

PROGETTO DI ECCELLENZA

L'UNIVERSITÀ A SCUOLA A SCUOLA DI UNIVERSITÀ



UNIVERSITÀ
CATTOLICA
del Sacro Cuore

FACOLTÀ DI SCIENZE
MATEMATICHE, FISICHE
E NATURALI



Quanti pavimenti si possono scegliere? La matematica delle tassellazioni del piano

a cura di Alessandro Musesti

Università Cattolica del Sacro Cuore, Brescia

Parte I

Le simmetrie



Bellezza e simmetria

L'umanità è da sempre affascinata dalle simmetrie. . .



Bellezza e simmetria

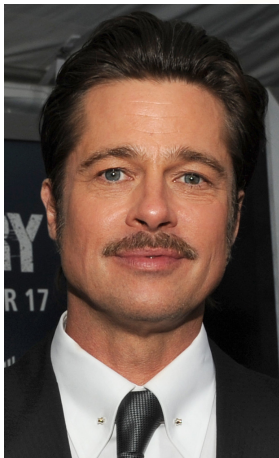
L'umanità è da sempre affascinata dalle simmetrie. . .

Gli umani hanno una simmetria bilaterale



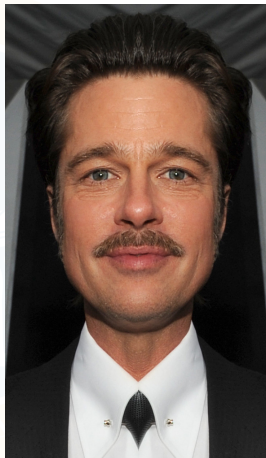
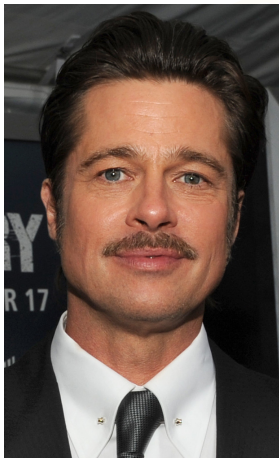
Bellezza e simmetria

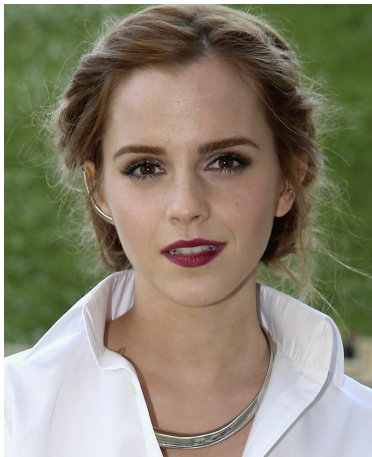
L'umanità è da sempre affascinata dalle simmetrie. . .
Gli umani hanno una simmetria bilaterale (quasi)

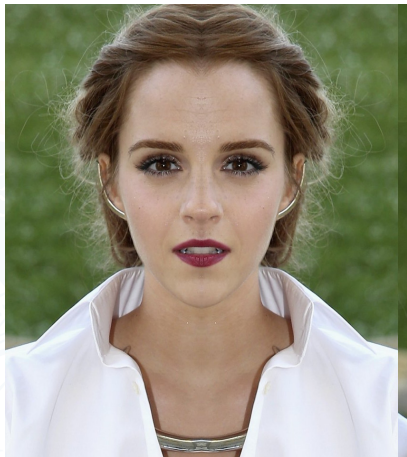


Bellezza e simmetria

L'umanità è da sempre affascinata dalle simmetrie...
Gli umani hanno una simmetria bilaterale (quasi)







Ma che cos'è una *simmetria*?



Ma che cos'è una *simmetria*?

In genere, si parla di simmetria quando c'è qualcosa che ritorna uguale a se stesso. . .



Ma che cos'è una *simmetria*?

In genere, si parla di simmetria quando c'è qualcosa che ritorna uguale a se stesso. . .

Definizione

In Geometria, una *simmetria* è una trasformazione che lascia invariata la figura.



Ma che cos'è una *simmetria*?

In genere, si parla di simmetria quando c'è qualcosa che ritorna uguale a se stesso. . .

Definizione

In Geometria, una *simmetria* è una trasformazione che lascia invariata la figura.



riflessione

Ma che cos'è una *simmetria*?

In genere, si parla di simmetria quando c'è qualcosa che ritorna uguale a se stesso. . .

Definizione

In Geometria, una *simmetria* è una trasformazione che lascia invariata la figura.



riflessione



rotazione

Ma che cos'è una *simmetria*?

In genere, si parla di simmetria quando c'è qualcosa che ritorna uguale a se stesso. . .

Definizione

In Geometria, una *simmetria* è una trasformazione che lascia invariata la figura.



riflessione



rotazione



traslazione

Ma che cos'è una *simmetria*?

In genere, si parla di simmetria quando c'è qualcosa che ritorna uguale a se stesso. . .

Definizione

In Geometria, una *simmetria* è una trasformazione che lascia invariata la figura.



