Elenco delle soluzioni

Questo documento molto composito contiene alcune tracce delle soluzioni ai temi d'esame del corso di Sistemi Dinamici, in ordine sparso. Contiene i seguenti esercizi:

data	esercizio
2/9/16	4
9/6/17	4
30/6/17	3
14/7/17	1
8/9/17	4
22/9/17	1 3
1/6/18	4
15/6/18	3
6/7/18	2
1/2/19	1
31/5/19	2 3
14/6/19	3
12/7/19	2 3
6/9/19	1 2 3
17/1/20	2
26/6/20	1 2 3
17/7/20	1 2 3

Sistemi lineari: stabilità dell'equilibrio

- 22 settembre 2017 n. 3

  La soluzione è unica per $h \neq 0$, $h \neq -1$ e vale

  $$x = \frac{3-h}{h^2+h}, \quad y = \frac{-3-h}{h^2+h}.$$

  Poiché gli autovalori della matrice valgono $h, h+1$, si ha che tale soluzione è globalmente esponenzialmente instabile per $h < -1$ e instabile per $h > -1, h \neq 0$.

  Per $h = 0$ e $h = -1$ non esistono soluzioni.

- 6 luglio 2018 n. 2

  L'esponenziale della matrice risulta

  $$\begin{bmatrix} 2-e^{-1} & e^{-1}-1 \\ 2-2e^{-1} & 2e^{-1}-1 \end{bmatrix}.$$

  Per risolvere il sistema si può calcolare in modo simile l'esponenziale della matrice $\begin{bmatrix} t & -t \\ 2t & -2t \end{bmatrix}$, che risulta

  $$\begin{bmatrix} 2-e^{-t} & e^{-t}-1 \\ 2-2e^{-t} & 2e^{-t}-1 \end{bmatrix}$$

  e quindi la soluzione è data da

  $$\begin{bmatrix} 2-e^{-t} & e^{-t}-1 \\ 2-2e^{-t} & 2e^{-t}-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x(t) = 2e^{-t}-3 \\ y(t) = 4e^{-t}-3. \end{cases}$$

- 31 maggio 2019 n. 3

  Gli autovalori della matrice sono $\pm\sqrt{k^2-1}$, quindi:

  - per $k < -1$ o $k > 1$ si ha solo la soluzione nulla ed è instabile (sella);
  - per $-1 < k < 1$ si ha solo la soluzione nulla ed è stabile semplicemente (centro);
  - per $k = \pm 1$ si hanno infinite soluzioni di equilibrio, tutte instabili.

- 30 giugno 2017 n. 3

  Gli autovalori della matrice del sistema lineare sono $2k, k-3$, quindi per $k \neq 0$ e $k \neq 3$ c'è solo la soluzione nulla.

  - per $k < 0$ la soluzione è glob. esp. stabile (nodo)
  - per $0 < k < 3$ è una sella
  - per $k > 3$ è un nodo instabile
  - per $k = 0$ ci sono infinite posizioni di equilibrio, tutte stabili semplicemente
  - per $k = 3$ ci sono infinite posizioni di equilibrio, tutte instabili.

Sistemi non lineari: stabilità dell'equilibrio

- 6 settembre 2019 n. 2

  Per $k \neq 0$ l'unica soluzione di equilibrio è $(0,0)$: per $k < 0$ è instabile (per linearizzazione), per $k > 0$ la funzione

  $$W(x,y) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2$$

  è una funzione di Ljapunov: è regolare, ha un minimo (globale) stretto nell'origine e $\dot{W} = kx^2 - y^4 \leq 0$. Inoltre $\dot{W} = 0$ solo nella posizione di equilibrio, dunque la posizione è (globalmente) asintoticamente stabile.

  Per $k = 0$ si hanno le infinite posizioni di equilibrio $(\bar{x}, 0)$. Per ognuna di esse la funzione

  $$W(x,y) = \frac{1}{2}(x - \bar{x})^2 + \frac{1}{2}y^2$$

  è di Ljapunov, con $\dot{W} = -\bar{x}xy^2 - y^4 \leq 0$ in un intorno di $(\bar{x}, 0)$. Stavolta però $\{\dot{W} = 0\} = \{y = 0\}$ contiene orbite diverse da $(\bar{x}, 0)$: tutte le altre posizioni di equilibrio che le stanno arbitrariamente vicine. Quindi non possiamo dimostrare la stabilità asintotica. Anzi, in questo caso siamo certi che la stabilità è solo semplice, perché quando un equilibrio è punto di accumulazione di altri equilibri (come in questo caso), se c'è stabilità deve essere per forza semplice: le altre posizioni di equilibrio non possono essere attratte verso questa.

