Modelli che conducono
a equazioni differenziali

1. Modelli a domanda e offerta

Uno dei più semplici modelli economici è quello della domanda e offerta di un singolo bene. Denotiamo con D la quantità richiesta di un determinato bene e denotiamo con S (dall'inglese *supply*) l'offerta. Supponiamo che queste quantità possano dipendere solo dal tempo (quindi siano riferite a un singolo punto di vendita, oppure si pensano omogeneamente distribuite sul territorio: in ogni caso escludiamo la loro dipendenza dalla posizione).
Denotiamo poi con P il *prezzo* del bene, anch'esso variabile nel tempo.
La legge economica che si assume in questi casi può essere riassunta nel modo seguente.

Postulato (**legge della domanda e dell'offerta**). *Il prezzo di un bene è crescente se la domanda supera l'offerta, e decrescente se l'offerta supera la domanda.*

Se si assume una dipendenza regolare del prezzo dal tempo, allora la legge della domanda e dell'offerta si può esprimere nel seguente modo:

$$\frac{dP}{dt} \cdot (D - S) \geqslant 0.$$

(In questo modo P' ha lo stesso segno di $(D - S)$ in ogni t.)
Un'altra ipotesi ragionevole da porre è che si abbia prezzo costante se la domanda eguaglia l'offerta.

Postulato (**di equilibrio**). *Il prezzo di un singolo bene resta costante se e solo se la domanda uguaglia l'offerta.*

In questo modo avremo

$$\frac{dP}{dt} = 0 \Longleftrightarrow D - S = 0.$$

Interviene a questo punto una prima modellizzazione: Quale dipendenza di P' da D e S scegliere? Chiaramente la più semplice è la seguente:

Esiste una funzione positiva $J : \mathbb{R} \to [0, +\infty[$ tale che valga la seguente relazione

$$\frac{dP(t)}{dt} = J(t)(D(t) - S(t)). \tag{1}$$

Osserviamo che nella precedente relazione J deve essere positiva per la legge della domanda e dell'offerta, in quanto

$$P'(t)(D(t) - S(t)) = J(t)(D(t) - S(t))^2 \geqslant 0 \Longleftrightarrow J(t) \geqslant 0.$$

Eventuali forme generalizzate del modello potrebbero prevedere eccezioni, limitate nel tempo, alla positività di $J(t)$. Per esempio, si potrebbe richiedere che J possa essere negativa in certi intervalli di tempo. Si potrebbe sostituire allora alla condizione di positività di J una condizione del tipo

$$\int_0^{+\infty} J(\tau)\, d\tau \geqslant 0.$$

Per dare un'idea di come si possano facilmente complicare questi modelli, una più semplice idea potrebbe essere questa: la variazione del prezzo non si ha immediatamente ma con un certo ritardo, in quanto l'acquirente non si accorge subito che le quantità di domanda e offerta sono cambiate. Questo si traduce matematicamente nell'introduzione di un ritardo $r \geqslant 0$ e si impone, per esempio del caso di dipendenza lineare sopra esposto, che

$$\frac{dP(t)}{dt} = J(t)(D(t-r) - S(t-r)).$$

Eseguiamo ora il cambio di variabile

$$\tau = t/r, \qquad p(\tau) = P(r\tau), \text{ e similmente per } D, S, J$$

e scopriamo immediatamente che

$$\frac{dp}{d\tau} = \frac{dP}{dt}\frac{dt}{d\tau} = r\frac{dP}{dt}$$

e che

$$d(\tau - 1) = D(r(\tau - 1)) = D(t - r)$$

per cui la nostra relazione diventa

$$\frac{dp}{d\tau} = \frac{j(\tau)}{r}(D(\tau - 1) - S(\tau - 1))$$

che è un'*equazione differenziale alle differenze.*

Ritorniamo ora al caso più semplice dell'equazione (1). Naturalmente non è ancora possibile conoscere l'andamento del prezzo del bene nel tempo, in quanto disponiamo di una sola equazione con tre incognite.
Interviene ora una seconda modellizzazione. Essa consiste nell'assegnare la dipendenza della quantità richiesta o offerta dal prezzo. Anche qui intervengono semplici princìpi economici.

