

UNIVERSITÀ CATTOLICA DEL SACRO CUORE

Prova scritta di Sistemi Dinamici

7 febbraio 2025

1. Data la famiglia di equazioni differenziali

$$\dot{x} = (\mu^2 - x^2)(x^2 + \mu^2 - 2\mu)$$

si chiede di studiarne la stabilità delle posizioni di equilibrio al variare del parametro $\mu \in \mathbb{R}$ e di tracciarne il diagramma di biforcazione.

2. Un sistema si presenta nella forma

$$\begin{cases} \dot{x} = -x^3 - 2y \\ \dot{y} = \sin(2x) - ky. \end{cases}$$

Si discuta la stabilità, anche asintotica, della posizione nulla al variare di $k \in \mathbb{R}$.

3. Si discuta la stabilità del sistema lineare

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha x + y \\ \dot{y} = (1 - \alpha)x + y \end{cases}$$

evidenziandone fuochi, nodi, selle, centri.

Nel caso $\alpha = 1$ se ne trovi la soluzione esplicita al variare delle condizioni iniziali (x_0, y_0) .

4. Si trovino tutte le posizioni di equilibrio del sistema dinamico discreto bidimensionale

$$\begin{cases} x_{h+1} = \frac{1}{2}x_h + ky_h \\ y_{h+1} = -x_h - \frac{1}{2}y_h. \end{cases}$$

al variare di $k \in \mathbb{R}$ e si studi la stabilità della posizione $(0, 0)$.