- 14 giugno 2019 n. 3

  Usando la linearizzazione, mediante la regola di Cartesio troviamo che per $k < 0$ ci sono due variazioni e la posizione è instabile (sorgente) e per $k > 0$ ci sono due permanenze e la posizione è esponenzialmente stabile.

  Per $k = 0$ la linearizzazione fallisce ma troviamo la funzione

  $$W(x,y) = -\cos x + (y+1)\log(y+1) - y$$

  che ha un minimo stretto locale nell'origine e si ha

  $$\dot{W} = -y^3 \log(y+1)$$

  che ha il segno di $-y^4$ e dunque è negativa. Inoltre

  $$\{\dot{W} = 0\} = \{y = 0\} \quad \Rightarrow \quad x \equiv k\pi, y \equiv 0$$

  e dunque localmente contiene solo l'origine, che risulta asintoticamente stabile.

- 31 maggio 2019 n. 2

  La funzione $W = x^4/4 - \cos y$ ha minimo stretto locale in $(0,0)$ e

  $$\dot{W} = -y \sin y \leq 0$$

  quindi la posizione è stabile. Inoltre $\{\dot{W}\} = \{y = 0\}$ contiene localmente solo l'orbita di equilibrio, quindi la posizione è asintoticamente stabile.

  Le altre posizioni di equilibrio sono $(-k\pi, k\pi)$ per $k \in \mathbb{Z}, k \neq 0$. Con la linearizzazione si trova che sono asintoticamente stabili per k pari e instabili per k dispari (selle).

- 1 febbraio 2019 n. 1

  La funzione $W = x^4/4 + y^2/2$ ha minimo (globale) stretto in $(0,0)$ ed è tale che

  $$\dot{W} = -x^3(e^x - 1) - y^4 \leq 0$$

  poiché la funzione $-x^3(e^x - 1)$ è sempre negativa. Inoltre $\{\dot{W} = 0\}$ solo in $(0,0)$, quindi la posizione è (globalmente) asintoticamente stabile.

- 15 giugno 2018 n. 3

  Si deve studiare la stabilità della posizione *nulla* (attenzione al testo, può contenere un errore). La matrice di linearizzazione è

  $$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix}$$

  e quindi gli autovalori sono $-1, \alpha$. Per $\alpha < 0$ l'origine è esponenzialmente stabile e per $\alpha > 0$ è instabile.

  Per $\alpha = 0$ cerchiamo una funzione di Ljapunov: moltiplicando la prima equazione per $\sin^3 x$ e la seconda per y otteniamo

  $$\dot{W} = -x \sin^3 x \leq 0$$

  e dunque la funzione $W = \frac{1}{3}\cos^3 x - \cos x + y^2/2$ è di Ljapunov. Inoltre $\{\dot{W} = 0\} = \{x = 0\}$ da cui $\dot{y} = 0$, $\dot{x} = 0$ e $y = 0$, quindi l'origine è l'unica traiettoria contenuta localmente. L'equilibrio è asintoticamente stabile.

Risoluzione della prova di Sistemi Dinamici del 26 giugno 2020

1. Essendo un modello di tipo Gomatam, conviene effettuare il cambio di variabili

$$\xi = \ln x, \quad \eta = \ln y,$$

ottenendo il sistema lineare

$$\begin{cases} \dot{\xi} = (k-4)\xi - 2\eta \\ \dot{\eta} = 5\xi + (k+2)\eta. \end{cases}$$

La matrice del sistema è

$$\begin{bmatrix} k-4 & -2 \\ 5 & k+2 \end{bmatrix}$$

che ha autovalori complessi coniugati $\lambda_{1,2} = k - 1 \pm i$. Quindi si ha sempre una sola soluzione di equilibrio $\xi = 0, \eta = 0$ (che corrisponde a $x = 1, y = 1$) e:

- per $k < 1$ è asintoticamente stabile (fuoco);
- per $k > 1$ è instabile (fuoco);
- per $k = 1$ è stabile semplicemente (centro).