POSTULATO. *La domanda deve essere una funzione decrescente del prezzo, mentre l'offerta una funzione crescente del prezzo.*

Il primo enunciato è naturale se si pensa che si tende a comprare meno un certo bene se costa molto, mentre il secondo si giustifica pensando che con un prezzo maggiore il venditore è più invogliato ad offrire. Entrambi questi principi possono non essere veri in situazioni particolari.

Dobbiamo quindi completare il modello con le due funzioni $D = f(P)$ e $S = g(P)$, ottenendo quindi

$$\begin{cases} \dfrac{dP}{dt} = J(D - S) \\ D = f(P) \\ S = g(P). \end{cases} \tag{2}$$

Ora, se la funzione J è nota, è possibile determinare l'andamento dei prezzi una volta noto il prezzo iniziale.

Il più semplice esempio che rispetta i princìpi detti sopra è quello lineare. In questo caso

$$J(t) = J = \text{cost.}, \quad f(P) = \alpha - \beta P, \quad g(P) = -\gamma + \delta P \quad (J, \alpha, \dots, \delta > 0)$$

e troviamo l'equazione differenziale lineare autonoma

$$\frac{dP}{dt} = J[\alpha + \gamma - (\beta + \delta)P]. \tag{3}$$

La posizione di equilibrio di questa equazione è data da

$$\overline{P} = \frac{\alpha + \gamma}{\beta + \delta}$$

e in questo semplice caso è possibile trovare la soluzione al problema con dato iniziale $P(0) = P_0$

$$P(t) = (P_0 - \overline{P})e^{-J(\beta+\delta)t} + \overline{P}.$$

Da una semplice occhiata a questa soluzione si nota che, essendo $J, \beta, \delta > 0$, la soluzione tende per $t \to +\infty$ a $\overline{P}$. In queste condizioni si dice allora che il mercato tende all'equilibrio. Notiamo anche che per avere la tendenza all'equilibrio non è necessario che β e δ siano entrambi positivi, ma solo che $\beta + \delta$ deve essere positivo (J lo è sempre). Pertanto è possibile avere tendenza all'equilibrio anche violando il postulato della dipendenza della domanda e dell'offerta dal prezzo.

Un esempio meno semplice è quello nel quale si ha una dipendenza non lineare della domanda dal prezzo, per esempio un modello quadratico. Supporremo pertanto

$$D = a + bP - cP^2 \qquad (a, b \geqslant 0, c > 0)$$

mentre lasciamo inalterata la dipendenza dell'offerta dal prezzo. Questo corrisponde al caso in cui si può avere un incremento della domanda anche in presenza di un incremento di prezzo (spiegabile in termini psicologici), per poi però decrescere—e rapidamente—all'ulteriore aumentare del prezzo medesimo.
In questo caso l'equazione (2) diviene, lasciando inalterate le altre ipotesi,

$$\frac{dP}{dt} = J[a + \gamma + (b - \delta)P - cP^2].$$

Questa non è più ora un'equazione semplice (è nota col nome di *equazione di* Bernoulli) e la sua soluzione è lunga e faticosa. Funzioni ancora più complicate di P portano ad equazioni in generale non risolubili in termini elementari.

