

UNIVERSITÀ CATTOLICA DEL SACRO CUORE

Prova scritta di Sistemi Dinamici

17 gennaio 2025

1. Data la famiglia di equazioni differenziali

$$\dot{x} = (x^2 - \mu - 1)(x^2 + \mu - 1)(x - 1)$$

si chiede di studiarne la stabilità delle posizioni di equilibrio al variare del parametro $\mu \in \mathbb{R}$ e di tracciarne il diagramma di biforcazione.

2. Si discuta la stabilità del sistema lineare

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + ky \\ \dot{y} = x - y \end{cases}$$

per $k \in \mathbb{R}$, evidenziandone fuochi, nodi, selle, centri.

Nel caso $k = 0$ se ne trovi la soluzione esplicita al variare delle condizioni iniziali (x_0, y_0) .

3. Si studino i punti di equilibrio e la loro stabilità al variare di $k \in \mathbb{R}$ del sistema dinamico discreto dato da

$$x_{h+1} = x_h + \frac{kx_h}{1 + x_h^2}$$

discutendo anche il caso $k = 0$.

Si verifichi che nel caso $k = -4$ esiste il 2-ciclo dato da $\{-1; 1\}$.

4. Discutere la stabilità delle posizioni di equilibrio del sistema differenziale

$$\begin{cases} \dot{x} = ky \\ \dot{y} = -y + y^3 - x^5 \end{cases}$$

al variare del parametro $k \neq 0$.