Nel caso $k = 2$ il sistema lineare si scrive

$$\begin{cases} \dot{\xi} = -2\xi - 2\eta \\ \dot{\eta} = 5\xi + 4\eta \end{cases}$$

e derivando la prima equazione si ottiene

$$\ddot{\xi} = -2\dot{\xi} - 2\dot{\eta} = -2\dot{\xi} - 10\xi - 8\eta = -2\dot{\xi} - 10\xi + 4(\dot{\xi} + 2\xi) = 2\dot{\xi} - 2\xi.$$

L'equazione lineare del secondo ordine $\ddot{\xi} - 2\dot{\xi} + 2\xi = 0$ ha come polinomio caratteristico $\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$ le cui radici sono

$$\lambda_{1,2} = 1 \pm i$$

e quindi le soluzioni dell'equazione si scrivono

$$\xi(t) = e^t(c_1 \cos t + c_2 \sin t).$$

Poiché $\eta = -\frac{1}{2}\dot{\xi} - \xi$, si ottiene anche

$$\begin{aligned} \eta(t) =& -\frac{1}{2}e^t(c_1 \cos t + c_2 \sin t - c_1 \sin t + c_2 \cos t) - e^t(c_1 \cos t + c_2 \sin t) \\ =& \frac{1}{2}e^t\left((-3c_1 - c_2)\cos t + (c_1 - 3c_2)\sin t\right). \end{aligned}$$

La soluzione del sistema di partenza quindi si scrive

$$x(t) = e^{\xi(t)}, \qquad y(t) = e^{\eta(t)}.$$

2. Cerchiamo i punti fissi della funzione $f(x) = \frac{x}{x^2+d}$ al variare di $d \in \mathbb{R}$: si ha

$$\frac{x}{x^2 + d} = x \quad \Rightarrow \quad x = 0 \ \vee \ x^2 + d = 1.$$

Quindi c'è sempre la posizione $x = 0$ e, se $d < 1$, anche le posizioni $x = \pm\sqrt{1-d}$.
Per la stabilità usiamo la linearizzazione:

$$f'(x) = \frac{d - x^2}{(x^2 + d)^2}$$

da cui:

- 0 è asintoticamente stabile per $|f'(0)| < 1$, cioè per $-1 < d < 1$, e instabile per $d < 1 \vee d > 1$;
- $\pm\sqrt{1-d}$ sono asintoticamente stabili per $|2d - 1| < 1$, cioè (tenendo conto della condizione di esistenza) per $0 < d < 1$, e instabili per $d < 0$;
- nel caso $d = -1$ si ha $f'(0) = -1$, $f''(0) = 0$ e $f'''(0) = -6 < 0$, quindi $2f'''(0) + 3f''(0)^2 < 0$ e 0 è instabile;
- nel caso $d = 1$ si ha $f'(0) = 1$, $f''(0) = 0$ e $f'''(0) = -6 < 0$, quindi 0 è asintoticamente stabile;
- nel caso $d = 0$ si ha $f'(\pm\sqrt{1-d}) = -1$, $f''(\pm\sqrt{1-d}) = 2$ e $f'''(\pm\sqrt{1-d}) = -6 < 0$, quindi $2f''' + 3f''^2 = 0$ e non possiamo dire niente.

Nel caso $d = -2$ si ha

$$f(x) = \frac{x}{x^2 - 2} \qquad \Rightarrow \qquad f(f(x)) = \frac{x(2 - x^2)}{2x^4 - 9x^2 + 8}$$

e risolvendo $f(f(x)) = x$ si ottengono le soluzioni

$$x = 0, \quad x = \pm 1, \quad x = \pm\sqrt{3}.$$

La soluzione $x = 0$ è da scartare perché è di equilibrio; le altre danno luogo a due 2-cicli.

3. L'unica posizione di equilibrio è $(0, 0, 0)$. Moltiplicando la prima equazione per x, la seconda per y e la terza per z^3, troviamo che la funzione

$$W(x, y, z) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{4}z^4$$

ha un minimo stretto nella posizione di equilibrio e

$$\dot{W} = x\dot{x} + y\dot{y} + z^3\dot{z} = -x\sin x + xz^3 - xy^2 + xy^2 - xz^3 - z^6 = -x\sin x - z^6 \leqslant 0$$

quindi la posizione è stabile. Cerchiamo ora se ci sono delle traiettorie contenute nell'insieme $\{\dot{W} = 0\}$: in un intorno di $(0, 0, 0)$ si ha

$$\{\dot{W} = 0\} = (0, y, 0) \quad \Rightarrow \quad x \equiv 0, \quad z \equiv 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{y} \equiv 0 \quad \Rightarrow \quad y \equiv \text{cost.}$$

e dalla prima equazione risulta $y \equiv 0$, quindi la soluzione $(0, 0, 0)$ è l'unica orbita completa contenuta in $\{\dot{W} = 0\}$: la posizione è asintoticamente stabile.