Un'ulteriore complicazione del modello si può introdurre se si considera il comportamento di un compratore o offerente. Si constata infatti facilmente che, per esempio, la domanda di un dato bene a parità di prezzo è diversa a seconda che il prezzo sia crescente o decrescente. Infatti chi compra può essere invogliato a comprare di più se sa che i prezzi stanno crescendo (accumulando scorte), o comprare di meno o addirittura attendere se i prezzi stanno calando. Dal lato opposto, chi vende ha interesse ad attendere se sa che i prezzi stanno crescendo e invece a vendere al massimo possibile quando sa che i prezzi stanno diminuendo. Questo elemento di speculazione si può formalizzare introducendo i cosiddetti modelli ad aspettativa di prezzo (*price expectation*), nei quali semplicemente le funzioni di domanda e offerta dipendono, oltre che da P, anche dalla sua derivata P'. In formule,

$$\begin{aligned} D &= f(P, P') \\ S &= g(P, P'), \end{aligned}$$

cosicché ora il sistema (2) diventa

$$\begin{cases} \dfrac{dP}{dt} = J(D-S) \\ D = f\left(P, \dfrac{dP}{dt}\right) \\ S = g\left(P, \dfrac{dP}{dt}\right). \end{cases} \tag{4}$$

Il più semplice caso del sistema (4) è quello lineare, che estende il caso precedentemente trattato. Prendiamo quindi

$$J(t) = J = \text{cost.}, \quad f(P) = \alpha - \beta P + a\frac{dP}{dt}, \quad g(P) = -\gamma + \delta P + b\frac{dP}{dt}$$

dove $J, \alpha, \dots, \delta > 0$ mentre non diciamo nulla sul segno di a, b. Inserendo questi dati nel sistema abbiamo allora

$$(1 - J(a-b))\frac{dP}{dt} = J[\alpha + \gamma - (\beta + \delta)P]. \tag{5}$$

Notiamo innanzitutto che se $J(a-b) \neq 1$, la soluzione di equilibrio di questa equazione resta la stessa dell'equazione (3), cioè

$$\overline{P} = \frac{\alpha + \gamma}{\beta + \delta}.$$

(Il caso $J(a-b) = 1$ non porta a un'equazione differenziale e in questo caso implica che il prezzo non possa essere diverso da $\overline{P}$; nel seguito trascureremo questo caso particolare).

Non è però uguale la dinamica del modello, anche se l'equazione, scritta nella forma

$$\frac{dP}{dt} = \frac{J}{1 - J(a-b)}[\alpha + \gamma - (\beta + \delta)P]$$

ammette la soluzione con dato iniziale $P(0) = P_0$

$$P(t) = (P_0 - \overline{P})e^{-\frac{J(\beta+\delta)}{1-J(a-b)}t} + \overline{P}$$

che non sembra essere molto dissimile dal caso precedente. Notiamo però ora che se $J(a-b) > 1$, allora il denominatore dell'esponente è negativo e quindi $P(t)$ diverge per $t \to +\infty$, ossia non si ha tendenza all'equilibrio del mercato. Poiché $J > 0$, avremo che questo avviene se e solo se

$$a - b > \frac{1}{J}. \tag{6}$$

Essendo a il coeffciente di P' nell'espressione della domanda, dalle considerazioni fatte sopra si trae che a in generale è positivo (perché se i prezzi sono in crescita la domanda cresce per evitare prezzi maggiori), mentre b è negativo (se i prezzi sono in crescita i venditori tendono a ridurre l'offerta per aspettare), quindi la condizione (6) è realmente possibile. Naturalmente in questo caso, dopo aumenti o cali spropositati dei prezzi questo semplice modello non può più essere applicato.
Un possibile modo di evitare questo effetto indesiderato è quello di supporre che $a - b$ non cresca troppo immaginando che sia funzione del prezzo e che decresca se il prezzo cresce. Supponiamo allora

$$J(a-b) = 1 - c - mP \tag{7}$$

dove $m > 0$, mentre c può anche essere negativa (l'addendo 1 serve a semplificare l'espressione).
L'equazione (5) diventa allora

$$(c + mP)\frac{dP}{dt} = J[\alpha + \gamma - (\beta + \delta)P]$$

ossia

$$\frac{dP}{dt} = J\frac{(\alpha + \gamma) - (\beta + \delta)P}{c + mP}.$$

Questa equazione è ora a variabili separabili e può essere integrata, ma non si riesce a esprimere in maniera semplice P in funzione di t. Conviene ricorrere allora a metodi qualitativi. Essi forniscono allora, come avremo modo di vedere più avanti, che si ha di nuovo tendenza all'equilibrio se

$$c + m\overline{P} > 0.$$

Questo dice che, siccome $\overline{P} > 0$, si ha instabilità se c/m è troppo negativo, come ci si aspetta dalla (7).

