Prova scritta di Sistemi Dinamici
Appello del 6 giugno 2014

1. Data la famiglia di equazioni differenziali

$$\dot{x} = \mu x(\mu - x)(\mu^2 - x^2 - 1)$$

si chiede di studiarne la stabilità delle posizioni di equilibrio al variare del parametro $\mu \in \mathbb{R}$ e di tracciarne il diagramma di biforcazione.

2. Discutere la stabilità di tutte le soluzioni del sistema lineare

$$\begin{cases} \dot{x} = \mu(\mu - 1)x \\ \dot{y} = \mu x - y + z \\ \dot{z} = x + (\mu - 1)y + \mu z \end{cases}$$

al variare del parametro $\mu \in \mathbb{R}$.

3. Dato il sistema dinamico discreto unidimensionale definito da

$$x_{h+1} = x_h^2 - k$$

se ne trovino i punti di equilibrio e si discuta la loro stabilità al variare di $k \in \mathbb{R}$.

Nel caso $k = 2$ si trovi poi il ciclo di ordine 2 e si calcoli il valore di

$$\lim_{h \to \infty} x_h$$

per $x_0 = 3$.

4. In un modello competitivo di dinamica di due popolazioni x e y, il tasso di crescita della specie x segue la legge $5 - 6x - 6y$, mentre quello della specie y segue la legge $2 - 3x - 2y$.

Si chiede di:

- trovare le posizioni di equilibrio e studiarne la stabilità;
- risolvere il sistema linearizzato attorno a una posizione di equilibrio stabile con condizioni iniziali $X(0) = 0$, $Y(0) = 2$.

Prova scritta di Sistemi Dinamici
Appello del 26 giugno 2014

1. Data la famiglia di equazioni differenziali

$$\dot{x} = \mu^2(x - 2\mu)(x^2 + 4\mu^2 - 4)$$

si chiede di studiarne la stabilità delle posizioni di equilibrio al variare del parametro $\mu \in \mathbb{R}$ e di tracciarne il diagramma di biforcazione.

2. Discutere la stabilità di tutte le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = x + (2 - \mu)y + \mu z \\ \dot{y} = -x + \mu y \\ \dot{z} = 3z \end{cases}$$

al variare del parametro $\mu \in \mathbb{R}$.

3. Dato il sistema dinamico **discreto** di tipo preda-predatore definito da

$$\begin{cases} x_{h+1} = x_h(2 - y_h) \\ y_{h+1} = y_h \left(\dfrac{3}{2} - 2y_h + x_h \right) \end{cases}$$

se ne trovino i punti di equilibrio biologicamente accettabili e se ne studi la stabilità.

4. In un modello competitivo di dinamica di due popolazioni x e y di tipo Gomatam, il tasso di crescita della specie x segue la legge $2 - 2\ln x - k \ln y$, mentre quello della specie y segue la legge $1 - 2\ln xy$.

   Si chiede di:

   - trovare le posizioni di equilibrio e studiarne la stabilità al variare di $k \in \mathbb{R}$;
   - risolvere il sistema nel caso $k = 8$ con condizioni iniziali $x(0) = 1$, $y(0) = 1$.

Prova scritta di Sistemi Dinamici
Appello del 18 luglio 2014

1. Data la famiglia a un parametro di equazioni differenziali

$$\dot{x} = (x + 1 - e^{\mu})(x - \mu)(x + \mu^2 - \mu)$$

si studi la stabilità delle posizioni di equilibrio al variare di $\mu \in \mathbb{R}$ e si tracci il relativo diagramma di biforcazione.

2. Dato il sistema di equazioni differenziali

$$\begin{cases} \dot{x} = -\log(1 + y) \\ \dot{y} = x - y^3 \end{cases}$$

si studi la stabilità della posizione di equilibrio.

3. Dato il sistema dinamico discreto bidimensionale lineare

$$\begin{cases} x_{h+1} = (a - 2)x_h - 3y_h \\ y_{h+1} = x_h + (a + 3/2)y_h \end{cases}$$

se ne trovino i punti di equilibrio e se ne studi la stabilità al variare di $a \in \mathbb{R}$.

