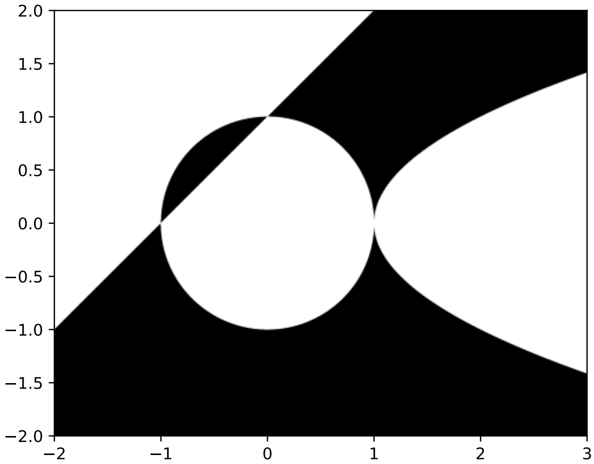
Risoluzione della prova di Sistemi Dinamici del 6 giugno 2024

1. Si tratta di un sistema di Gomatam. Per $k \neq 0$ l'unica soluzione di equilibrio è $(e, e^{1/k})$, mentre per $k = 0$ non ci sono soluzioni accettabili. Col cambio di variabili $\xi = \log x, \eta = \log \eta$ si ottiene il sistema lineare

$$\begin{cases} \dot{\xi} = 1 - k\eta \\ \dot{\eta} = \xi - 1 \end{cases}$$

che ha matrice $\begin{bmatrix} 0 & -k \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ con polinomio caratteristico $\lambda^2 + k$. Per $k < 0$ quindi si ha una sella (instabile), mentre per $k > 0$ si ha un centro (stabile semplicemente). □

2. Studiando i segni, si ottiene la figura seguente, dove il nero vuol dire positivo e il bianco vuol dire negativo:



Da qui si ottiene il diagramma di biforcazione. □

3. Risolvendo l'equazione dei punti fissi

$$x(1 + kx^2 - kx) = x$$

si trova $x = 0$ oppure $kx(1 - x) = 0$. Per $k = 0$ si ha che ogni posizione è di equilibrio (e quindi è stabile semplicemente), mentre per $k \neq 0$ si ottengono le posizioni $x = 0$, $x = 1$.

Per $k \neq 0$ calcoliamo $f'(x) = 1 + 3kx^2 - 2kx$, da cui

$$f'(0) = 1, \quad f'(1) = 1 + k.$$

Quindi $x = 1$ è stabile asintoticamente per $-2 < k < 0$ e instabile per $k < -2$ o per $k > 0$.

Calcoliamo $f''(x) = 6kx - 2k$ e $f'''(x) = 6k$, da cui

$$f''(0) = -2k \quad \Rightarrow \quad x = 0 \text{ instabile.}$$

Per $k = -2$ si ha $f'(1) = -1$, $f''(1) = -8$, $f'''(1) = -12$, da cui

$$2f'''(1) + 3f''(1)^2 = -24 + 3 \cdot 64 > 0,$$

quindi per $k = -2$ la posizione $x = 1$ è asintoticamente stabile. □

4. La matrice del sistema linearizzato calcolata nell'origine è

$$\begin{bmatrix} -k\cos x - y^2 & -2xy \\ y\sin x + xy\cos x & -3y^2 + x\sin x \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} -k & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

quindi la posizione è instabile per $k < 0$ ma non sappiamo niente per $k \geq 0$. In questo caso cerchiamo una funzione di Ljapunov: consideriamo la funzione

$$W(x,y) = 1 - \cos x + \frac{1}{2}y^2 \quad \Rightarrow \quad \nabla W = (\sin x, y)$$

da cui

$$\dot{W} = \nabla W \cdot \boldsymbol{F} = -k\sin^2 x - xy^2 \sin x - y^4 + xy^2 \sin x = -k\sin^2 x - y^4 \leq 0.$$

Poiché W è regolare e ha minimo stretto locale in $(0,0)$, si ha che la posizione è stabile.

Studiamo $\{\dot{W} = 0\}$: se $k > 0$, l'unico punto che contiene è l'origine, dunque la stabilità è asintotica. Se invece $k = 0$, si ha solo $y(t) = 0$, da cui $\dot{x} = 0$ e dunque x è costante. In questo caso in realtà tutte le posizioni $(\overline{x}, 0)$ sono di equilibrio, quindi la stabilità dell'origine è solo semplice. $\square$

5. Le posizioni di equilibrio sono $(0,0)$ e $(-4,-2)$. Calcoliamo l'iterata seconda:

$$f(f(x,y), g(x,y)) = (x-y)(xy+x) + xy + x, \quad g(f(x,y), g(x,y)) = -xy + y - 2x.$$

Se cerchiamo i punti fissi, troviamo $(0, \overline{y})$ e $(-4,-2)$. Scartando i punti di equilibrio, abbiamo che per $\overline{y} \neq 0$ si ha che

$$\{(0,\overline{y}), (0, -\overline{y})\}$$

è un 2-ciclo. $\square$