Addirittura, in determinati casi gli investitori non considerano solo la velocità di variazione dei prezzi, cioè la derivata prima dP/dt ma anche la derivata seconda d^2P/dt^2. Questo in quanto, per esempio, una derivata seconda negativa con derivata prima positiva indica un abbassamento della velocità di aumento dei prezzi, e quindi (per esempio in un regime di prezzi cronicamente in aumento) un parziale incentivo a comperare o vendere. Il modello allora diviene

$$\begin{cases} \dfrac{dP}{dt} = J(D - S) \\ D = f\left(P, \dfrac{dP}{dt}, \dfrac{d^2P}{dt^2}\right) \\ S = g\left(P, \dfrac{dP}{dt}, \dfrac{d^2P}{dt^2}\right). \end{cases} \tag{8}$$

Inoltre, almeno nel caso di modelli lineari ad aspettativa di prezzo (quindi se a e b sono costanti nel modello precedente), non è possibile prevedere oscillazioni periodiche dei prezzi, che invece si osservano in molte situazioni. Invece, con modelli che comprendono anche P'' questo è possibile.
Prendiamo infatti

$$f(P) = \alpha - \beta P + a\frac{dP}{dt} + r\frac{d^2P}{dt^2}, \quad g(P) = -\gamma + \delta P + b\frac{dP}{dt} + s\frac{d^2P}{dt^2}$$

con i segni presi in precedenza e senza ipotesi per ora sul segno di r, s.
Allora l'equazione (8) diviene ora

$$J(r-s)\frac{d^2P}{dt^2} + (J(a-b)-1)\frac{dP}{dt} - J(\beta+\delta)P + J(\alpha+\gamma) = 0.$$

Per trovare ora la soluzione, però, bisogna assegnare, oltre al valore iniziale del prezzo, anche la sua velocità iniziale $P'(0) = P_1$.
Vogliamo ora vedere se questo modello può ammettere oscillazioni. Dalla teoria generale delle equazioni differenziali lineari del secondo ordine sappiamo che questo avviene se il polinomio caratteristico dell'equazione omogenea

$$J(r-s)\frac{d^2P}{dt^2} + (J(a-b)-1)\frac{dP}{dt} - J(\beta+\delta)P = 0$$

cioè

$$J(r-s)\lambda^2 + (J(a-b)-1)\lambda - J(\beta+\delta)\lambda = 0$$

ammette radici immaginarie, ossia se e solo se

$$(J(a-b)-1)^2 + 4J^2(r-s)(\beta+\delta) < 0.$$

Tenuto conto che $\beta + \delta > 0$, si deve avere senz'altro $r < s$. Se poi

$$J(a-b) = 1, \qquad r < s$$

allora la soluzione è un ciclo stabile della forma

$$P(t) = \overline{P} + K_1 \cos\omega t + K_2 \operatorname{sen}\omega t$$

con

$$\omega = \sqrt{\frac{\beta + \delta}{s - r}}.$$

Sempre dalla teoria delle equazioni differenziali lineari si ha che la tendenza all'equilibrio è regolata dal coefficiente di P' che è pari a $(J(a-b)-1)/J(r-s)$, per cui si avrà che se questo valore è negativo si avrà tendenza all'equilibrio, mentre se è positivo si avrà allontanamento dall'equilibrio.
Un modello non lineare nel quale a, b (o anche r, s) dipendono da P è ancora possibile ma la soluzione esplicita non si trova. Bisogna procedere con metodi qualitativi che non svilupperemo.

