Soluzione dello scritto di Sistemi Dinamici del 14 gennaio 2022

1. Le posizioni di equilibrio sono date dal sistema

$$\begin{cases} P_1(1-P_2)=0 \\ P_2(P_1-k)=0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} P_1=0 \\ P_2=0 \end{cases} \vee \begin{cases} P_1=k \\ P_2=1. \end{cases}$$

La matrice gradiente è data da

$$A=\begin{bmatrix} 1-P_2 & -P_1 \\ P_2 & P_1-k \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad A(0,0)=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -k \end{bmatrix} \vee A(k,1)=\begin{bmatrix} 0 & -k \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Per $k>0$ la prima ha autovalori reali positivi, quindi è un nodo instabile, mentre la seconda ha autovalori di segno opposto, quindi è una sella; le posizioni sono entrambe instabili.
Per $k<0$ la posizione nulla è una sella, quindi instabile, mentre gli autovalori della seconda matrice hanno parte reale nulla. Il sistema in questo caso è un Lotka-Volterra, quindi si può trovare una funzione di Ljapunov e la posizione $(k,1)$ è stabile semplicemente.

2. Il metodo di linearizzazione non funziona, cerchiamo quindi una funzione di Ljapunov moltiplicando la prima equazione per x, la seconda per y e la terza per $2z$. Definendo

$$W(x,y,z)=\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}+z^2,$$

che ha un minimo stretto in $(0,0,0)$, si ha

$$\dot{W}=x\dot{x}+y\dot{y}+2z\dot{z}=-2xz-x^2(x^2-y^2)+y^2(x^2-y^2)+2xz-10z^2=-(x^2-y^2)^2-10z^2\leqslant 0$$

e quindi la posizione nulla è stabile. Inoltre da $\dot{W}=0$ ricaviamo $z\equiv 0$ e $x^2-y^2\equiv 0$; dall'ultima equazione

$$z\equiv 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{z}\equiv 0 \quad \Rightarrow \quad x\equiv 0$$

e dalla seconda equazione

$$\dot{y}\equiv 0 \quad \Rightarrow \quad y\equiv 0$$

e quindi l'unica traiettoria nell'insieme $\{\dot{W}=0\}$ è la posizione di equilibrio, che quindi è stabile asintoticamente.
Poiché poi la funzione di Ljapunov ha minimo globale nell'origine, la posizione è anche globalmente stabile.

3. Gli equilibri si trovano risolvendo

$$x(x-d)+x=x \quad \Rightarrow \quad x=0\vee x=d$$

Si ha poi $f'(x)=2x-d+1$, da cui

$$\begin{aligned} f'(0)=1-d \quad &\Rightarrow \quad 0 \text{ è stabile asintoticamente per } 0<d<2 \\ f'(d)=d+1 \quad &\Rightarrow \quad d \text{ è stabile asintoticamente per } -2<d<0. \end{aligned}$$

Per $d=5/2$ si ha $f(x)=x^2-\frac{3}{2}x$ da cui

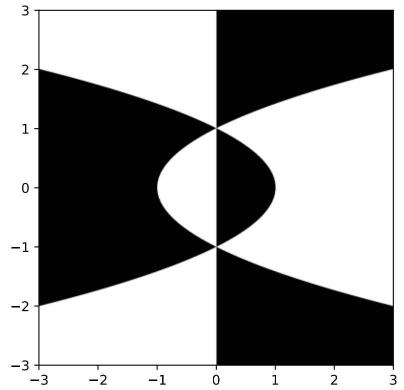
$$f^2(x)=\left(x^2-\frac{3}{2}x\right)^2-\frac{3}{2}x^2+\frac{9}{4}x=x \quad \Rightarrow \quad 4x^4-12x^3+3x^2+5x=0.$$

Semplificando x si ottiene $4x^3-12x^2+3x+5=0$ che ha la soluzione $x=d=\frac{5}{2}$, per cui, scomponendo con Ruffini, si ottiene

$$2(2x^2-x-1)=0 \quad \Rightarrow \quad x=1\vee x=-\frac{1}{2}.$$

Quindi abbiamo trovato il 2-ciclo $\left\{1,-\frac{1}{2}\right\}$.

4. Si ha un diagramma come in figura (le posizioni stabili si hanno passando dal nero al bianco andando dal basso verso l'alto). L'asse verticale è tutto di posizioni semplicemente stabili.


3
2
1
0
−1
−2
−3
−3
−2
−1
0
1
2
3