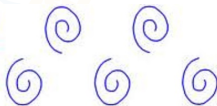
riflessione



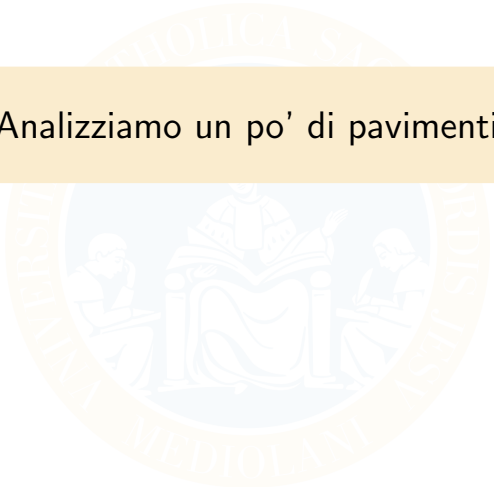
traslazione



rotazione

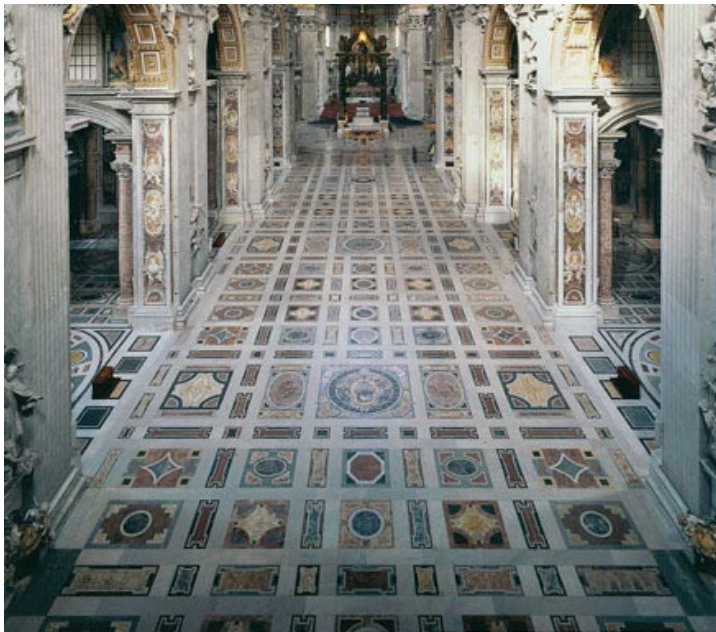


glissosimmetria



Analizziamo un po' di pavimenti

Roma, Basilica di S. Pietro



Roma, Basilica di S. Pietro



Cattedrale di Aquileia

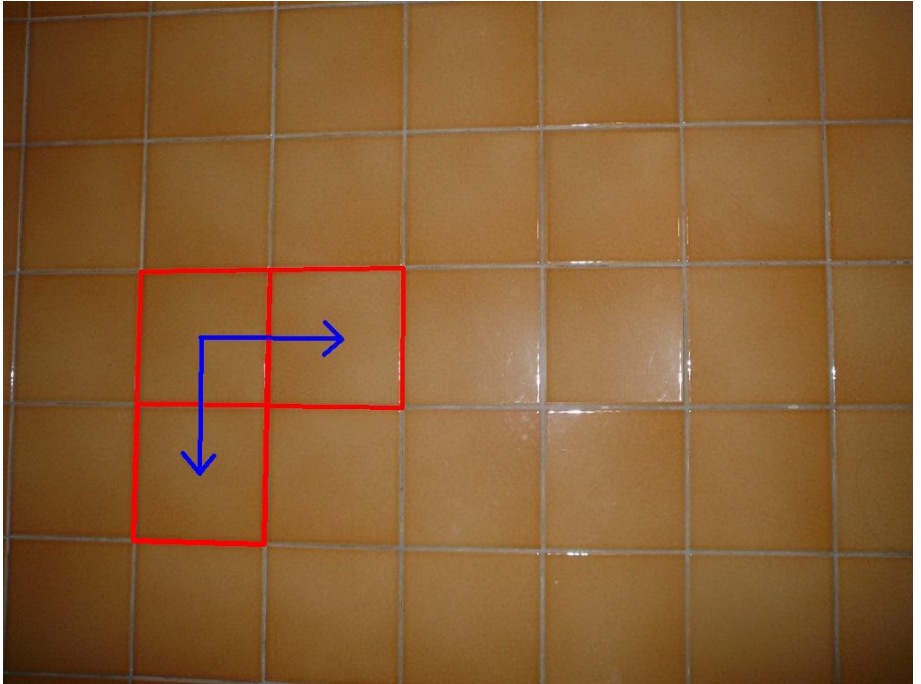