Passiamo ora ad esaminare rapidamente modelli a più quantità. Naturalmente in questo caso si devono applicare gli stessi princìpi introdotti in precedenza. Supporremo pertanto le relazioni

$$\begin{aligned} \frac{dP_1}{dt} &= J_1(t)[D_1(t) - S_1(t)] \\ &\vdots \\ \frac{dP_n}{dt} &= J_n(t)[D_n(t) - S_n(t)] \end{aligned} \tag{9}$$

Ora, però, la situazione può essere più complicata per quanto riguarda la dipendenza delle domande e delle offerte dei vari beni dai loro prezzi. Non è detto, infatti, in generale che la domanda per l'i-esimo bene dipenda solo dal suo prezzo. Infatti, spesso l'acquisto di un bene risulta condizionato dall'acquisto di un altro e quindi la domanda può dipendere da entrambi i prezzi. In generale quindi dobbiamo supporre

$$\begin{aligned} D_1 &= f_1(P_1, \ldots, P_n) \\ &\vdots \\ D_n &= f_n(P_1, \ldots, P_n) \\ S_1 &= g_1(P_1, \ldots, P_n) \\ &\vdots \\ S_n &= g_n(P_1, \ldots, P_n). \end{aligned}$$

Come visto nell'esempio con un singolo bene, una scelta semplice è quella di una dipendenza lineare (anzi, affine) di domanda e offerta dai prezzi. Poniamo quindi

$$\boldsymbol{D} = (D_1, \ldots, D_n), \qquad \boldsymbol{S} = (S_1, \ldots, S_n)$$

e supponiamo che esistano dei vettori costanti $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_i)$, $\boldsymbol{\beta} = (\beta_i)$, $(i = 1, \ldots, n)$ e due matrici A, B tali che

$$\begin{aligned} \boldsymbol{S} &= \boldsymbol{\alpha} + \mathsf{A}\,\boldsymbol{P} \\ \boldsymbol{D} &= \boldsymbol{\beta} + \mathsf{B}\,\boldsymbol{P} \end{aligned}$$

per cui il sistema (9) assume la forma vettoriale

$$\frac{d\boldsymbol{P}}{dt} = \mathsf{J}\,[\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\beta} + (\mathsf{A} - \mathsf{B})\boldsymbol{P}]$$

dove si è posto $\mathsf{J} = \mathrm{diag}(J_1, \ldots, J_n)$.

Vediamo un poco più in dettaglio i modelli a due beni ($n = 2$). Allora il precedente sistema si può scrivere

$$\begin{cases} \dfrac{dP_1}{dt} = j_1[\alpha_1 - \beta_1 + (a_{11} - b_{11})P_1 + (a_{12} - b_{12})P_2] \\ \dfrac{dP_2}{dt} = j_2[\alpha_2 - \beta_2 + (a_{21} - b_{21})P_1 + (a_{22} - b_{22})P_2] \end{cases}$$

ed ammette, come si sa dalla teoria dei sistemi lineari, soluzioni date da combinazioni lineari di funzioni goniometriche, esponenziali e polinomi. In particolare, simili sistemi hanno un'unica posizione di equilibrio (a parte particolari scelte dei coefficienti, per le quali ne esistono infinite).
Vedremo nel capitolo 3 come si possano trarre informazioni sulla stabilità di questa posizione di equilibrio.

