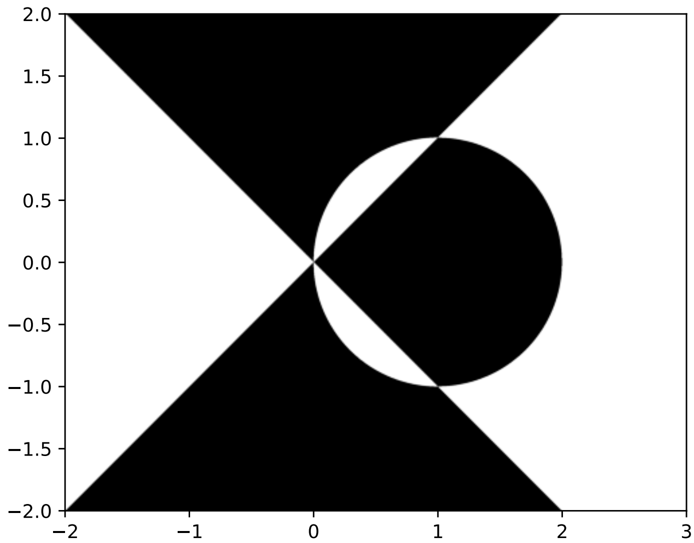
Soluzione dello scritto di Sistemi Dinamici del 10 giugno 2022

1. Si tratta di una circonferenza centrata in $(1,0)$ e passante per l'origine e delle due bisettrici. Si ha un diagramma come in figura (le posizioni stabili si hanno passando dal nero al bianco andando dal basso verso l'alto).



2. Trasformiamo il sistema in uno del primo ordine:

$$\begin{cases} x_{h+1} = y_h \\ y_{h+1} = k(k-1)x_h + y_h \end{cases}$$

che è un sistema lineare in $\mathbb{R}^2$. La matrice del sistema è data da

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ k(k-1) & 1 \end{bmatrix}$$

e gli autovalori sono k e $1-k$. Imponendo che $\rho(A) < 1$ si trova

$$-1 < k < 1 \ \wedge \ 0 < k < 2 \quad \Rightarrow \quad 0 < k < 1.$$

Nei casi $k = 0, 1$ il sistema diventa banalmente $x_{h+1} = x_h$, per cui tutte le posizioni sono di equilibrio semplicemente stabile.

3. La matrice delle derivate è

$$\nabla F(x,y) = \begin{bmatrix} -3(k+1)x^2 & k \\ 3x^2 & -k \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \nabla F(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & k \\ 0 & -k \end{bmatrix}$$

quindi gli autovalori sono 0 e $-k$. Per $k < 0$ si ha subito che l'origine è instabile.
Per $k > 0$ costruiamo una funzione di Ljapunov moltiplicando la prima equazione per x^3 e la seconda per ky, da cui

$$W(x,y) = \frac{x^4}{4} + k\frac{y^2}{2};$$

per $k > 0$ tale funzione ha minimo stretto nell'origine e

$$\dot{W} = x^3\dot{x} + ky\dot{y} = -(k+1)x^6 + 2kx^3y - k^2y^2 = -kx^6 - (x^3 - ky)^2 \leqslant 0$$

quindi l'origine è stabile per $k > 0$. Inoltre $\{\dot{W} = 0\} = \{(0,0)\}$, dunque la stabilità è asintotica.
Il caso $k = 0$ è più delicato: il sistema diventa

$$\begin{cases} \dot{x} = -x^3 \\ \dot{y} = x^3 \end{cases}$$

e, osservando che $\dot{x} + \dot{y} = 0$, un'idea è quella di usare la funzione

$$W(x,y) = \frac{1}{2}\left[(x+y)^2 + x^2\right],$$

che ha minimo stretto nell'origine. In questo caso

$$\dot{W} = (x+y)(\dot{x}+\dot{y}) + x\dot{x} = -x^4 \leqslant 0$$

e la posizione è stabile. La stabilità è semplice, perché in questo caso le posizioni di equilibrio sono tutto l'asse verticale, quindi l'origine non è isolata.

4. Risolviamo l'equazione di punto fisso

$$x(k - x^2) = x \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0 \ \vee \ x_{2,3} = \pm\sqrt{k-1}$$

in cui $x_{2,3}$ esistono solo per $k > 1$.
Poiché $f'(x) = k - 3x^2$, si ha

- $f'(0) = k$, quindi 0 è stabile per $-1 < k < 1$ ed è instabile per $k < -1 \vee k > 1$;
- per $k > 1$, $f'(x_{2,3}) = k - 3(k-1)$, quindi $x_{2,3}$ è stabile per $1 < k < 2$ ed è instabile per $k > 2$.

Studiamo i casi limite:

- per $k = -1$ si ha $f'(0) = -1$, $f''(0) = 0$, $f'''(0) = -6$, quindi 0 è instabile;
- per $k = 1$ si ha $f'(0) = 1$, $f''(0) = 0$, $f'''(0) = -6$, quindi 0 è stabile;
- per $k = 2$ si ha $x_{2,3} = \pm 1$, $f'(x_{2,3}) = -1$, $f''(x_{2,3}) = \mp 6$, $f'''(0) = -6$, quindi ± 1 è stabile.

Per imporre che $\{\pm\sqrt{3}\}$ sia un 2-ciclo bisogna imporre che $f(\sqrt{3}) = -\sqrt{3}$ e che $f(-\sqrt{3}) = \sqrt{3}$, da cui

$$\sqrt{3}(k-3) = -\sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad k - 3 = -1 \quad \Rightarrow \quad k = 2.$$