Parte II

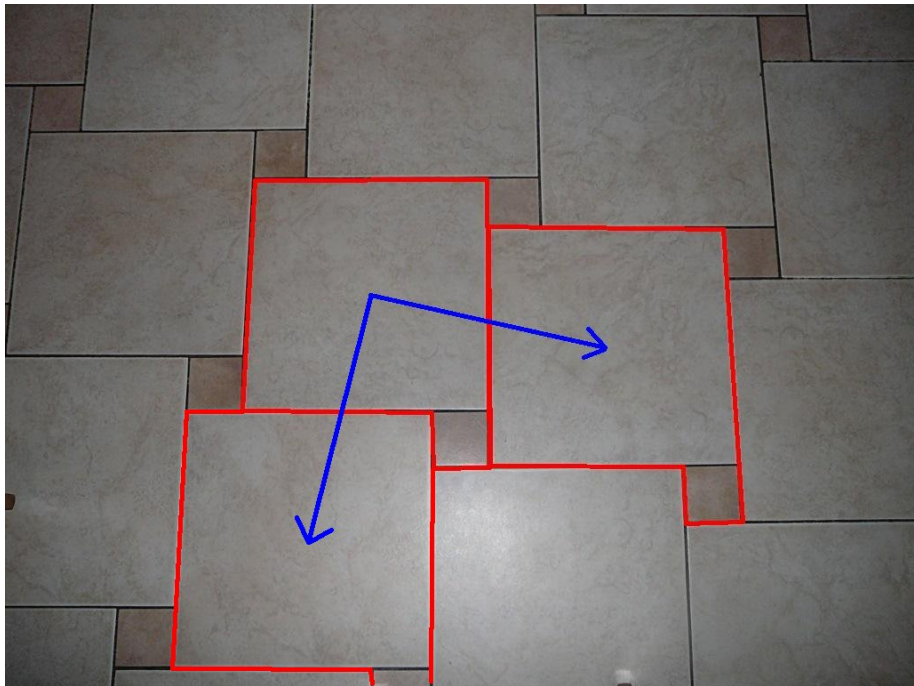
Periodicità





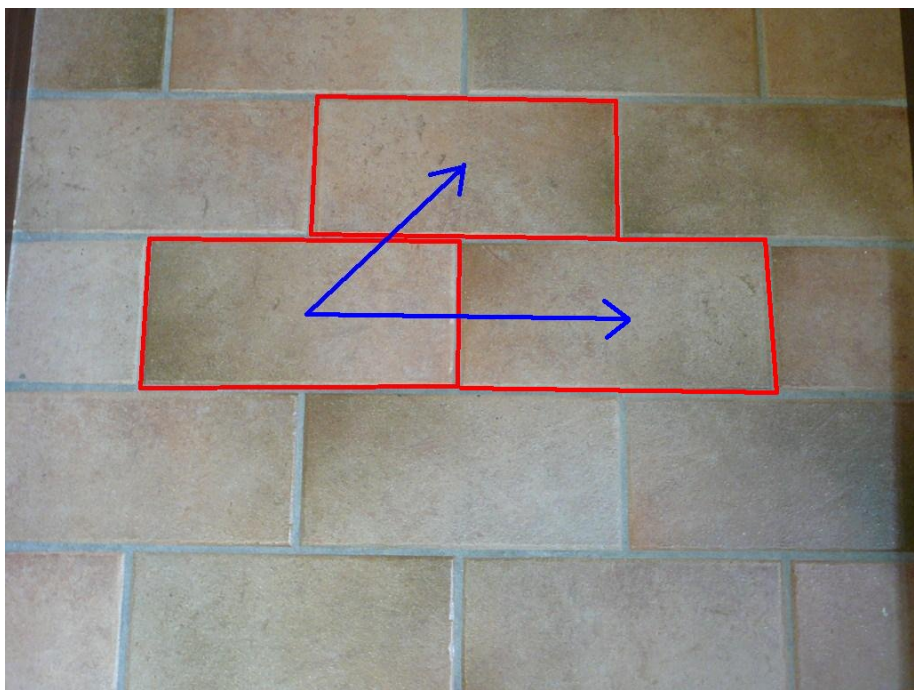


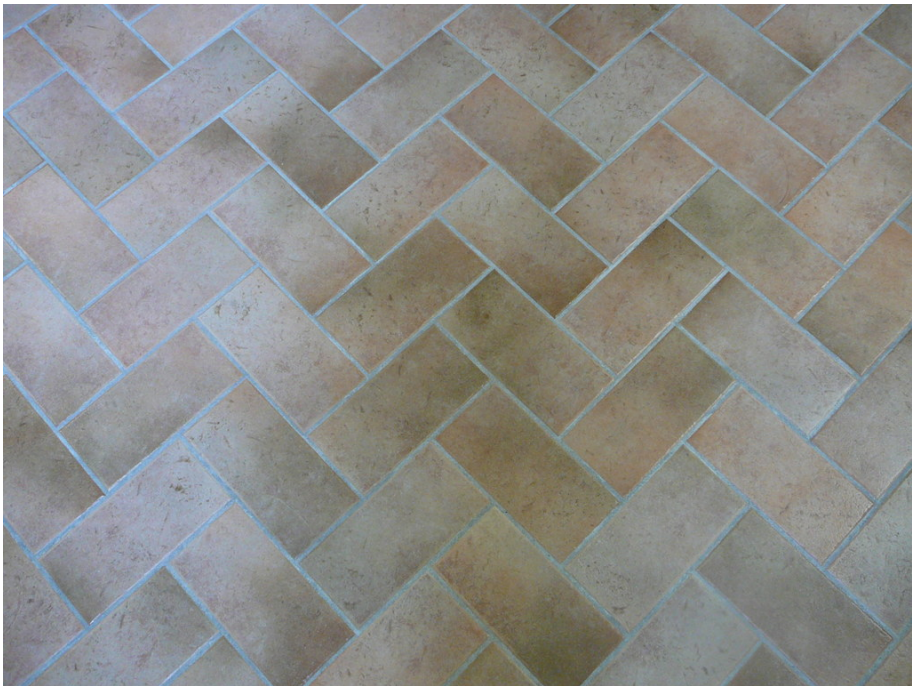


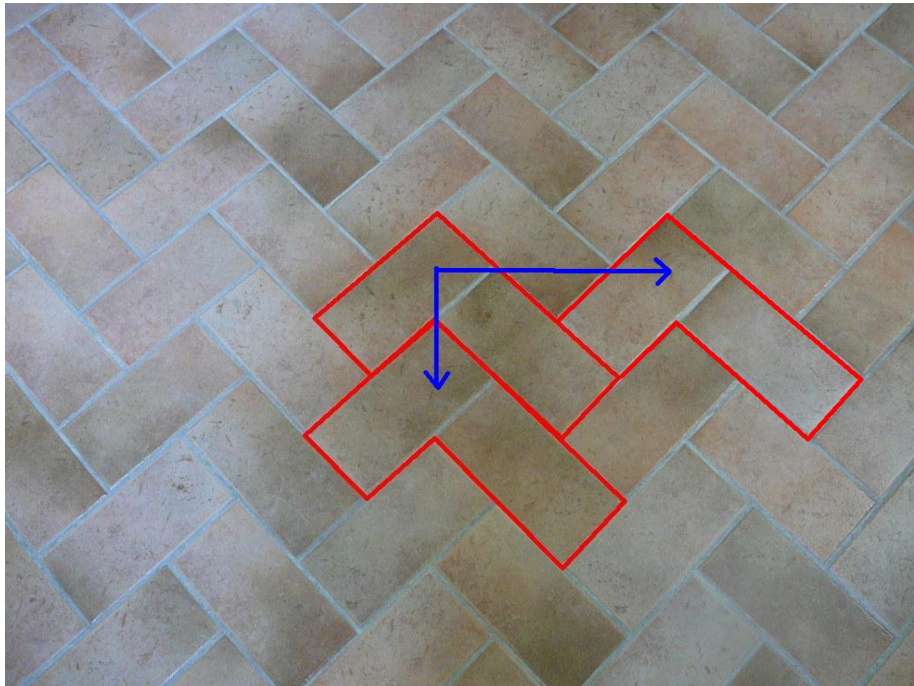


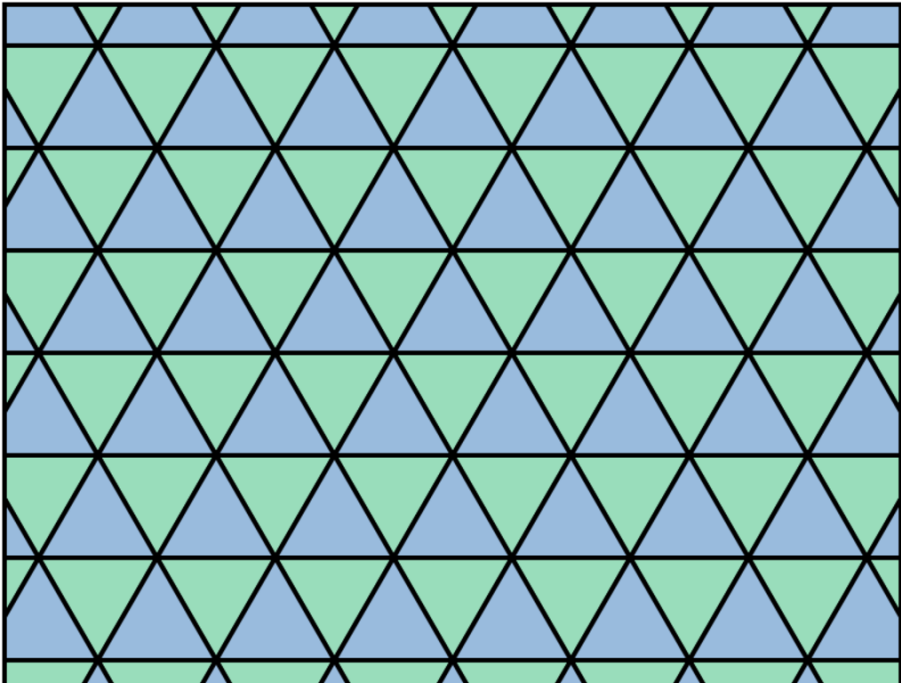


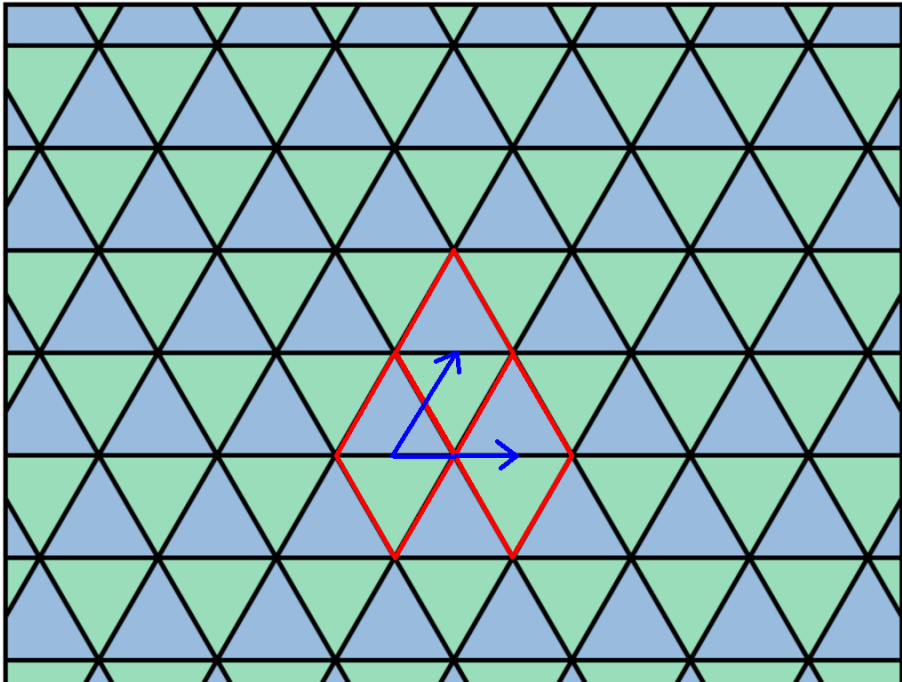
Alessandro Musesti - Università Cattolica del Sacro Cuore