Nel caso $a = 1/2$, $x_0 = 1$, $y_0 = 2$, si trovi poi

$$\lim_{h\to\infty} x_h, \qquad \lim_{h\to\infty} y_h.$$

4. In un modello economico il prodotto interno lordo segue la legge

$$k\ddot{Y}(t) - (2 - k)\dot{Y}(t) + Y(t) = 3.$$

Si studi al variare di $k \in \mathbb{R}$ la stabilità delle soluzioni del sistema del primo ordine corrispondente.

Si trovi poi la soluzione nel caso $k = 8$ imponendo $Y(0) = 1$ e $\dot{Y}(0) = 0$.

Prova scritta di Sistemi Dinamici
Appello del 9 settembre 2014

1. Data la famiglia di equazioni differenziali

$$\dot{x} = \mu(2x - \mu)(\mu^2 - x^2 - 1)$$

si chiede di studiarne la stabilità delle posizioni di equilibrio al variare del parametro $\mu \in \mathbb{R}$ e di tracciarne il diagramma di biforcazione.

2. Studiare la stabilità della soluzione nulla del sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = -2x + y^3 \\ \dot{y} = -x - \sin z \\ \dot{z} = -z + y^3. \end{cases}$$

3. Dato il sistema dinamico discreto bidimensionale lineare

$$\begin{cases} x_{h+1} = (a+1)x_h + y_h \\ y_{h+1} = ax_h + 2ay_h \end{cases}$$

se ne trovino i punti di equilibrio e se ne studi la stabilità al variare di $a \in \mathbb{R}$.

Nel caso $a = 1$, $x_0 = 1$, $y_0 = 2$, si trovi poi

$$\lim_{h\to\infty} x_h, \qquad \lim_{h\to\infty} y_h.$$

4. In un modello economico il prodotto interno lordo segue la legge

$$\ddot{Y}(t) + (3 - k)\dot{Y}(t) - 3kY(t) = 0.$$

Si studi al variare di $k \in \mathbb{R}$ la stabilità delle soluzioni del sistema del primo ordine corrispondente.

Si trovi poi la soluzione nel caso $k = -3$ imponendo $Y(0) = 1$ e $\dot{Y}(0) = 0$.

Prova scritta di Sistemi Dinamici
Appello del 25 settembre 2014

1. Data la famiglia di equazioni differenziali

$$\dot{x} = (x - \sin\mu)(2x - \mu)$$

si chiede di studiarne la stabilità delle posizioni di equilibrio al variare del parametro $\mu \in \mathbb{R}$ e di tracciarne il diagramma di biforcazione.

2. Studiare la stabilità della soluzione di equilibrio del sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = -\sin x - y \\ \dot{y} = \pi - x \end{cases}$$

3. Dato il sistema dinamico discreto bidimensionale lineare

$$\begin{cases} x_{h+1} = a x_h + y_h \\ y_{h+1} = (a-1)x_h + 2(a-1)y_h \end{cases}$$

se ne trovino i punti di equilibrio e se ne studi la stabilità al variare di $a \in \mathbb{R}$.

Nel caso $a = 2$, $x_0 = 1$, $y_0 = 2$, si trovi poi

$$\lim_{h\to\infty} x_h, \qquad \lim_{h\to\infty} y_h.$$

4. In un modello economico il prodotto interno lordo segue la legge

$$\ddot{Y}(t) - 3k\dot{Y}(t) + 2k^2 Y(t) = 0.$$

Si studi al variare di $k \in \mathbb{R}$ la stabilità delle soluzioni del sistema del primo ordine corrispondente.

Si trovi poi la soluzione nel caso $k = 1$ imponendo $Y(0) = 1$ e $\dot{Y}(0) = 0$.

Prova scritta di Sistemi Dinamici
Appello del 5 giugno 2015

1. Il prezzo di un bene distribuito sull'intervallo $[0, +\infty[$ segue l'equazione di evoluzione

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{1}{x+1}\frac{\partial P}{\partial x} = t$$

con dato iniziale $P(0, x) = \cos x$ $(x \geq 0)$. Trovare l'espressione della funzione P.

2. Discutere la stabilità della soluzione di equilibrio del sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = -(x+y)^3 \\ \dot{y} = -x - 2y \end{cases}$$

3. Discutere la stabilità della soluzione di equilibrio del sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = \mu x \\ \dot{y} = x + \mu y - 2z \\ \dot{z} = -\mu x + y + z \end{cases}$$

al variare del parametro $\mu \in \mathbb{R}$.