Risoluzione della prova di Sistemi Dinamici del 17 luglio 2020

1. Cerchiamo le soluzioni di equilibrio risolvendo

$$\begin{cases} a + x^2y - bx - x = 0 \\ bx - x^2y = 0. \end{cases}$$

Dalla seconda abbiamo $x^2y = bx$ che sostituito nella prima dà

$$a + bx - bx - x = 0 \quad \Rightarrow \quad a - x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = a$$

che è accettabile per $a > 0$. Risostituito nella seconda, viene

$$b = ay \quad \Rightarrow \quad y = \frac{b}{a}$$

che è accettabile per $b > 0$. Quindi per $a, b > 0$ esiste una sola posizione di equilibrio $(a, b/a)$. Per la stabilità calcoliamo il gradiente del secondo membro:

$$\nabla F(x,y) = \begin{bmatrix} 2xy - b - 1 & x^2 \\ b - 2xy & -x^2 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \nabla F(a, b/a) = \begin{bmatrix} b-1 & a^2 \\ -b & -a^2 \end{bmatrix}.$$

Il determinante è a^2, quindi sempre positivo, e la traccia è $b - 1 - a^2$. Quindi per $b < 1 + a^2$ la posizione è esponenzialmente stabile, mentre per $b > 1 + a^2$ la posizione è instabile. Essendo il sistema del secondo ordine, possiamo anche classificare la posizione mediante il Teorema $\tau - \delta$ quando la posizione è iperbolica:

- si ha un nodo per $\tau^2 \geqslant 4\delta$, ovvero

$$(b - 1 - a^2)^2 \geqslant 4a^2 \quad \Rightarrow \quad |b - 1 - a^2| \geqslant 2a \quad \Rightarrow \quad b \leqslant (1-a)^2 \ \vee \ b \geqslant (1+a)^2;$$

- si ha un fuoco per $\tau^2 \geqslant 4\delta$, ovvero

$$(1-a)^2 < b < (1+a)^2.$$

2. La matrice del sistema lineare è data da

$$\begin{bmatrix} k+5 & 6 \\ -3 & k-4 \end{bmatrix}$$

e gli autovalori sono $k - 1, k + 2$. Quindi per $k \neq -2, 1$ c'è solo la posizione nulla e:

- per $k < -2$ è un nodo stabile;
- per $-2 < k < 1$ è una sella (quindi instabile);
- per $k > 1$ è un nodo instabile.

Per $k = 1$ ci sono infinite posizioni di equilibrio, tutte instabili, mentre per $k = -2$ ci sono infinite posizioni di equilibrio, tutte stabili semplicemente.

3. Per trovare i punti di equilibrio risolvo l'equazione dei punti fissi

$$x + \frac{d}{e^x} - 2 = x \quad \Rightarrow \quad e^x = \frac{d}{2} \quad \Rightarrow \quad x = \ln\frac{d}{2}$$

che è accettabile per $d > 0$. Quindi abbiamo una sola posizione di equilibrio nel caso $d > 0$ e nessuna per $d \leqslant 0$.
Ora calcoliamo la derivata:

$$f'(x) = 1 - \frac{d}{e^x} \quad \Rightarrow \quad f'\Big(\ln\frac{d}{2}\Big) = 1 - 2 = -1$$

e quindi non si può usare la linearizzazione. Essendo il sistema unidimensionale, calcoliamo

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{d}{e^x} \quad \Rightarrow \quad f''\Big(\ln\frac{d}{2}\Big) = 2, \\ f'''(x) &= -\frac{d}{e^x} \quad \Rightarrow \quad f'''\Big(\ln\frac{d}{2}\Big) = -2, \end{aligned}$$

quindi

$$2f'''(\overline{x}) + 3f''(\overline{x})^2 = -4 + 12 > 0$$

e la posizione è asintoticamente stabile per ogni $d > 0$.
Nel caso $d = 0$ il sistema dinamico diventa semplicmente

$$x_{h+1} = x_h - 2$$

che non ha punti fissi. Cerchiamo i 2-cicli:

$$f^2(x) = x - 2 - 2 = x - 4 \quad \Rightarrow \quad x - 4 = x \quad \Rightarrow \quad \nexists x$$

quindi non esistono 2-cicli.

12/7/19

2) $\begin{cases} y-x^2=0 \\ -x^2-y^2+2=0 \end{cases}$

$y=x^2 \qquad -x^2-x^4+2=0$

$x^4+x^2-2=0 \qquad x^2_{1/2}=\frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{2}= \begin{cases} -2 \\ 1 \end{cases}$

$x^2=-2$ N.A.