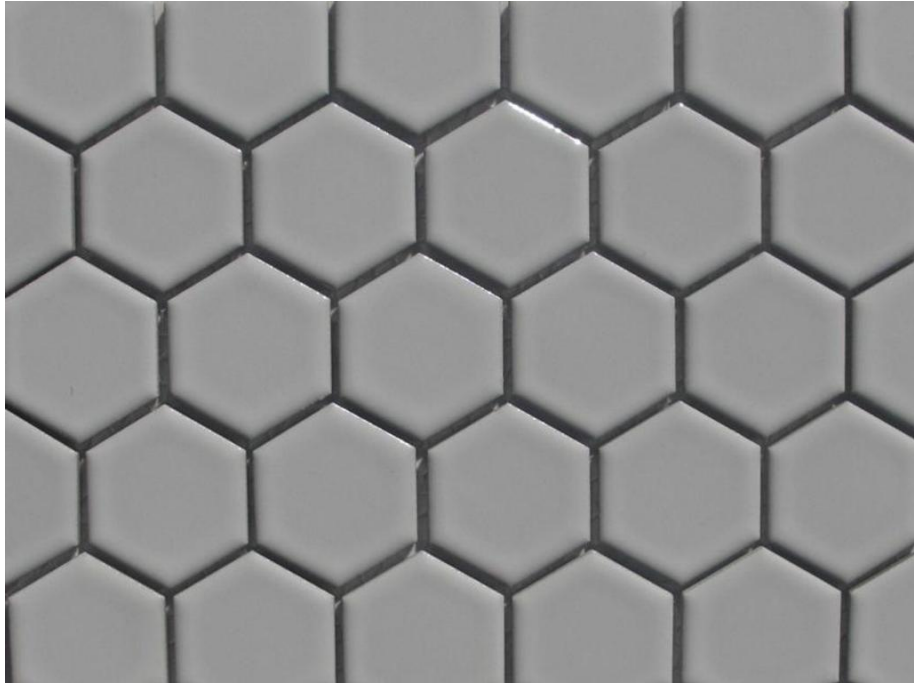


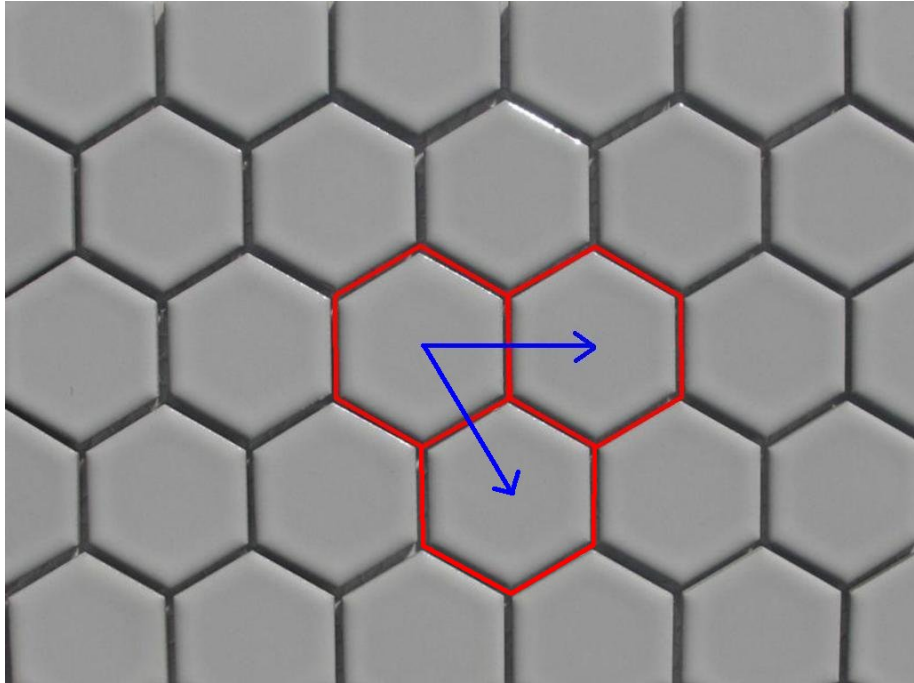


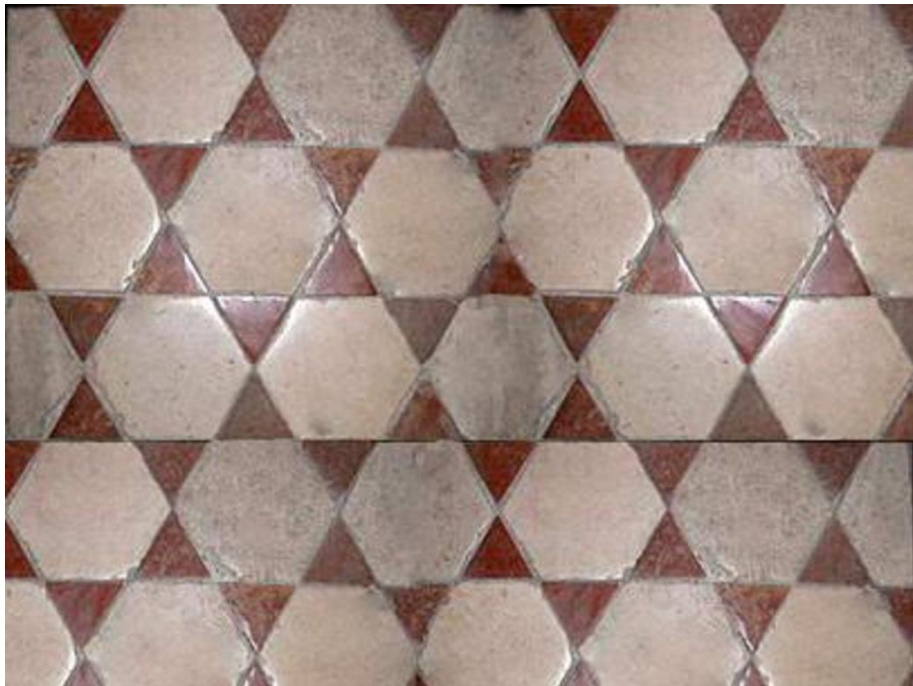


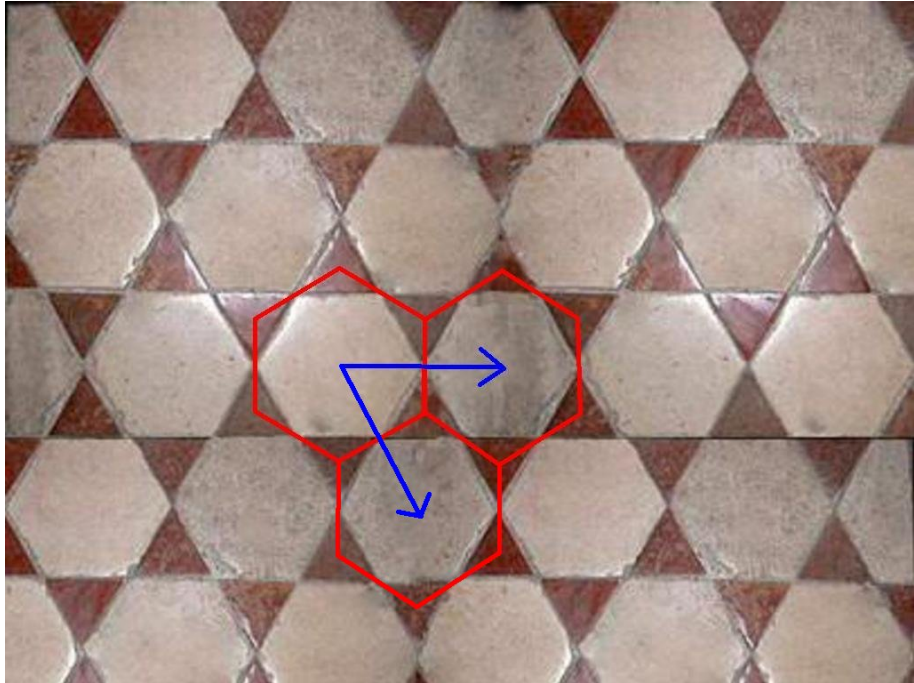


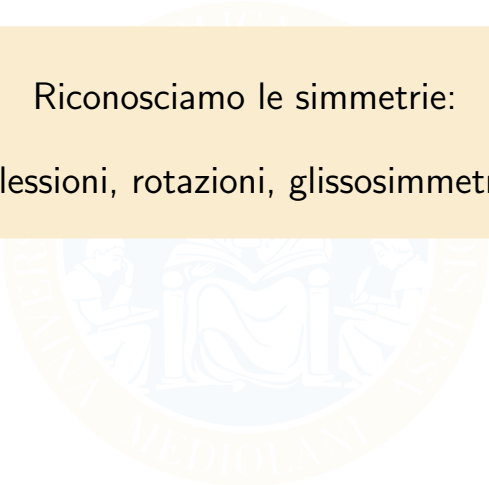












Riconosciamo le simmetrie:
riflessioni, rotazioni, glissosimmetrie





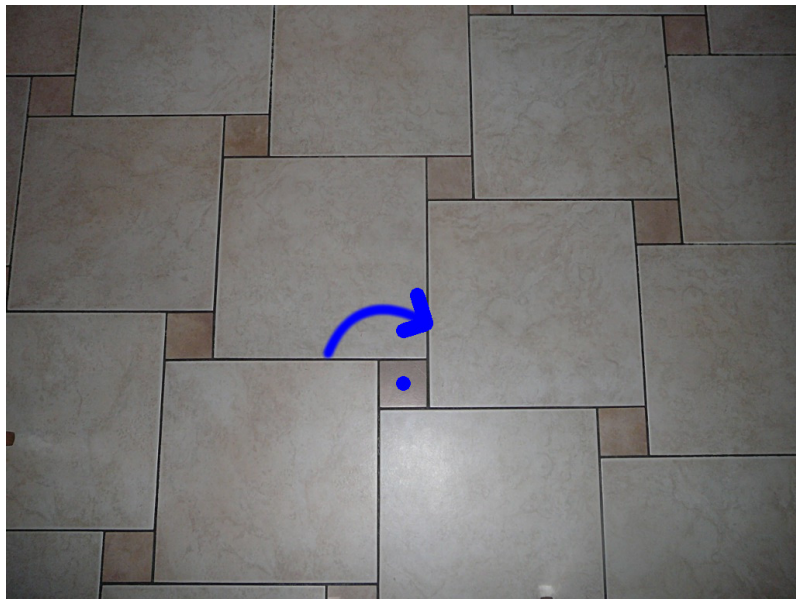




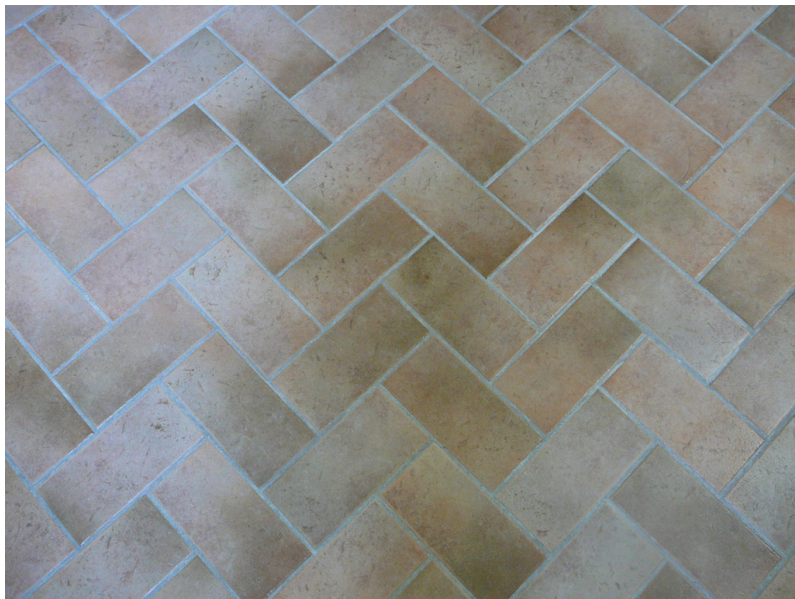
Rotazioni



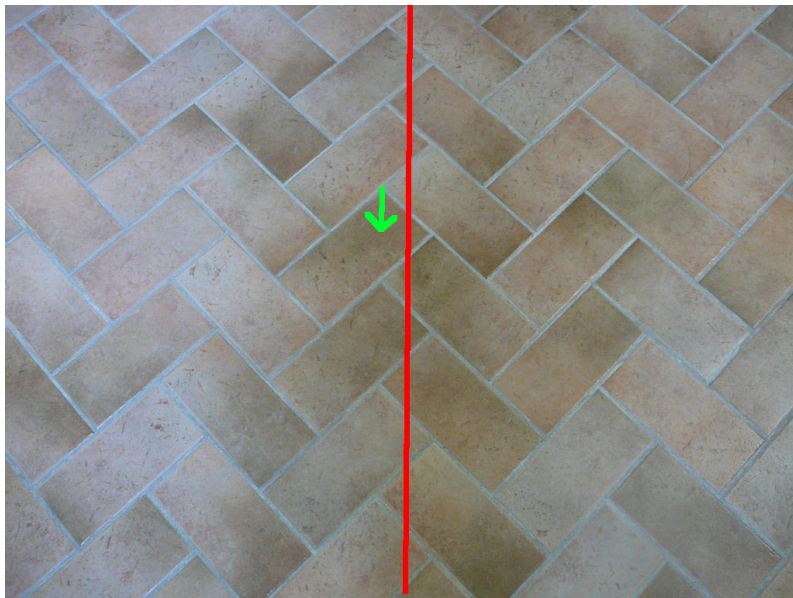
Rotazioni



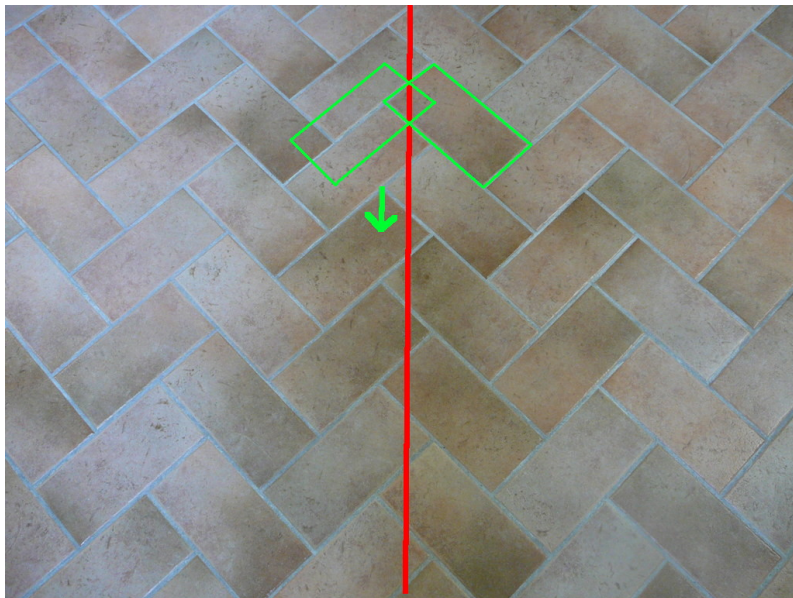
Glissosimmetrie



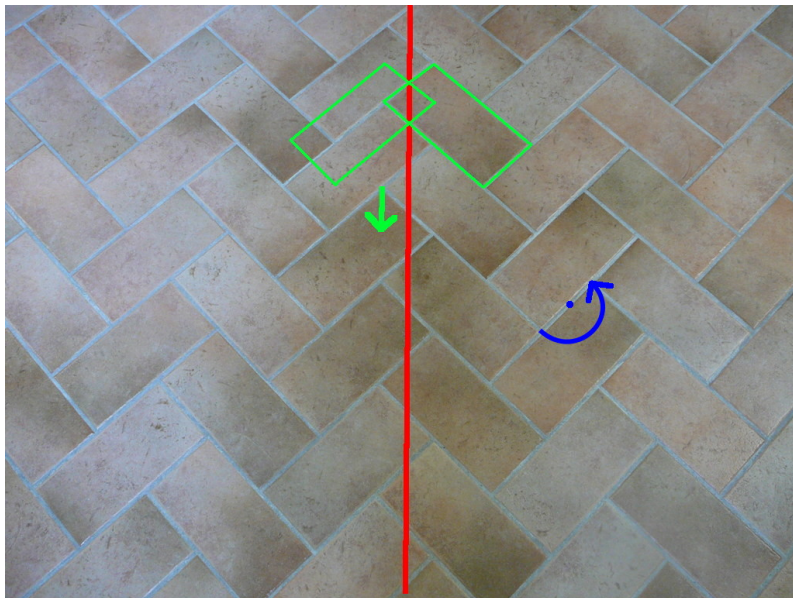
Glissosimmetrie

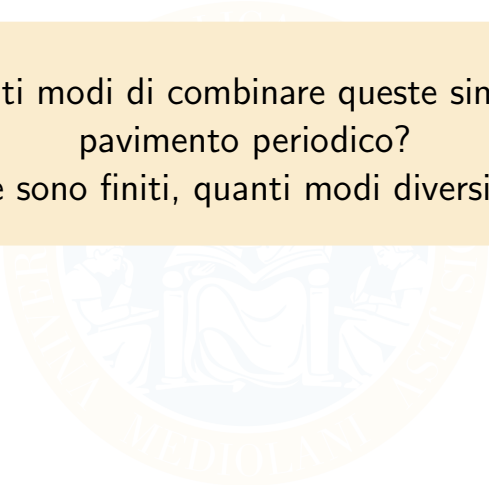


Glissosimmetrie



Glissosimmetrie





Ci sono infiniti modi di combinare queste simmetrie in un
pavimento periodico?
Se invece sono finiti, quanti modi diversi ci sono?



Ci sono esattamente **17** possibilità!



Ci sono esattamente **17** possibilità!

Esiste un modo per etichettarle, usato dai cristallografi, ma non è l'unico: Pólya e Conway ne hanno proposti di differenti.



Ci sono esattamente **17** possibilità!