4. Dato il sistema dinamico discreto unidimensionale

$$x_{h+1} = \alpha^2 + x_h - x_h^2$$

se ne trovino al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ i punti di equilibrio e se ne studi la stabilità.
Nel caso $\alpha = 2$ si studi poi l'esistenza e la stabilità di un 2-ciclo.

Prova scritta di Sistemi Dinamici
Appello del 26 giugno 2015

1. Una popolazione batterica dipendente dal parametro continuo x (concentrazione di un gene) evolve secondo l'equazione del primo ordine

$$\frac{\partial u}{\partial t} + xt\frac{\partial u}{\partial x} = f'(t)$$

dove la forzante esterna $f' > 0$ è la derivata di una funzione regolare f. Sapendo che $u(0, x) = e^{-x}$, si chiede di esprimere $u(t, x)$ e $\lim_{t\to+\infty} u(t, x)$ in funzione di f.

2. Studiare la stabilità della soluzione nulla del sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + y \\ \dot{y} = -\sin^3 x. \end{cases}$$

3. I prezzi P_1 e P_2 di due beni in concorrenza sul mercato seguono la legge

$$\begin{cases} \dot{P}_1 = -P_1 + k^2 P_2 \\ \dot{P}_2 = 2P_1 - kP_2 \end{cases}$$

dove k è un parametro reale. Si trovino le posizioni di equilibrio del mercato e se ne discuta la stabilità al variare del parametro.

4. Dato il sistema dinamico discreto bidimensionale

$$\begin{cases} x_{h+1} = y_h^2 - x_h^2 \\ y_{h+1} = 2x_h y_h \end{cases}$$

se ne trovino i punti di equilibrio e se ne studi la stabilità.

Si imposti poi il conto per verificare l'esistenza di un 2-ciclo e si provi a mostrare che il sistema non ne ammette.

Prova scritta di Sistemi Dinamici
Appello dell'11 settembre 2015

1. Si trovi la soluzione dell'equazione

$$\frac{\partial P}{\partial t} + x\frac{\partial P}{\partial x} = P$$

con dato iniziale $P(0, x) = 1/x$ $(x > 0)$.

2. Discutere la stabilità della soluzione nulla di

$$\begin{cases} \dot{x} = z^2 \\ \dot{y} = -y \\ \dot{z} = -zx. \end{cases}$$

Cosa si può dire sulla stabilità delle altre soluzioni di equilibrio?

3. Due prezzi P_1, P_2 seguono la legge di evoluzione

$$\begin{cases} \dot{P}_1 = P_1(k - P_2) \\ \dot{P}_2 = P_2(P_1 - k). \end{cases}$$

Si trovino le posizioni di equilibrio del sistema dinamico e se ne discuta la stabilità al variare del parametro k.

Nel caso $k = 1$ si trovi poi il periodo delle soluzioni del sistema linearizzato attorno alla posizione di equilibrio stabile.

4. Dato il sistema dinamico discreto unidimensionale

$$x_{h+1} = \sqrt{\alpha x_h + \beta} \quad \text{per } x \geq 0$$

se ne trovino i punti di equilibrio e se ne studi la stabilità al variare di $\alpha, \beta \geq 0$.

Si studi poi il valore dell'espressione

$$\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{\ldots}}}}$$

Prova scritta di Sistemi Dinamici
Appello del 12 febbraio 2016

1. Il prodotto interno lordo u di uno stato segue l'equazione del primo ordine

$$(t^2+1)\frac{\partial u}{\partial t} + x\frac{\partial u}{\partial x} = t$$

e vale $u(0, x) = x + 1$ all'istante iniziale. Determinare $u(t, x)$.

2. Discutere la stabilità della soluzione nulla del sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = -x^3 + y\sin^2 y \\ \dot{y} = -x - \sin y \end{cases}$$

3. I prezzi P_1 e P_2 di due beni in concorrenza sul mercato seguono la legge

$$\begin{cases} \dot{P}_1 = P_1(4 - 2P_2) \\ \dot{P}_2 = P_2(3P_1 - 6) \end{cases}$$

Si trovino le posizioni di equilibrio del mercato e se ne discuta la stabilità.