$x^2=1 \quad x=\pm 1 \quad y=x^2=1$

2 pos. eq: $(\pm 1, 1)$

Linearizzo:

$$\nabla f = \begin{bmatrix} -2x & 1 \\ -2x & -2y \end{bmatrix}$$

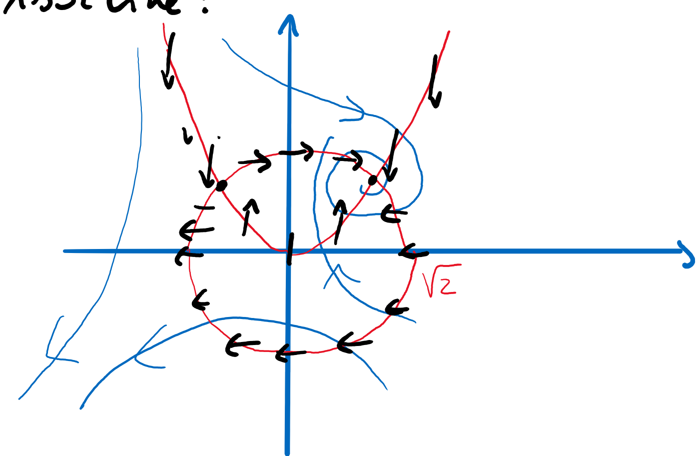
$$\nabla f(-1,1)= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$$

det <0 INSTAB. (SELLA)

$$\nabla f(1,1) = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$$

tr <0, det >0 AS. STABILE ESP.

isocline:



12/7/19

n. 3

$$\begin{cases} \dot{x} = x(1-\ln y) \\ \dot{y} = y(2+\ln x - k\ln y) \end{cases}$$

$x, y > 0$

$$\begin{cases} \ln y = 1 & y = e \\ 2+\ln x - k\ln y = 0 & \ln x = k-2 \\ & x = e^{k-2} \end{cases}$$

(e^{k-2}, e)

$$Df = \begin{bmatrix} 1-\ln y & -\frac{x}{y} \\ \frac{y}{x} & 2+\ln x - k\ln y - k \end{bmatrix}$$

$$Df(e^{k-2}, e) = \begin{bmatrix} 0 & -e^{k-3} \\ e^{3-k} & \cancel{2}+\cancel{k}-\cancel{2}-\cancel{k}-k \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -e^{k-3} \\ e^{3-k} & -k \end{bmatrix}$$

$k<0 \Rightarrow \mathrm{tr}>0$ INSTABILE

$k>0 \Rightarrow \mathrm{tr}<0$, $\det>0$ AS. STAB. ESP.

$k=0$ conviene fare il cambio di variabili di Goursat:

$\xi = \ln x, \quad \eta = \ln y$

$$\begin{cases} \dot{\xi} = 1-\eta \\ \dot{\eta} = 2+\xi-\cancel{k\eta} \end{cases}$$ $k=0$

sist. lineare!

pos. eq. $(\xi=-2, \eta=1)$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

<u>CENTRO</u>

per $k=2$:
$$\begin{cases} \dot{\xi} = 1-\eta \\ \dot{\eta} = 2+\xi-2\eta \end{cases}$$

$\ddot{\eta} = \dot{\xi} - 2\dot{\eta} = 1-\eta-2\dot{\eta}$

$\ddot{\eta}+2\dot{\eta}+\eta = 1$ e si risolve (ODE lineare)

$\lambda=-1$ 2 volte

$\Rightarrow \tilde{\eta}(t) = c_1 e^{-t} + c_2 t e^{-t}$

sol. partic.: $\bar{\eta} = \text{cost} = 1$

$\eta(t) = c_1 e^{-t} + c_2 t e^{-t} + 1$

$\xi(t) = \dot{\eta} + 2\eta - 2 =$

$= -c_1 e^{-t} + c_2 e^{-t} - c_2 t e^{-t} + 2c_1 e^{-t} + 2c_2 t e^{-t} + \cancel{2} - \cancel{2}$

$= c_1 e^{-t} + c_2 e^{-t} + c_2 t e^{-t}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x(t) = e^{\xi(t)} & x(0) = e^{\xi(0)} = 1 \\ y(t) = e^{\eta(t)} & y(0) = e^{\eta(0)} = 1 \end{cases}$$

$\Rightarrow \xi(0) = 0 \quad c_1 = -1$

$\eta(0) = 0 \quad c_2 = 1$

$\square$

6/9/19

n. 3

$$\begin{cases} \dot{x} = x(-\ln x + \ln y) \\ \dot{y} = y(4\ln x - \ln y) \end{cases} \qquad x, y > 0$$

$\xi = \ln x \qquad \eta = \ln y$

$$\begin{cases} \dot{\xi} = -\xi + \eta \\ \dot{\eta} = 4\xi - \eta \end{cases} \qquad \begin{cases} -\xi + \eta = 0 \\ 4\xi - \eta = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow \quad \xi = 0, \quad \eta = 0$