Esiste un modo per etichettarle, usato dai cristallografi, ma non è l'unico: Pólya e Conway ne hanno proposti di differenti.

Cristallogr.	p1	pg	cm	pm	p6	p6m
Conway	o	xx	*x	**	632	*632
Pólya	C_1	D_1gg	D_1kg	D_1kk	C_6	D_6
Cristallogr.	p3	p3m1	p31m	p4	p4m	p4g
Conway	333	*333	3*3	442	*442	4*2
Pólya	C_3	D_3^*	D_3°	C_4	D_4^*	D_4°
Cristallogr.	p2	pgg	pmg	pmm	cmm	
Conway	2222	22x	22*	*2222	2*22	
Pólya	C_2	D_2gggg	D_2kkgg	D_2kkkk	D_2kgkg	



George (György) Pólya, 1887–1985



George (György) Pólya, 1887–1985

“Se non riesci a risolvere un problema, ce ne sarà uno più facile che riesci a risolvere: trovalo.”



George (György) Pólya, 1887–1985

“Se non riesci a risolvere un problema, ce ne sarà uno più facile che riesci a risolvere: trovalo.”

“How I need a drink, alcoholic of course, after the heavy chapters involving quantum mechanics.”



George (György) Pólya, 1887–1985

“Se non riesci a risolvere un problema, ce ne sarà uno più facile che riesci a risolvere: trovalo.”

“How I need a drink, alcoholic of course, after the heavy chapters involving quantum mechanics.”