2. Modelli economici di crescita

Un altro settore economico nel quale si considerano modelli che conducono a equazioni differenziali è quello della crescita economica. In questi modelli, basati sulla teoria di Keynes, la variabile dipendente di maggiore importanza è il *prodotto interno* Y, visto come funzione del tempo, per esempio il prodotto interno lordo (PIL).
Il problema è quello di stabilire l'evoluzione temporale del prodotto interno, legandolo ad altre variabili economiche. Una prima di queste è il *consumo* C. Vi è un naturale e semplice vincolo fra Y e C, in quanto non si può consumare più di quello che si produce:

POSTULATO. *In ogni modello economico si deve avere*

$$0 < C \leqslant Y.$$

Il rapporto $c(t) = C(t)/Y(t)$ si chiama *propensione al consumo* e varia ovviamente fra 0 e 1. Un'altra variabile economica fondamentale è l'*investimento* I. Esso concorre a formare il prodotto interno, nel senso che si suppone la seguente equazione:

$$Y = C + I + G \tag{10}$$

dove G rappresenta l'investimento statale, una variabile di solito non legata alle altre variabili economiche, e quindi una funzione nota del tempo. Su questo aspetto torneremo più sotto.

La natura differenziale del problema entra in gioco quando si vogliono legare fra loro le altre variabili. Un ragionamento naturale in questo senso è che *l'investimento dipende dal consumo e cresce al crescere del consumo*. Supponiamo allora che I sia una funzione di dC/dt:

$$I = f(\frac{dC}{dt}). \tag{11}$$

La scelta della funzione f è oggetto di modellizzazione e la più semplice scelta di questa funzione è, come al solito, quella lineare

$$I = \beta \frac{dC}{dt} = \beta \frac{d}{dt}(c(t)Y(t)).$$

Ora disponiamo di tre relazioni, una differenziale e due finite, fra Y, I c e C e possiamo scrivere il modello in una forma più compatta

$$Y = cY + \beta \frac{d}{dt}(cY) + G.$$

Se prendiamo ad esempio c costante, così come β, e introduciamo la cosiddetta *propensione al risparmio* $s = 1 - c$ troviamo l'equazione differenziale lineare non omogenea

$$\beta c \frac{dY}{dt} = sY - G. \tag{12}$$

Ammettendo anche G costante, questa equazione ammette come soluzione di equilibrio

$$\overline{Y} = \frac{G}{s}.$$

Da ciò appare evidente l'interesse affinché sia alta la propensione al consumo, perché il prodotto interno all'equilibrio è più alto quanto più s è piccolo.
La soluzione dell'equazione, dato un prodotto iniziale Y_0, è

$$Y(t) = (Y_0 - \overline{Y})e^{st/\beta c} + \overline{Y}$$

e da qui ci accorgiamo che non si ha tendenza all'equilibrio (questo può essere un fatto positivo per il modello).
Una modellizzazione diversa si ha se c non viene assunta ma dipende dalle variabili economiche. In effetti la propensione al consumo è fortemente influenzata anche da avvenimenti esterni al modello economico, e una politica corretta deve tentare di gestire questi avvenimenti. Allora l'equazione (12) va interpretata in diverso modo. Si può pensare di conoscere $c(t)$ e si cerca di stabilire $G(t)$ in modo che $Y(t)$ segua un'evoluzione temporale voluta. Questo è un semplice problema di *controllo*, sul quale non insisteremo.
Un'altra modellizzazione ancora si può avere complicando l'equazione (11) introducendo anche la derivata I'. Per esempio, si può sostituire il modello (11) con una relazione fra I', C e C', esprimendo così il fatto che il tasso di crescita degli investimenti possono influenzare l'andamento degli investimenti stessi.