$\Rightarrow \quad x = 1, \quad y = 1$

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$$

$(-1-\lambda)^2 = 4 \qquad \lambda + 1 = \pm 2 \qquad \lambda = \begin{cases} +1 \\ -3 \end{cases}$

$(0,0)$ INSTABILE (SELLA)

$$\ddot{\xi} = -\dot{\xi} + \dot{\eta} = -\dot{\xi} + 4\xi - (\dot{\xi} + \xi)$$
$$= -2\dot{\xi} + 3\xi$$

$\ddot{\xi} + 2\dot{\xi} - 3\xi = 0 \qquad \lambda = -1 \pm \sqrt{1+3} = \begin{cases} +1 \\ -3 \end{cases}$

$\xi(t) = c_1 e^{t} + c_2 e^{-3t}$

$\eta(t) = \dot{\xi} + \xi = c_1 e^{t} - 3c_2 e^{-3t} + c_1 e^{t} + c_2 e^{-3t}$

$= 2c_1 e^{t} - 2c_2 e^{-3t}$

$x(0) = x_0 \Rightarrow \xi(0) = \ln x_0$

$y(0) = y_0 \Rightarrow \eta(0) = \ln y_0$

$\Rightarrow$ si trovano c_1, c_2 $\square$

17/1/20

n. 2

$$\begin{cases} x(1-x)(x-2) - y = 0 \\ x - 4y = 0 \qquad y = \frac{x}{4} \end{cases}$$

$$-3 \cdot \frac{9}{4} + \cancel{6}^{3} \cdot \frac{3}{\cancel{2}} - 2$$

$$= -\frac{27}{4} + 7$$

$$= \frac{-27+28}{4} = \frac{1}{4}$$

$$x(1-x)(x-2) = \frac{x}{4}$$

$$x = 0, \qquad (1-x)(x-2) = \frac{1}{4}$$

$$x^2 - 3x + \frac{9}{4} = 0 \qquad x = \frac{3}{2}$$

$$(0,0) \qquad \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{8}\right)$$

$$\nabla f = \begin{bmatrix} -3x^2+6x-2 & -1 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\nabla f(0,0) = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} tr < 0 \\ \det > 0 \end{matrix}$$

A.S. ESP. STABILE

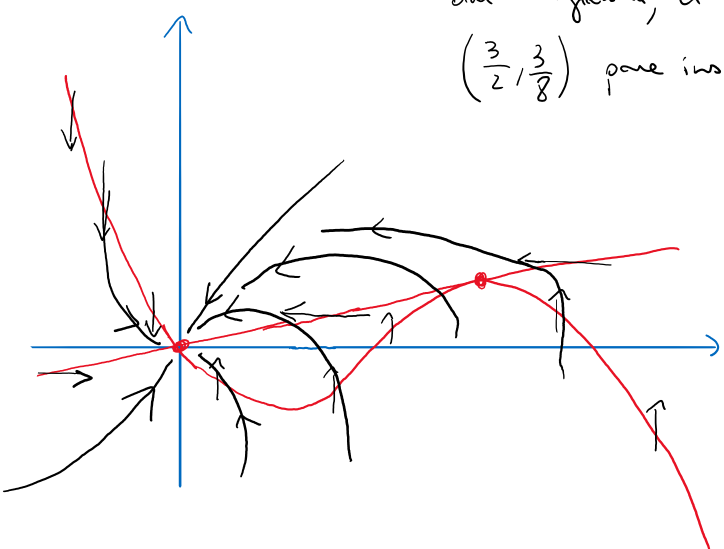
$$\nabla f\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{8}\right) = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & -1 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \det = 0 \\ tr < 0 \end{matrix}$$

1 autov. nullo, 1 negativo

$\Rightarrow$ la linearizz. non funziona!

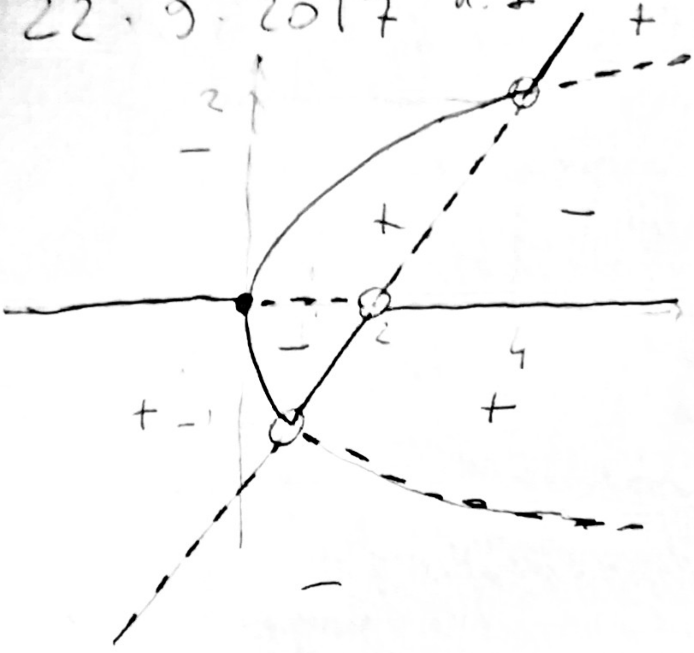
Isocline:

dal diagramma, la posizione $\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{8}\right)$ pare instabile.