3,14159265358979



John Horton Conway, 1937–





John Horton Conway, 1937–

- ▶ Conway algebra
- ▶ Conway polyhedron notation
- ▶ Conway puzzle
- ▶ Conway's LUX method for magic squares
- ▶ Conway chained arrow notation
- ▶ Conway's Game of Life
- ▶ Conway's soldiers
- ▶ Conway's thrackle conjecture
- ▶ Conway base 13 function
- ▶ Orbifold notation
- ▶ Phutball
- ▶ Pinwheel tiling
- ▶ Look-and-say sequence
- ▶ 15 theorem
- ▶ FRACTRAN

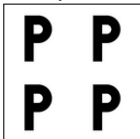


John Horton Conway, 1937–

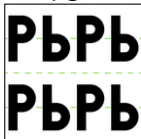
- ▶ Conway algebra
- ▶ Conway polyhedron notation
- ▶ Conway puzzle
- ▶ Conway's LUX method for magic squares
- ▶ Conway chained arrow notation
- ▶ Conway's Game of Life
- ▶ Conway's soldiers
- ▶ Conway's thrackle conjecture
- ▶ Conway base 13 function
- ▶ Orbifold notation
- ▶ Phutball
- ▶ Pinwheel tiling
- ▶ Look-and-say sequence
- ▶ 15 theorem
- ▶ FRACTRAN

“C'è una cosa di cui i non matematici non si rendono conto, ed è che la matematica è in realtà quasi interamente un soggetto estetico.”

p1



pg



cm



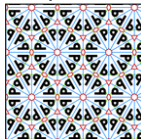
pm



p6



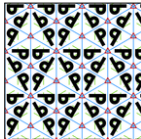
p6m



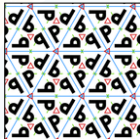
p3



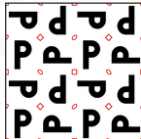
p3m1



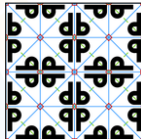
p31m



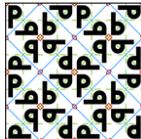
p4



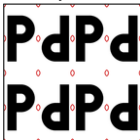
p4m



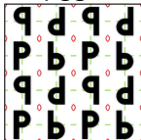
p4g



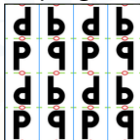
p2



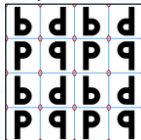
pgg



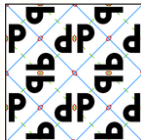
pmm

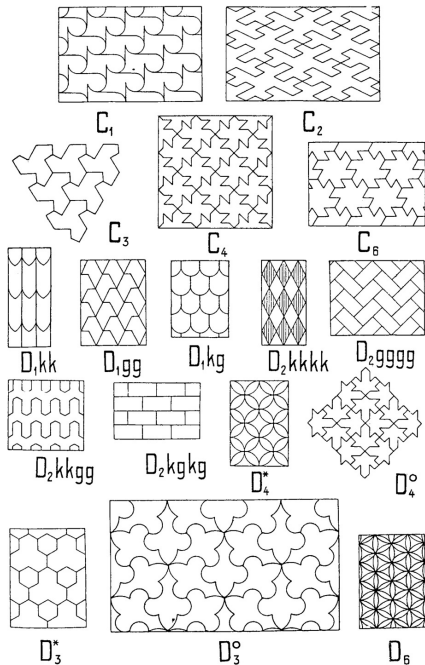


pmm



cmm

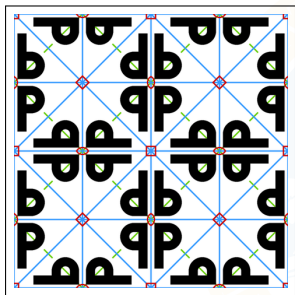




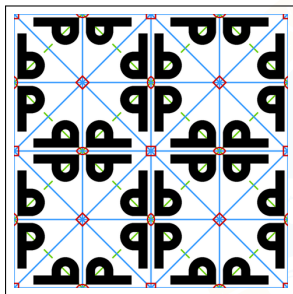
Riconoscere il gruppo giusto

	Ci sono riflessioni?	
Rotazione minima:	Sì	No
60°	$p6m$	$p6$
90°	Ci sono assi di rifl. a 45°? Sì: $p4m$ No: $p4g$	$p4$
120°	C'è un centro di rot. non sugli assi? Sì: $p31m$ No: $p3m1$	$p3$
180°	Ci sono assi di rifl. perpendicolari? Sì No C'è un centro di rot. non sugli assi? pmg Sì: cmm No: pmm	C'è una glissosimmetria? Sì: pgg No: $p2$
nessuna	Glissosim. con asse non di rifl.? Sì: cm No: pm	C'è una glissosimmetria? Sì: pg No: $p1$

Esempio

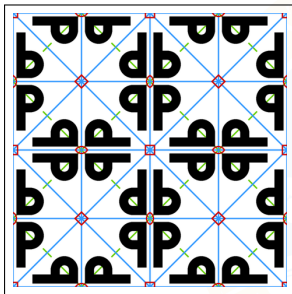


- ▶ Rotazione minima: 90°

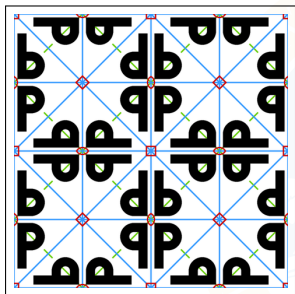


Esempio

- ▶ Rotazione minima: 90°
- ▶ Ci sono riflessioni? Sì

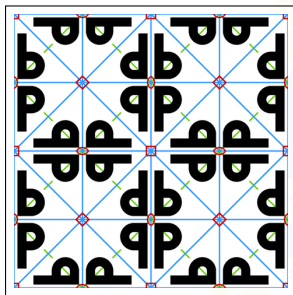


Esempio



- ▶ Rotazione minima: 90°
- ▶ Ci sono riflessioni? Sì
- ▶ Ci sono assi di rifl. a 45° ? Sì

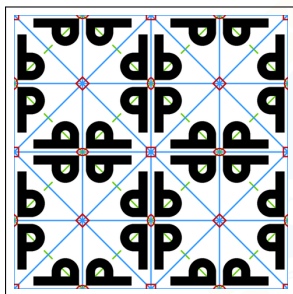
Esempio



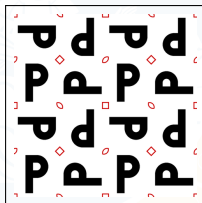
- ▶ Rotazione minima: 90°
- ▶ Ci sono riflessioni? Sì
- ▶ Ci sono assi di rifl. a 45° ? Sì

p4m

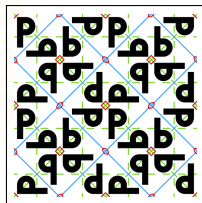
- ▶ Rotazione minima: 90°
- ▶ Ci sono riflessioni? Sì
- ▶ Ci sono assi di rifl. a 45° ? Sì



p4m



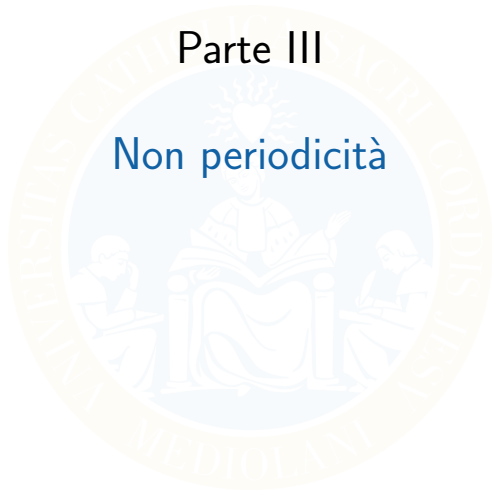
p4
no rifl.



p4g
no rifl. 45°

Parte III

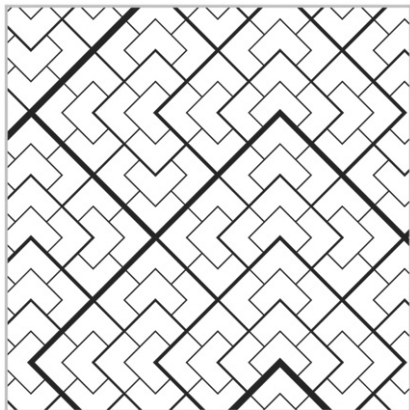
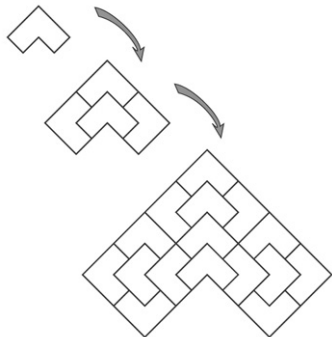
Non periodicità