4. Dato il sistema dinamico discreto unidimensionale

$$x_{h+1} = 1 + \frac{k}{x_h} \quad \text{per } x_h \neq 0$$

se ne trovino i punti di equilibrio e se ne studi la stabilità al variare di $k \in \mathbb{R}$.
Si studi poi il valore dell'espressione

$$\lim_{h\to\infty} x_h$$

nel caso $k = 1$, $x_0 = 1$.

Prova scritta di Sistemi Dinamici
Appello del 10 giugno 2016

1. Data la famiglia di equazioni differenziali

$$\dot{x} = x(\mu^2 - x^2)(\mu + \sqrt{1 + x^2})$$

si chiede di studiarne la stabilità delle posizioni di equilibrio al variare del parametro $\mu \in \mathbb{R}$ e di tracciarne il diagramma di biforcazione.

2. Discutere la stabilità della soluzione nulla del sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = -x^3 + hy^2 \\ \dot{y} = -2xy + ky \end{cases}$$

al variare di $h, k \in \mathbb{R}$.

3. Un sistema di FitzHugh-Nagumo si presenta nella forma

$$\begin{cases} \dot{x} = x(x-1)(2-x) - y \\ \dot{y} = x - 4y \end{cases}$$

Si trovino le posizioni di equilibrio del sistema e se ne discuta la stabilità.

Si tracci poi il diagramma delle nullcline.

4. Dato il sistema dinamico discreto unidimensionale

$$x_{h+1} = 2\sqrt{x - x^2}$$

definito su $[0; 1]$ se ne trovino i punti di equilibrio e se ne studi la stabilità.

Si trovi poi l'unico 2-ciclo esistente.

Prova scritta di Sistemi Dinamici
Appello del 2 settembre 2016

1. Data la famiglia di equazioni differenziali

$$\dot{x} = \mu x(\mu^2 - x^2)(\mu^2 + x^2 - 1)$$

si chiede di studiarne la stabilità delle posizioni di equilibrio al variare del parametro $\mu \in \mathbb{R}$ e di tracciarne il diagramma di biforcazione.

2. Discutere la stabilità della soluzione nulla del sistema lineare

$$\begin{cases} \dot{x} = 2kx + y - z \\ \dot{y} = x + 2ky + z \\ \dot{z} = kz \end{cases}$$

al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$.

3. Un sistema si presenta nella forma

$$\begin{cases} \dot{x} = x(6 - y) \\ \dot{y} = y(6x - 2) \end{cases}$$

Si trovino le posizioni di equilibrio del sistema e se ne discuta la stabilità.

4. Dato il sistema dinamico discreto unidimensionale

$$\begin{cases} x_{h+1} = \dfrac{1}{4}(1 - x_h) + x_h^2 \\ x_0 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

se ne trovino i punti di equilibrio e se ne studi la stabilità.

Si dica poi che cosa succede per $x_0 = 0$, $x_0 = 1/2$, $x_0 = 6/5$ mediante il diagramma della ragnatela.

Prova scritta di Sistemi Dinamici
Appello del 3 febbraio 2017

1. Data la famiglia di equazioni differenziali
$$\dot{x} = x(x^2 - \mu^2)(\mu + \sqrt{1 + x^2})$$
si chiede di studiarne la stabilità delle posizioni di equilibrio al variare del parametro $\mu \in \mathbb{R}$ e di tracciarne il diagramma di biforcazione.

2. Discutere la stabilità della soluzione di equilibrio del sistema
$$\begin{cases} \dot{x} = 2\mu x \\ \dot{y} = x + 2\mu y - 2z \\ \dot{z} = -2\mu x + y + z \end{cases}$$
al variare del parametro $\mu \in \mathbb{R}$.

3. Studiare la stabilità della soluzione nulla del sistema
$$\begin{cases} \dot{x} = -3x + y^3 \\ \dot{y} = -4y - x - \sin z \\ \dot{z} = -2z + y^3. \end{cases}$$

4. I prezzi P_1 e P_2 di due beni in concorrenza sul mercato seguono la legge
$$\begin{cases} \dot{P}_1 = P_1(6 - 3P_2) \\ \dot{P}_2 = P_2(2P_1 - 4) \end{cases}$$
Si trovino le posizioni di equilibrio del mercato e se ne discuta la stabilità.