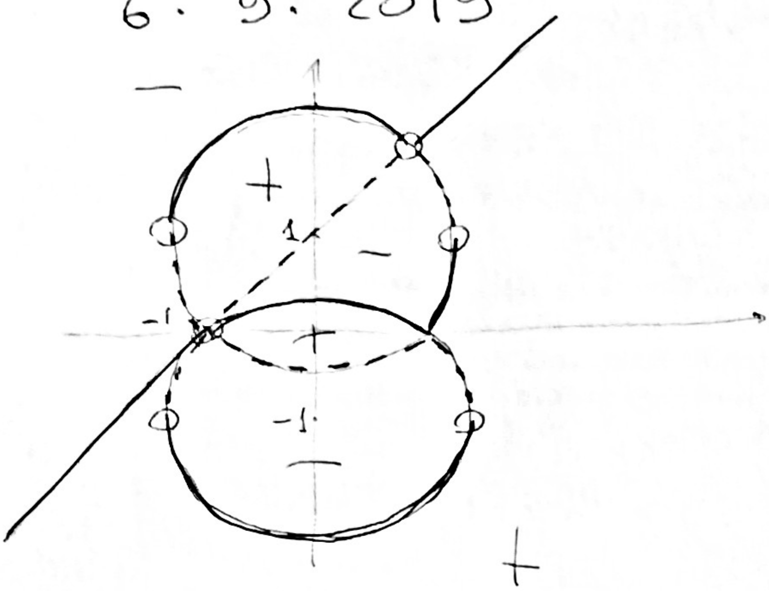


$\square$

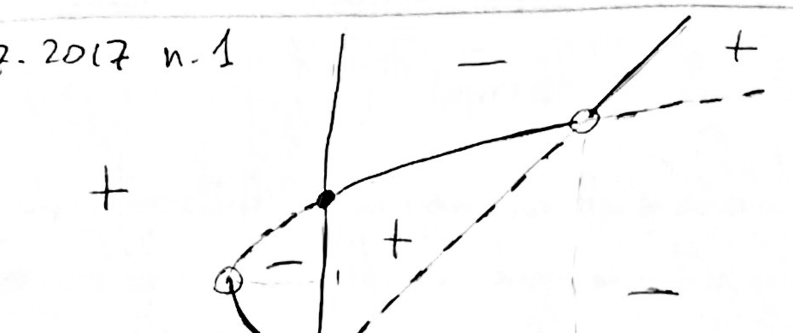
22 · 9 · 2017 n.1



6 · 9 · 2019 n.1



14 · 7 · 2017 n.1



1.6.18 n. 4

$$\begin{cases} \alpha(x^2-y^2)=x \\ \beta x y = y \end{cases}$$

$\beta x y = y \;\to\; y=0 \;\to\; \alpha x^2 = x \;\to\; x=0 \;\text{ or }\; x=\frac{1}{\alpha}$

$\beta x y = y \;\to\; x=\frac{1}{\beta} \;\to\; \frac{1}{\beta^2}-y^2=\frac{1}{\alpha\beta} \qquad y^2=\frac{1}{\beta}\left(\frac{1}{\beta}-\frac{1}{\alpha}\right)$

$$\left.\begin{array}{l} \beta>0 \;\Rightarrow\; \frac{1}{\beta}>\frac{1}{\alpha} \\ \\ \beta<0 \;\Rightarrow\; \frac{1}{\beta}<\frac{1}{\alpha} \end{array}\right\} \quad y=\pm\sqrt{\frac{1}{\beta}\left(\frac{1}{\beta}-\frac{1}{\alpha}\right)}$$

Quindi: POS. EQ.

$$(0,0) \qquad \left(\frac{1}{\alpha},0\right) \qquad \underbrace{\left(\frac{1}{\beta},\pm\sqrt{\frac{1}{\beta}\left(\frac{1}{\beta}-\frac{1}{\alpha}\right)}\right)}$$

solo per $\beta>0,\ \frac{1}{\beta}>\frac{1}{\alpha}$
o per $\beta<0,\ \frac{1}{\beta}<\frac{1}{\alpha}$

