

# UNIVERSITÀ CATTOLICA DEL SACRO CUORE

## Prova scritta di Sistemi Dinamici

27 settembre 2024

1. Data la famiglia di equazioni differenziali

$$\dot{x} = (x^2 - \mu^2)(x^2 + \mu^2 - 2)$$

si chiede di studiarne la stabilità delle posizioni di equilibrio al variare del parametro  $\mu \in \mathbb{R}$  e di tracciarne il diagramma di biforcazione.

2. Si discuta la stabilità del sistema lineare

$$\begin{cases} \dot{x} = x - y \\ \dot{y} = 2x + ky \end{cases}$$

per  $k \in \mathbb{R}$ , evidenziandone fuochi, nodi, selle, centri.

Nel caso  $k = -1$  se ne trovi la soluzione esplicita al variare delle condizioni iniziali  $(x_0, y_0)$ .

3. Si studino i punti di equilibrio e la loro stabilità al variare di  $k \geq 0$  del sistema dinamico discreto dato da

$$x_{h+1} = \frac{x_h}{1 + kx_h^2}.$$

4. Discutere la stabilità delle posizioni di equilibrio del sistema differenziale

$$\begin{cases} \dot{x} = -xz + kxy^2 \\ \dot{y} = -yz \\ \dot{z} = kz + x^2 + y^2 \end{cases}$$

al variare del parametro  $k \neq 0$ .

Quante sono le posizioni di equilibrio nel caso  $k = 0$ ? Si può dire qualcosa sulla loro stabilità?