5. Dato il sistema dinamico discreto unidimensionale definito da
$$x_{h+1} = x_h^2 + k$$
se ne trovino i punti di equilibrio e si discuta la loro stabilità al variare di $k \in \mathbb{R}$.
Nel caso $k = -2$ si trovi poi il ciclo di ordine 2 e si calcoli il valore di
$$\lim_{h \to \infty} x_h$$
per $x_0 = 3$.

Prova scritta di Sistemi Dinamici
Appello del 9 giugno 2017

1. Data la famiglia di equazioni differenziali

$$\dot{x} = \mu(x - \mu^2)(\mu - x^2)$$

si chiede di studiarne la stabilità delle posizioni di equilibrio al variare del parametro $\mu \in \mathbb{R}$ e di tracciarne il diagramma di biforcazione.

2. Studiare la stabilità della soluzione nulla del sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + z \\ \dot{y} = -y^3x^2 - y \\ \dot{z} = -x^2 \sin x - z^3. \end{cases}$$

3. Due popolazioni x e y si evolvono secondo il modello

$$\begin{cases} \dot{x} = x\,(-\log x + k \log y) \\ \dot{y} = y(k \log x - \log y) \end{cases}$$

dove k è un parametro reale. Si trovino le posizioni di equilibrio del modello e se ne discuta la stabilità al variare del parametro.

Che cosa succede per $k = \pm 1$?

4. Dato il sistema dinamico discreto bidimensionale

$$\begin{cases} x_{h+1} = y_h - x_h \\ y_{h+1} = kx_h + y_h \end{cases}$$

se ne trovino i punti di equilibrio e se ne studi la stabilità al variare di $k \in \mathbb{R}$.

Nel caso $k = 0$ si dica se esistono orbite limitate.

Prova scritta di Sistemi Dinamici
Appello del 30 giugno 2017

1. Data la famiglia di equazioni differenziali

$$\dot{x} = \mu(1 + \mu - |x|)(1 - \mu^2 - x^2)$$

si chiede di studiarne la stabilità delle posizioni di equilibrio al variare del parametro $\mu \in \mathbb{R}$ e di tracciarne il diagramma di biforcazione.

2. Studiare la stabilità della soluzione nulla del sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + y \\ \dot{y} = -x^3 + \log(1+z) \\ \dot{z} = -y - z^3. \end{cases}$$

Che cosa si può dire sulla stabilità asintotica?

3. Si discuta la stabilità delle posizioni di equilibrio e si classifichino le orbite del sistema lineare

$$\begin{cases} \dot{x} = 3(k+1)x + 2(k+3)y \\ \dot{y} = -(k+3)x - 6y \end{cases}$$

dove k è un parametro reale.

Che cosa succede nel caso $k = 0$?

4. Dato il sistema dinamico discreto unidimensionale

$$x_{h+1} = 2kx_h^2 - x_h$$

se ne trovino i punti di equilibrio e se ne studi la stabilità al variare di $k \in \mathbb{R}$.

Si dica poi per quali k il sistema ammette 2-cicli.

Prova scritta di Sistemi Dinamici
Appello del 14 luglio 2017

1. Data la famiglia di equazioni differenziali

$$\dot{x} = \mu(\mu - x^2 + 2x)(x - \mu)$$

si chiede di studiarne la stabilità delle posizioni di equilibrio al variare del parametro $\mu \in \mathbb{R}$ e di tracciarne il diagramma di biforcazione.

2. Studiare la stabilità della soluzione nulla del sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = -x^5 + \sin z \\ \dot{y} = -y^3 + \sin z \\ \dot{z} = -x - y - z. \end{cases}$$

3. I prezzi P_1 e P_2 di due beni seguono la legge

$$\begin{cases} \dot{P}_1 = P_1\,(2 - k \log P_2) \\ \dot{P}_2 = P_2(k \log P_1 - 1) \end{cases}$$

dove k è un parametro reale. Si trovino le posizioni di equilibrio del modello e se ne discuta la stabilità al variare del parametro.

4. Dato il sistema dinamico discreto unidimensionale

$$x_{h+1} = kx_h - x_h^3$$

se ne trovino i punti di equilibrio e se ne studi la stabilità al variare di $k \in \mathbb{R}$.

Nel caso $k = 1$ si dica se esistono orbite limitate.