Stabilità

$$\begin{bmatrix} 2\alpha x & -2\alpha y \\ \beta y & \beta x \end{bmatrix}$$

$(0,0)$: $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ STABILE ASINT

$\left(\frac{1}{\alpha}, 0\right)$: $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{\beta}{\alpha} \end{bmatrix}$ INSTABILE

$\left(\frac{1}{\beta}, \pm\sqrt{\ }\right)$: $A = \begin{bmatrix} \frac{2\alpha}{\beta} & -2\alpha\left(\pm\sqrt{\ }\right) \\ \beta\left(\pm\sqrt{\ }\right) & 1 \end{bmatrix}$

$$\det A = \frac{2\alpha}{\beta} + 2\alpha\beta\left(\frac{1}{\beta}\left(\frac{1}{\beta} - \frac{1}{\alpha}\right)\right) = 4\frac{\alpha}{\beta} - 2$$

$$\operatorname{tr} A = \frac{2\alpha}{\beta} + 1$$

si impone $\left|\frac{2\alpha}{\beta} + 1\right| < 1 + \det A < 2$

Per $0 < \alpha \leq 2$ la posizione $(0,0)$ è ASINT. STABILE, e si ha

$$\left(\frac{1}{2}, 0\right) \to \left(\frac{\alpha}{4}, 0\right) \to \left(\frac{\alpha^3}{16}, 0\right) \cdots \longrightarrow (0,0).$$

$\square$

8.9.2017 n. 4

$$2x^2-4kx+k+2k^2=x$$

$$2x^2-(1+4k)x+k(1+2k)=0$$

$$\bar{x}=k\,,\qquad \bar{x}=k+\frac{1}{2}$$

$$f'(x)=4x-4k$$

$$f'(k)=0 \qquad \bar{x}=k \text{ ASINT. STABILE}$$

$$f'\left(k+\frac{1}{2}\right)=\cancel{4k}+2-\cancel{4k} \qquad \bar{x}=k+\frac{1}{2} \text{ INSTABILE}$$

$k=1$: $\quad f(x)=2x^2-4x+3$

$$f^2(x)=2(2x^2-4x+3)^2-4(2x^2-4x+3)+3$$

$$=8x^4-32x^3+48x^2-32x+9=x$$

Conosco la soluzione $\bar{x}=1$, scompongo

$$8x^4-32x^3+48x^2-33x+9=0$$

e anche la soluzione $\bar{x}=\frac{3}{2}$

$$\Rightarrow (x-1)\left(x-\frac{3}{2}\right)\cdot 2\underbrace{(4x^2-6x+3)}_{\Delta<0}$$

NO 2-cicli. $\square$

9-6-17 n. 4

~~$0 \times 0 \pm$~~

Soluz. $(0,0)$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ k & 1 \end{bmatrix} \qquad \lambda = \pm\sqrt{k+1}$$

Se $k \geq -1$ $\quad \lambda = \pm\sqrt{k+1}$

$$|\lambda| = \sqrt{k+1} < 1 \Rightarrow k+1<1 \Rightarrow k<0$$

$$-1 \leq k < 0 \quad (0,0) \text{ ASINT. STABILE}$$

Se $k<-1$ $\quad \lambda = \pm i\sqrt{-k-1}$

$$|\lambda| = \sqrt{-k-1} < 1 \qquad -k-1<1$$

$$k>2 \quad \text{IMPOSS.}$$

$\Rightarrow$ Se $k<-1$ INSTABILE $(0,0)$

$k=0$ $\quad \begin{cases} x_{n+1} = y_n - x_n \\ y_{n+1} = y_n \end{cases}$

La y è costante. Esistono orbite limitate, ad. es. la pos. eq. $(0,0)$, oppure i 2-cicli $(\pm\bar{x}, 0)$. $\square$

2-9-2016 n. 4

$$\frac{1}{4}(1-x)+x^2 = x \qquad \bar{x}=1$$
$$\bar{x}=\frac{1}{4}$$

$$f'(x) = 2x-\frac{1}{4}$$

$$f'(1) = \frac{7}{4} \qquad \bar{x}=1 \quad \text{INSTABILE}$$

$$f'\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4} \qquad \bar{x}=\frac{1}{4} \quad \text{ASINT. STABILE}$$

Ragnatela: $x_0=0$ va subito in $\bar{x}=\frac{1}{4}$

$x_0=\frac{1}{2}$ decresce verso $\bar{x}=\frac{1}{4}$

$x_0=\frac{6}{5}$ diverge a $+\infty$

$\square$