Risoluzione della prova di Sistemi Dinamici del 26 giugno 2020

1. Essendo un modello di tipo Gomatam, conviene effettuare il cambio di variabili

$$\xi = \ln x, \quad \eta = \ln y,$$

ottenendo il sistema lineare

$$\begin{cases} \dot{\xi} = (k-4)\xi - 2\eta \\ \dot{\eta} = 5\xi + (k+2)\eta. \end{cases}$$

La matrice del sistema è

$$\begin{bmatrix} k-4 & -2 \\ 5 & k+2 \end{bmatrix}$$

che ha autovalori complessi coniugati $\lambda_{1,2} = k - 1 \pm i$. Quindi si ha sempre una sola soluzione di equilibrio $\xi = 0, \eta = 0$ (che corrisponde a $x = 1, y = 1$) e:

- per $k < 1$ è asintoticamente stabile (fuoco);
- per $k > 1$ è instabile (fuoco);
- per $k = 1$ è stabile semplicemente (centro).

Nel caso $k = 2$ il sistema lineare si scrive

$$\begin{cases} \dot{\xi} = -2\xi - 2\eta \\ \dot{\eta} = 5\xi + 4\eta \end{cases}$$

e derivando la prima equazione si ottiene

$$\ddot{\xi} = -2\dot{\xi} - 2\dot{\eta} = -2\dot{\xi} - 10\xi - 8\eta = -2\dot{\xi} - 10\xi + 4(\dot{\xi} + 2\xi) = 2\dot{\xi} - 2\xi.$$

L'equazione lineare del secondo ordine $\ddot{\xi} - 2\dot{\xi} + 2\xi = 0$ ha come polinomio caratteristico $\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$ le cui radici sono

$$\lambda_{1,2} = 1 \pm i$$

e quindi le soluzioni dell'equazione si scrivono

$$\xi(t) = e^t(c_1 \cos t + c_2 \sin t).$$

Poiché $\eta = -\frac{1}{2}\dot{\xi} - \xi$, si ottiene anche

$$\begin{aligned} \eta(t) =& -\frac{1}{2}e^t(c_1 \cos t + c_2 \sin t - c_1 \sin t + c_2 \cos t) - e^t(c_1 \cos t + c_2 \sin t) \\ =& \frac{1}{2}e^t\left((-3c_1 - c_2)\cos t + (c_1 - 3c_2)\sin t\right). \end{aligned}$$

La soluzione del sistema di partenza quindi si scrive

$$x(t) = e^{\xi(t)}, \qquad y(t) = e^{\eta(t)}.$$

2. Cerchiamo i punti fissi della funzione $f(x) = \frac{x}{x^2+d}$ al variare di $d \in \mathbb{R}$: si ha

$$\frac{x}{x^2 + d} = x \quad \Rightarrow \quad x = 0 \ \vee \ x^2 + d = 1.$$

Quindi c'è sempre la posizione $x = 0$ e, se $d < 1$, anche le posizioni $x = \pm\sqrt{1-d}$.
Per la stabilità usiamo la linearizzazione:

$$f'(x) = \frac{d - x^2}{(x^2 + d)^2}$$

da cui:

- 0 è asintoticamente stabile per $|f'(0)| < 1$, cioè per $-1 < d < 1$, e instabile per $d < 1 \vee d > 1$;
- $\pm\sqrt{1-d}$ sono asintoticamente stabili per $|2d - 1| < 1$, cioè (tenendo conto della condizione di esistenza) per $0 < d < 1$, e instabili per $d < 0$;
- nel caso $d = -1$ si ha $f'(0) = -1$, $f''(0) = 0$ e $f'''(0) = -6 < 0$, quindi $2f'''(0) + 3f''(0)^2 < 0$ e 0 è instabile;
- nel caso $d = 1$ si ha $f'(0) = 1$, $f''(0) = 0$ e $f'''(0) = -6 < 0$, quindi 0 è asintoticamente stabile;
- nel caso $d = 0$ si ha $f'(\pm\sqrt{1-d}) = -1$, $f''(\pm\sqrt{1-d}) = 2$ e $f'''(\pm\sqrt{1-d}) = -6 < 0$, quindi $2f''' + 3f''^2 = 0$ e non possiamo dire niente.

Nel caso $d = -2$ si ha

$$f(x) = \frac{x}{x^2 - 2} \quad \Rightarrow \quad f(f(x)) = \frac{x(2 - x^2)}{2x^4 - 9x^2 + 8}$$

e risolvendo $f(f(x)) = x$ si ottengono le soluzioni

$$x = 0, \quad x = \pm 1, \quad x = \pm\sqrt{3}.$$

La soluzione $x = 0$ è da scartare perché è di equilibrio; le altre danno luogo a due 2-cicli.

3. L'unica posizione di equilibrio è $(0, 0, 0)$. Moltiplicando la prima equazione per x, la seconda per y e la terza per z^3, troviamo che la funzione

$$W(x, y, z) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{4}z^4$$

ha un minimo stretto nella posizione di equilibrio e

$$\dot{W} = x\dot{x} + y\dot{y} + z^3\dot{z} = -x\sin x + xz^3 - xy^2 + xy^2 - xz^3 - z^6 = -x\sin x - z^6 \leqslant 0$$

quindi la posizione è stabile. Cerchiamo ora se ci sono delle traiettorie contenute nell'insieme $\{\dot{W} = 0\}$: in un intorno di $(0, 0, 0)$ si ha

$$\{\dot{W} = 0\} = (0, y, 0) \quad \Rightarrow \quad x \equiv 0, \quad z \equiv 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{y} \equiv 0 \quad \Rightarrow \quad y \equiv \text{cost.}$$

e dalla prima equazione risulta $y \equiv 0$, quindi la soluzione $(0, 0, 0)$ è l'unica orbita completa contenuta in $\{\dot{W} = 0\}$: la posizione è asintoticamente stabile.