Prova scritta di Sistemi Dinamici
Appello dell'8 settembre 2017

1. Data la famiglia di equazioni differenziali

$$\dot{x} = x(\mu^2 - x)(x - \mu - 2)$$

si chiede di studiarne la stabilità delle posizioni di equilibrio al variare del parametro $\mu \in \mathbb{R}$ e di tracciarne il diagramma di biforcazione.

2. Si calcoli la matrice esponenziale della matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}.$$

3. I prezzi P_1 e P_2 di due beni seguono la legge

$$\begin{cases} \dot{P}_1 = kP_1 - P_2 + 1 \\ \dot{P}_2 = (k-3)P_2 + 2P_1 + 1 \end{cases}$$

dove k è un parametro reale. Si trovino le posizioni di equilibrio del modello e se ne discuta la stabilità al variare del parametro.

4. Dato il sistema dinamico discreto unidimensionale

$$x_{h+1} = 2x_h^2 - 4kx_h + k + 2k^2$$

se ne trovino i punti di equilibrio e se ne studi la stabilità al variare di $k \in \mathbb{R}$.

Nel caso $k = 1$ si dica se esistono 2-cicli.

Appello di Sistemi Dinamici
Prova scritta del 22 settembre 2017

1. Data la famiglia di equazioni differenziali

$$\dot{x} = x(\mu - x^2)(x - \mu + 2)$$

si chiede di studiarne la stabilità delle posizioni di equilibrio al variare del parametro $\mu \in \mathbb{R}$ e di tracciarne il diagramma di biforcazione.

2. Si calcoli la matrice esponenziale della matrice

$$\begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

3. Dato il sistema differenziale lineare non omogeneo

$$\begin{cases} \dot{x} = (h+2)x + 2y + 1 \\ \dot{y} = -x + (h-1)y + 1 \end{cases}$$

dove h è un parametro reale, se ne trovino le posizioni di equilibrio e se ne discuta la stabilità al variare del parametro.

4. Dato il sistema dinamico discreto unidimensionale

$$x_{h+1} = 2x_h^2 - 2kx_h + \frac{1}{2}(k + k^2)$$

se ne trovino i punti di equilibrio e se ne studi la stabilità al variare di $k \in \mathbb{R}$.

Nel caso $k = 1$ si dica se esistono 2-cicli.

Appello di Sistemi Dinamici
Prova scritta del 1 giugno 2018

1. Data la famiglia di equazioni differenziali

$$\dot{x} = (x - \mu)(\mu^2 - x^4)$$

si chiede di studiarne la stabilità delle posizioni di equilibrio al variare del parametro $\mu \in \mathbb{R}$ e di tracciarne il diagramma di biforcazione.

2. Si risolva il sistema lineare

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + y \\ \dot{y} = x + 2y \end{cases}$$

al variare delle condizioni iniziali. Si scriva anche l'esponenziale della matrice

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

3. Dato il sistema differenziale

$$\begin{cases} \dot{x} = x(\alpha - y) \\ \dot{y} = y(x - 2) \end{cases}$$

dove α è un parametro reale, se ne trovino le posizioni di equilibrio e se ne discuta la stabilità al variare del parametro.

4. Si studi il sistema dinamico discreto bidimensionale

$$\begin{cases} x_{h+1} = \alpha(x_h^2 - y_h^2) \\ y_{h+1} = \beta x_h y_h \end{cases}$$

al variare di $\alpha, \beta \neq 0$, trovandone i punti di equilibrio e studiandone la stabilità.

Si mostri poi che per $0 < \alpha < 2$ la posizione iniziale $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ tende all'origine.

Appello di Sistemi Dinamici
Prova scritta del 15 giugno 2018

1. Data la famiglia di equazioni differenziali

$$\dot{x} = (x - \mu)(\mu^3 + x - 2\mu)$$

si chiede di studiarne la stabilità delle posizioni di equilibrio al variare del parametro $\mu \in \mathbb{R}$ e di tracciarne il diagramma di biforcazione.

2. Si trovi l'esponenziale della matrice

$$\begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Si trovi poi la soluzione del sistema lineare

$$\begin{cases} \dot{x} = -3x - y \\ \dot{y} = 2x \end{cases}$$

con le condizioni iniziali $x_0 = -1$, $y_0 = 0$.