Poniamo quindi

$$I = \beta \frac{dC}{dt} - \gamma \frac{dI}{dt}$$

e modifichiamo anche la struttura dell'equazione di equilibrio (10). Ammettiamo cioè che sia possibile un incremento del prodotto interno semplicemente scrivendo

$$Y(t) = C(t) + I(t) + G(t) - \lambda \frac{dY}{dt}$$

o, in maniera equivalente, ponendo $Z = C + I + G$

$$\frac{dY}{dt} = -\frac{1}{\lambda}[Y(t) - Z(t)].$$

Questa equazione si motiva col fatto che una deviazione positiva del prodotto interno dalla cosiddetta *domanda totale* Z produca un aumento del prodotto stesso, non attraverso investimenti o consumi ma altri meccanismi. Allora, nell'ipotesi di propensione al consumo costante, troviamo

$$\lambda \frac{d^2Y}{dt^2} + \frac{dY}{dt} = \frac{dC}{dt} + \frac{dI}{dt} + G'(t)$$

ossia

$$\lambda \frac{d^2Y}{dt^2} + s\frac{dY}{dt} = \frac{1}{\gamma}(\beta c \frac{dY}{dt} - I) + G'(t)$$

che equivale a

$$\lambda \frac{d^2Y}{dt^2} + \left(s - \frac{\beta c}{\gamma}\right) \frac{dY}{dt} = \frac{1}{\gamma}\left[-sY + G(t) - \lambda \frac{dY}{dt}\right] + G'(t)$$

e che si può infine scrivere

$$\lambda \frac{d^2Y}{dt^2} + \left(s - \frac{\beta c + \lambda}{\gamma}\right) \frac{dY}{dt} + \frac{s}{\gamma} Y = G'(t) + \frac{1}{\gamma} G(t).$$

Questa equazione differenziale lineare ha come polinomio caratteristico l'equazione

$$\mu^2 + \frac{1}{\lambda}\left(s - \frac{\beta c + \lambda}{\gamma}\right)\mu + \frac{s}{\lambda\gamma} = 0$$

e osserviamo che, essendo $s > 0$, la parte reale delle soluzioni è negativa (regola di Cartesio) se

$$s - \frac{\beta c + \lambda}{\gamma} > 0$$

ossia se

$$c < \frac{\gamma - \lambda}{\gamma + \beta}.$$

Pertanto se la propensione al consumo è bassa si ha stagnazione (ossia tendenza a costanza del prodotto interno), altrimenti si ha una crescita. Inoltre, se il discriminante del polinomio caratteristico è positivo si ha crescita costante, viceversa si hanno oscillazioni.

3. Modelli tratti dalla dinamica delle popolazioni

Numerose applicazioni di questa teoria vanno anche alla Biologia, e in particolare allo studio dell'incremento demografico delle specie. Sia $x(t)$ la popolazione di una certa specie all'istante t. Il *tasso relativo di crescita* della popolazione è definito da

$$M(t) = \frac{\dot{x}(t)}{x(t)}.$$

Un modello molto semplice suppone tasso di crescita *costante*. In questo caso si ha l'equazione

$$\dot{x} = Mx \qquad (M \in \mathbb{R})$$

che ammette ovviamente come soluzione $x(t) = x_0 e^{Mt}$. Il tasso di crescita dipende in generale da molti fattori, quali la disponibilità di cibo, e può essere supposto positivo o negativo a seconda della situazione, ossia $M = (\sigma - \overline{\sigma})$. In questo modo è evidente che se $\sigma > \overline{\sigma}$ si avrà crescita esponenziale della popolazione, mentre per $\sigma < \overline{\sigma}$ si avrà estinzione (in un tempo finito, giacché x deve assumere valori interi).

Naturalmente questo modello non è realistico. Un modello più interessante prevede che M dipenda da x, e che diventi negativo dopo che x ha raggiunto una soglia ξ, detta *popolazione limite*. La più semplice scelta è

$$M(x) = c(\xi - x)$$

corrispondente all'equazione

$$\dot{x} = cx(\xi - x).$$

Integrando questa equazione a variabili separabili con le condizioni iniziali $x(0) = x_0$ si trova

$$x(t) = \frac{\xi x_0 e^{c\xi t}}{x_0 e^{c\xi t} + \xi - x_0}$$

Da qui si vede subito che se $c < 0$, allora si ha estinzione, mentre se $c > 0$ la popolazione tende a $x = \xi$. Tale posizione di equilibrio è pertanto asintoticamente stabile.