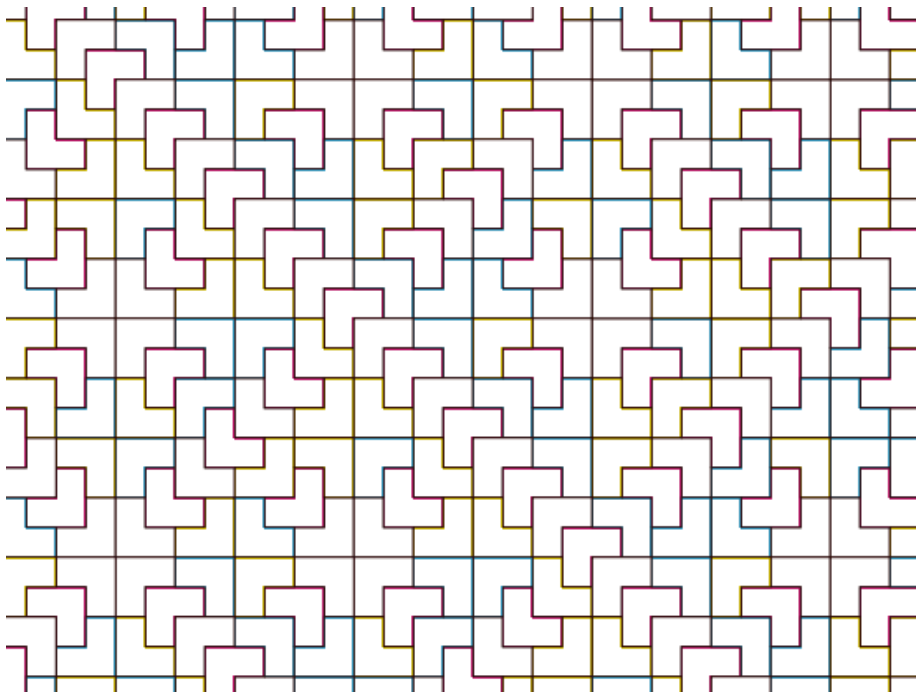




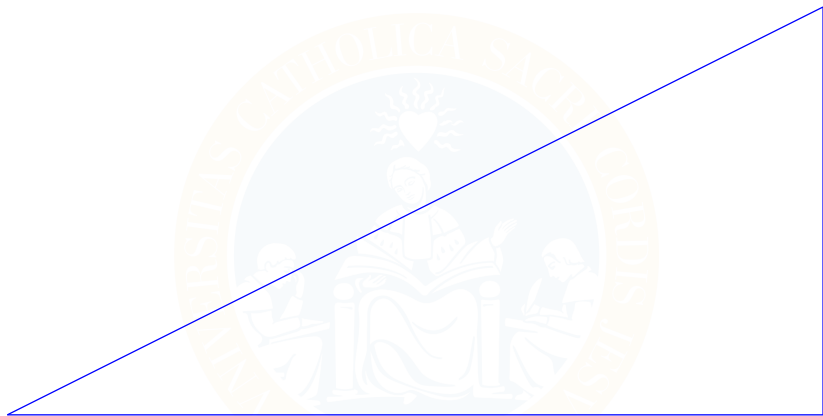
Alessandro Musesti - Università Cattolica del Sacro Cuore

Tassellazione "a sedia"

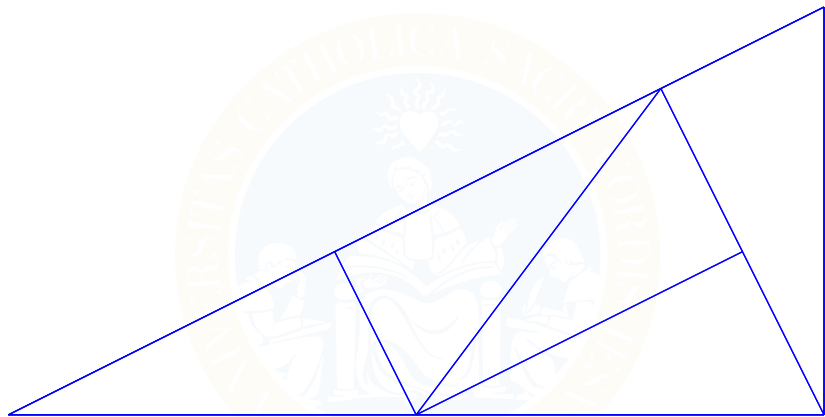




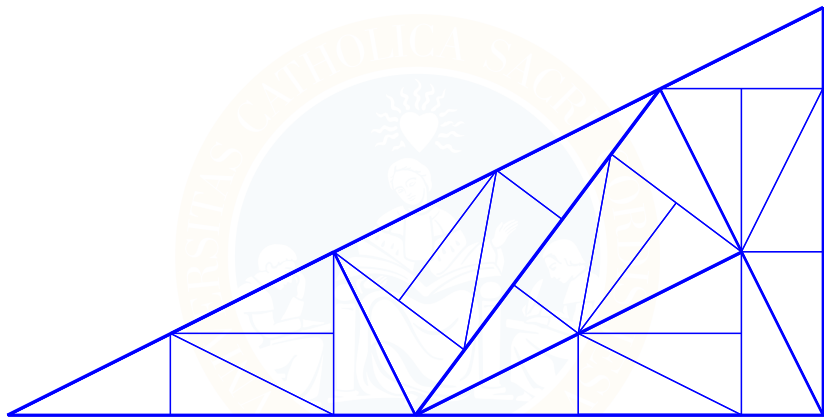
Tassellazione “a girandola”



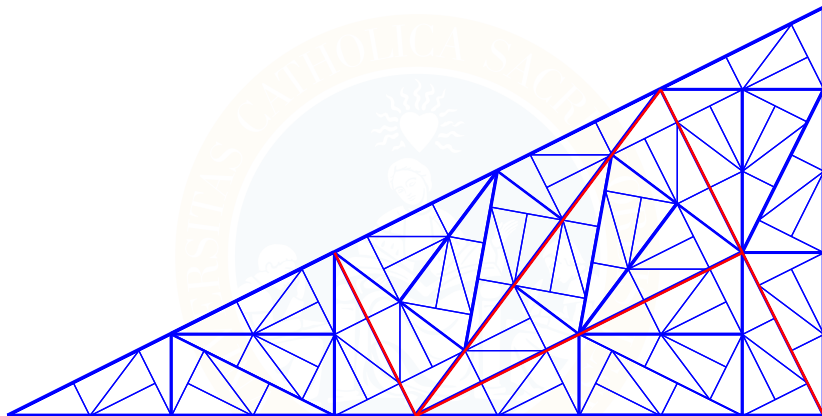
Tassellazione “a girandola”

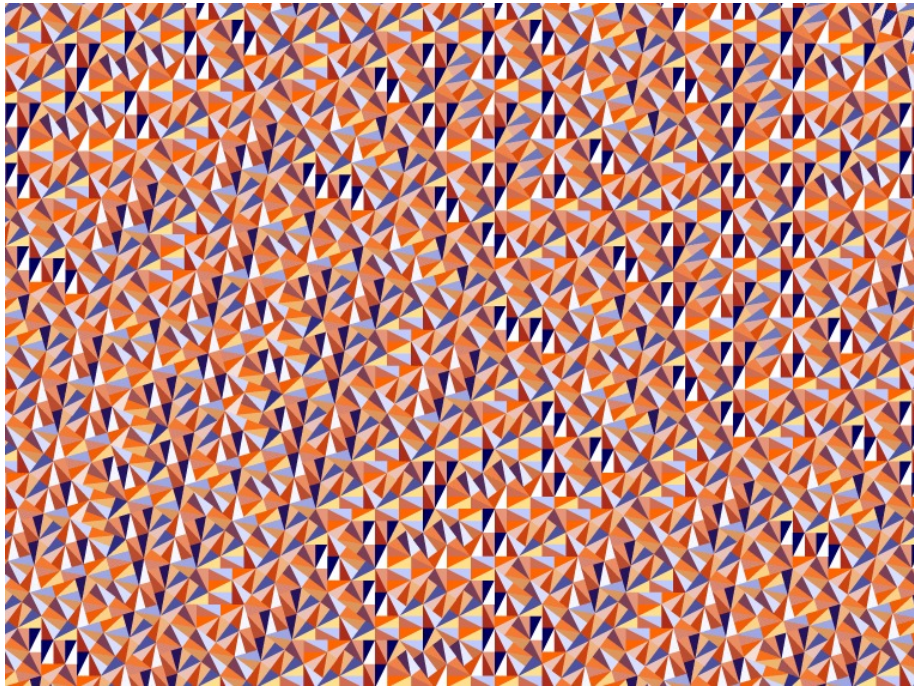


Tassellazione “a girandola”