3. Si studi la stabilità della soluzione nulla del sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + y \\ \dot{y} = -\sin^3 x + \alpha y \end{cases}$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

4. Un sistema di Lotka-Volterra discreto è dato da

$$\begin{cases} x_{h+1} = x_h \left(\dfrac{3}{2} - B y_h \right) \\ y_{h+1} = y_h (C x_h - 1) \end{cases}$$

con $B, C > 0$. Se ne trovino i punti di equilibrio e se ne studi la stabilità al variare dei parametri.

Appello di Sistemi Dinamici
Prova scritta del 6 luglio 2018

1. Data la famiglia di equazioni differenziali
$$\dot{x} = (|x| - |\mu|)(x^2 - \mu - 2)$$
si chiede di studiarne la stabilità delle posizioni di equilibrio al variare del parametro $\mu \in \mathbb{R}$ e di tracciarne il diagramma di biforcazione.

2. Si trovi l'esponenziale della matrice
$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}.$$
Si trovi poi la soluzione del sistema lineare
$$\begin{cases} \dot{x} = x - y \\ \dot{y} = 2x - 2y \end{cases}$$
con le condizioni iniziali $x_0 = -1$, $y_0 = 1$.

3. Si studi la stabilità delle soluzioni di equilibrio del sistema
$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 + y^2 - 2 \\ \dot{y} = y - x^2. \end{cases}$$
Si tracci poi il diagramma delle isocline e si provi a disegnare le traiettorie.

4. Un sistema dinamico discreto è dato da
$$\begin{cases} x_{h+1} = x_h\,(3 - k y_h) \\ y_{h+1} = y_h(x_h - 1) \end{cases}$$
con $k \in \mathbb{R}$. Se ne trovino i punti di equilibrio e se ne studi la stabilità al variare del parametro.

Prova scritta di Sistemi Dinamici
1 febbraio 2019

1. Discutere la stabilità della soluzione nulla del sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = -e^x + 1 - y \\ \dot{y} = x^3 - y^3 \end{cases}$$

2. I prezzi P_1 e P_2 di due beni in concorrenza sul mercato seguono la legge

$$\begin{cases} \dot{P}_1 = P_1(1 - P_2) \\ \dot{P}_2 = P_2(P_1 - 2) \end{cases}$$

   Si trovino le posizioni di equilibrio del mercato e se ne discuta la stabilità.

3. Dato il sistema dinamico discreto unidimensionale

$$x_{h+1} = \sqrt{k + x_h}$$

   con $x_0 > 0$ se ne trovino i punti di equilibrio e se ne studi la stabilità al variare di $k > 0$.

   Si studi poi il valore dell'espressione

$$\lim_{h \to \infty} x_h$$

   nel caso $k = 2$, $x_0 = 0$.

4. Data la famiglia di equazioni differenziali

$$\dot{x} = x(\mu - \sin x)(2 - \mu)$$

   si chiede di studiarne la stabilità delle posizioni di equilibrio al variare del parametro $\mu \in \mathbb{R}$ e di tracciarne il diagramma di biforcazione.

Prova scritta di Sistemi Dinamici
31 maggio 2019

1. Data la famiglia di equazioni differenziali

$$\dot{x} = x\left(\mu^2 - (1-x^2)^2\right)$$

si chiede di studiarne la stabilità delle posizioni di equilibrio al variare del parametro $\mu \in \mathbb{R}$ e di tracciarne il diagramma di biforcazione.

2. Discutere la stabilità della soluzione nulla del sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = \sin y \\ \dot{y} = -x^3 - y^3 \end{cases}$$

Che cosa si può dire delle altre soluzioni di equilibrio?

3. Le variazioni di prezzo $P_1, P_2 \in \mathbb{R}$ di due beni in concorrenza sul mercato seguono la legge

$$\begin{cases} \dot{P}_1 = kP_1 - P_2 \\ \dot{P}_2 = P_1 - kP_2 \end{cases}$$

Si trovino le posizioni di equilibrio del mercato e se ne discuta la stabilità.

4. Dato il sistema dinamico discreto unidimensionale

$$x_{h+1} = \frac{\mu x_h}{1 + x_h^2}\,, \qquad h \in \mathbb{N}$$

se ne trovino i punti di equilibrio e se ne studi la stabilità al variare di $\mu \in \mathbb{R}$.
Che cosa succede per $h \to \infty$ nel caso $\mu = 2$, $x_0 = 1/2$? E nel caso $\mu = 2$, $x_0 = 2$?