Fin qui il discorso per *una sola* specie. Se esse sono anche solo due, la situazione cambia molto. Infatti siano x il numero di predatori e y quello delle prede. Supponiamo anche che il numero di incontri predatore-preda che si risolvono con la fine del secondo sia proporzionale a xy. Dunque il cibo *pro capite* del predatore è proporzionale a y, e supponiamo che vi sia estinzione se non vi sono prede, cosicché l'equazione precedente diviene

$$\dot{x} = a(y - \sigma_0)x = (Ay - B)x.$$

Ragioniamo ora sulle prede. Supponendo una disponibilità costante di cibo per esse in assenza di predatori, abbiamo l'equazione

$$\dot{y} = Cy - f(x, y)$$

dove $f(x, y)$ è il numero di prede mangiate nell'unità di tempo. È ragionevole supporre che f sia proporzionale al numero di predatori, e supponiamo che sia anche proporzionale a y, cosicché se vi è un numero doppio di prede, vi sarà un numero doppio di predazioni. In definitiva si ottiene per y l'equazione

$$\dot{y} = Cy - Dxy = (C - Dx)y.$$

Il sistema che si trova è dunque

$$\begin{cases} \dot{x} = (Ay - B)x \\ \dot{y} = (C - Dx)y \end{cases}$$

che è noto col nome di *sistema di Volterra-Lotka*. Esso ha due soluzioni di equilibrio, $(0, 0)$ e $(C/D, B/A)$. La prima è instabile, avendosi

$$\mathsf{A}\,(0,0) = \begin{bmatrix} -B & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix}, \qquad \lambda_1 = -B, \quad \lambda_2 = C.$$

La seconda, invece, ha

$$\mathsf{A}\,(C/D, B/A) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{AC}{D} \\ -\frac{DB}{A} & 0 \end{bmatrix}, \qquad \lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{CB}$$

che non fornisce informazioni sulla stabilità.

Si può a questo punto dimostrare che la funzione

$$H(x, y) = Dx - C \log x + Ay - B \log y$$

è costante sulle traiettorie del sistema e che $(C/D, B/A)$ è un minimo stretto per essa. Dunque si ha equilibrio stabile con orbite periodiche descritte dalla figura.

Figura 1
Orbite del sistema di Lotka-Volterra.

Infine, se si introducono nei fattori del sistema dei termini che rendono negativo il tasso di crescita per x, y grande, otteniamo il sistema di Volterra-Lotka modificato

$$\begin{cases} \dot{x} = (Ay - B - \lambda x)x \\ \dot{y} = (C - Dx - \mu y)y. \end{cases}$$

Questo sistema presenta due comportamenti a seconda se le rette $Ay - B - \lambda x = 0$ e $C - Dx - \mu y = 0$ si intersecano o meno nel primo quadrante. Se esse non si intersecano, le possibili posizioni di equilibrio sono $(0, 0)$, $(0, C/\mu)$, $(B/\lambda, 0)$; le prime due sono instabili e la terza è asintoticamente stabile.
Se invece si ha un equilibrio $(\overline{x}, \overline{y})$ nel primo quadrante, la situazione è diversa e più complicata. Si può allora vedere che esistono $\overline{p}$ e $\overline{q}$ tali che il rettangolo di vertici

$$(0, 0),\ (\overline{p}, 0),\ (\overline{p}, \overline{q}),\ (0, \overline{q})$$

è positivamente invariante. Si può allora applicare il teorema di Poincaré-Bendixson e concludere che ogni orbita che entra nel rettangolo deve tendere a uno dei punti di equilibrio o a un ciclo limite. Poiché si vede che l'origine e i punti di intersezione con gli assi sono instabili, se ne conclude che ogni traiettoria deve o tendere al punto di equilibrio o a un ciclo limite.