di equazioni linearizzato attorno alla posizione di equilibrio stabile;
- di verificare che le soluzioni del sistema linearizzato sono periodiche e di trovarne il periodo in funzione di un'arbitraria condizione iniziale.

METODI E MODELLI MATEMATICI PER LE APPLICAZIONI

PROVA SCRITTA DEL 13 GIUGNO 2013

1) Data la famiglia di equazioni differenziali

$$\dot{x} = x(\mu - x^3)(2 - x^2 - \mu^2)$$

si chiede di studiarne la stabilità delle posizioni di equilibrio al variare del parametro $\mu \in \mathbb{R}$.

2) La velocità in un modello di traffico segue l'equazione di evoluzione

$$\frac{\partial u}{\partial t} + 2tx\frac{\partial u}{\partial x} = u$$

e si sa che $u(0, x) = x$. Trovare la funzione u.

3) Dato il sistema dinamico discreto definito da

$$x_{h+1} = \sqrt{a + x_h}, \qquad x_0 \geq 0,$$

se ne trovino i punti di equilibrio e si discuta la loro stabilità al variare di $a \geq 0$.

Si trovino poi i cicli di ordine 2 nel caso $a = 3$.

Si trovi infine il valore del radicale iterato

$$\sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{6 + \dots}}}}$$

4) In un modello continuo di tipo competitivo di dinamica di due popolazioni X e Y, il tasso di crescita della specie X segue la legge $1 - X - 4Y$, mentre quello della specie Y segue la legge $1 - 3X - 2Y$.

Si chiede di:

- trovare le posizioni di equilibrio biologicamente accettabili e studiarne la stabilità;
- scrivere il sistema di equazioni linearizzato attorno a ogni posizioni di equilibrio stabile;
- risolvere ogni sistema linearizzato ottenuto con arbitrarie condizioni iniziali.

METODI E MODELLI MATEMATICI PER LE APPLICAZIONI

PROVA SCRITTA DEL 27 GIUGNO 2013

1) Data la famiglia di equazioni differenziali

$$\dot{x} = \mu(1 + \mu^2 - x^2)(x - \mu - 1)$$

si chiede di studiarne la stabilità delle posizioni di equilibrio al variare del parametro $\mu \in \mathbb{R}$.

2) La velocità in un modello di traffico segue l'equazione di evoluzione

$$\frac{\partial u}{\partial t} + tx\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

e si sa che $u(0, x) = \sin x$. Trovare la funzione u.

3) Dato il sistema dinamico discreto bidimensionale definito da

$$\begin{cases} x_{h+1} = ax_h + \frac{1}{4}y_h \\ y_{h+1} = x_h + ay_h \end{cases}$$

se ne trovino i punti di equilibrio e si discuta la loro stabilità al variare di $a \in \mathbb{R}$.

Nel caso $a = 0$ si trovi poi

$$\lim_{h\to\infty} x_h \quad \text{e} \quad \lim_{h\to\infty} y_h$$

per $x_0 = y_0 = 1$.

4) In un modello di Gomatam di dinamica di due popolazioni X e Y, il tasso di crescita della specie X segue la legge $1 - \log X - 4\log Y$, mentre quello della specie Y segue la legge $1 - 3\log X$.

Si chiede di:

- trovare le posizioni di equilibrio e studiarne la stabilità;
- risolvere il sistema con arbitrarie condizioni iniziali.

METODI E MODELLI MATEMATICI
PER LE APPLICAZIONI

PROVA SCRITTA DEL 5 SETTEMBRE 2013

1) Data la famiglia di equazioni differenziali

$$\dot{x} = \big(x^2 - (\mu - 1)^2\big)(x^2 + \mu^2 - 1)$$

si chiede di studiarne la stabilità delle posizioni di equilibrio al variare del parametro $\mu \in \mathbb{R}$ e di tracciarne il diagramma di biforcazione.

2) La velocità in un modello di traffico segue l'equazione di evoluzione

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (u + t)\frac{\partial u}{\partial x} + u = 0$$

e si sa che $u(0, x) = x$. Trovare la funzione u.

3) Dato il sistema lineare di equazioni differenziali

$$\begin{cases} \dot{x} = kx \\ \dot{y} = -x + (k-2)y - z \\ \dot{z} = x + y + (k+1)z \end{cases}$$

se ne studi la stabilità dei punti di equilibrio al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$.

4) In un modello di Gomatam di dinamica di due popolazioni X e Y, il tasso di crescita della specie X segue la legge $3 - 4\log Y$, mentre quello della specie Y segue la legge $\log X - 2$.

Si chiede di:

- trovare le posizioni di equilibrio e studiarne la stabilità;
- risolvere il sistema con arbitrarie condizioni iniziali.

METODI E MODELLI MATEMATICI
PER LE APPLICAZIONI

PROVA SCRITTA DEL 19 SETTEMBRE 2013

1) Data la famiglia di equazioni differenziali

$$\dot{x} = (x - |\mu + 1|)(x^2 - \mu^2 - 1)$$

si chiede di studiarne la stabilità delle posizioni di equilibrio al variare del parametro $\mu \in \mathbb{R}$ e di tracciarne il diagramma di biforcazione.

2) Dato il sistema lineare di equazioni differenziali

$$\begin{cases} \dot{x} = (k+1)x + y + 3z \\ \dot{y} = (k-2)y - 2z \\ \dot{z} = kz \end{cases}$$

se ne studi la stabilità dei punti di equilibrio al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$.

3) La velocità in un modello di traffico segue l'equazione di evoluzione

$$\frac{1}{t}\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{x}\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{t}$$

e si sa che $u(1, x) = \frac{1}{2}(3 - x^2)$. Trovare la funzione u.

4) In un modello di Gomatam di dinamica di due popolazioni X e Y, il tasso di crescita della specie X segue la legge $2 - 2\log Y$, mentre quello della specie Y segue la legge $3\log X - 1$.

Si chiede di:

- trovare le posizioni di equilibrio e studiarne la stabilità;
- risolvere il sistema con arbitrarie condizioni iniziali.