Prova scritta di Sistemi Dinamici
14 giugno 2019

1. Data la famiglia di equazioni differenziali

$$\dot{x} = (x-\mu)(x-1)(x^2+\mu^2-2\mu)$$

si chiede di studiarne la stabilità delle posizioni di equilibrio al variare del parametro $\mu \in \mathbb{R}$ e di tracciarne il diagramma di biforcazione.

2. Un modello di dinamica delle popolazioni di tipo Gomatam è della forma

$$\begin{cases} \dot{x} = x(2 - k\ln x - \ln y) \\ \dot{y} = y(\ln x - 2 - k\ln y) \end{cases} \qquad k \in \mathbb{R}.$$

Si discuta la stabilità delle posizioni di equilibrio del sistema.

Che cosa succede nel caso $k = 0$?

3. Discutere la stabilità della soluzione nulla del sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = -kx - \log(1+y) \\ \dot{y} = \sin x - y^3 \end{cases}$$

al variare di $k \in \mathbb{R}$.

4. Dato il sistema dinamico discreto unidimensionale

$$x_{h+1} = \frac{x_h}{d^2 + x_h^2}\,, \qquad h \in \mathbb{N}$$

se ne trovino i punti di equilibrio e se ne studi la stabilità al variare di $d \in \mathbb{R}$.

Che cosa succede nel caso $d = 0$?

Prova scritta di Sistemi Dinamici
12 luglio 2019

1. Data la famiglia di equazioni differenziali

$$\dot{x} = (x^2 + \mu^2 - 1)(x - \mu - 1)(x + \mu + 1)$$

si chiede di studiarne la stabilità delle posizioni di equilibrio al variare del parametro $\mu \in \mathbb{R}$ e di tracciarne il diagramma di biforcazione.

2. Si studi la stabilità delle soluzioni di equilibrio del sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = y - x^2 \\ \dot{y} = -x^2 - y^2 + 2. \end{cases}$$

Si tracci poi il diagramma delle isocline e si provi ad abbozzare il ritratto di fase.

3. In un modello competitivo di dinamica di due popolazioni x e y di tipo Gomatam, il tasso di crescita della specie x segue la legge $1 - \ln y$, mentre quello della specie y segue la legge $2 + \ln x - k \ln y$.

Si chiede di:

- trovare le posizioni di equilibrio e studiarne la stabilità al variare di $k \in \mathbb{R}$;
- risolvere il sistema nel caso $k = 2$ con condizioni iniziali $x(0) = 1$, $y(0) = 1$.

4. Dato il sistema dinamico discreto unidimensionale

$$x_{h+1} = 1 + x_h + de^{x_h}, \qquad h \in \mathbb{N}$$

se ne trovino i punti di equilibrio e se ne studi la stabilità al variare di $d \in \mathbb{R}$.

Che cosa succede nel caso $d = 0$?

Prova scritta di Sistemi Dinamici
6 settembre 2019

1. Data la famiglia di equazioni differenziali

$$\dot{x} = (x^2 + \mu^2 - 2x - 1)(x^2 + \mu^2 + 2x - 1)(\mu - x + 1)$$

si chiede di studiarne la stabilità delle posizioni di equilibrio al variare del parametro $\mu \in \mathbb{R}$ e di tracciarne il diagramma di biforcazione.

2. Si studi la stabilità delle soluzioni di equilibrio del sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = kx + xy^2 \\ \dot{y} = -y^3 - x^2 y \end{cases}$$

al variare di $k \in \mathbb{R}$.

3. In un modello di dinamica di due popolazioni x e y di tipo Gomatam, il tasso di crescita della specie x segue la legge $-\ln x + \ln y$, mentre quello della specie y segue la legge $4 \ln x - \ln y$.

Si chiede di:

- trovare le posizioni di equilibrio e studiarne la stabilità;
- risolvere il sistema con condizioni iniziali $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$.

4. Dato il sistema dinamico discreto unidimensionale

$$x_{h+1} = \mu + x_h - \sin x_h \,, \qquad h \in \mathbb{N}$$

se ne trovino i punti di equilibrio e se ne studi la stabilità al variare di $\mu \in \mathbb{R}$.