Tassellazione “a girandola”





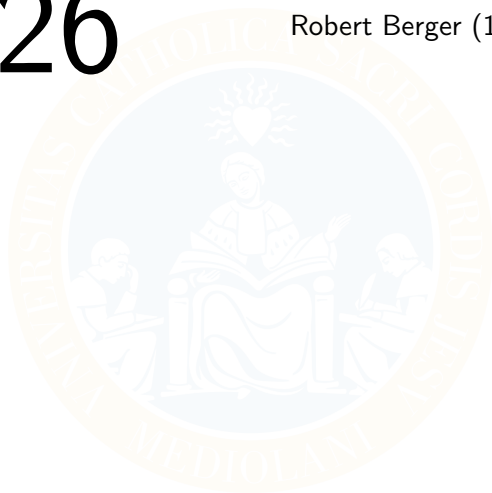
È possibile trovare delle piastrelle che coprono il piano solo in modo non periodico? Di quanti tipi devono essere?



È possibile trovare delle piastrelle che coprono il piano solo in modo non periodico? Di quanti tipi devono essere?

20426

Robert Berger (1966)



È possibile trovare delle piastrelle che coprono il piano solo in modo non periodico? Di quanti tipi devono essere?

20426

Robert Berger (1966)

6

Raphael Robinson (1971)



È possibile trovare delle piastrelle che coprono il piano solo in modo non periodico? Di quanti tipi devono essere?

20426

Robert Berger (1966)

6

Raphael Robinson (1971)



2

Roger Penrose (1973)



È possibile trovare delle piastrelle che coprono il piano solo in modo non periodico? Di quanti tipi devono essere?

20426

Robert Berger (1966)

6

Raphael Robinson (1971)



2

Roger Penrose (1973)

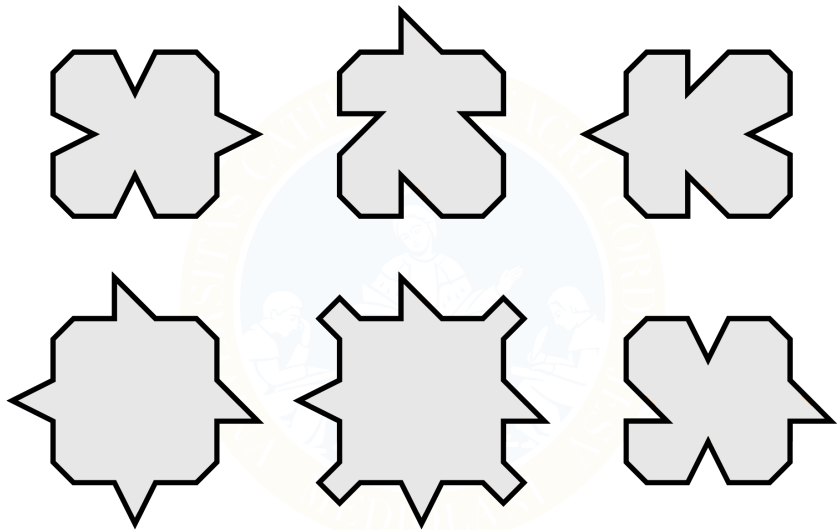


1

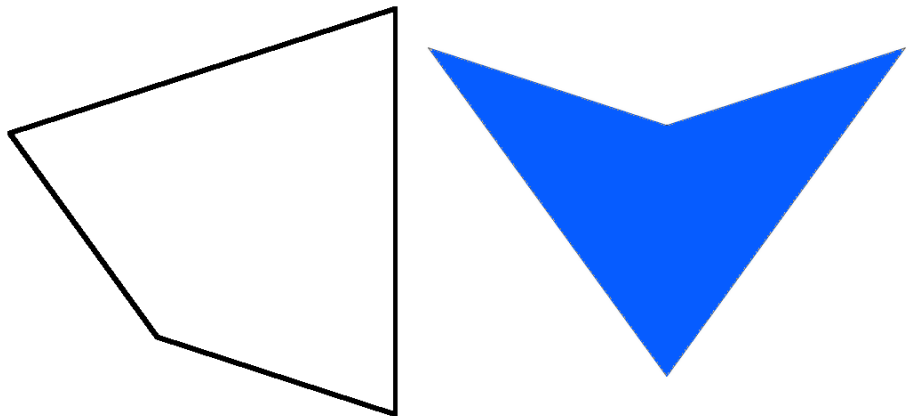
??

??

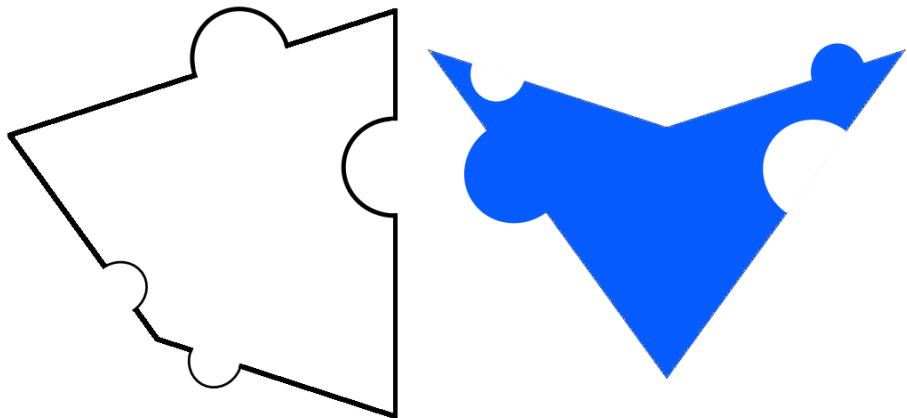
I sei tasselli di Robinson

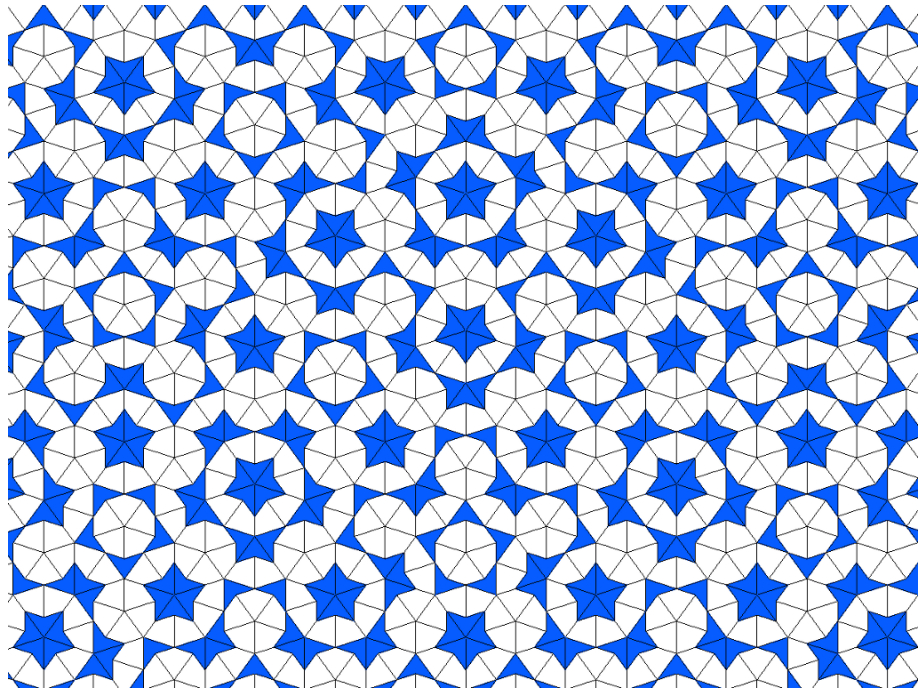


I due tasselli di Penrose: frecce e aquiloni



I due tasselli di Penrose: frecce e aquiloni

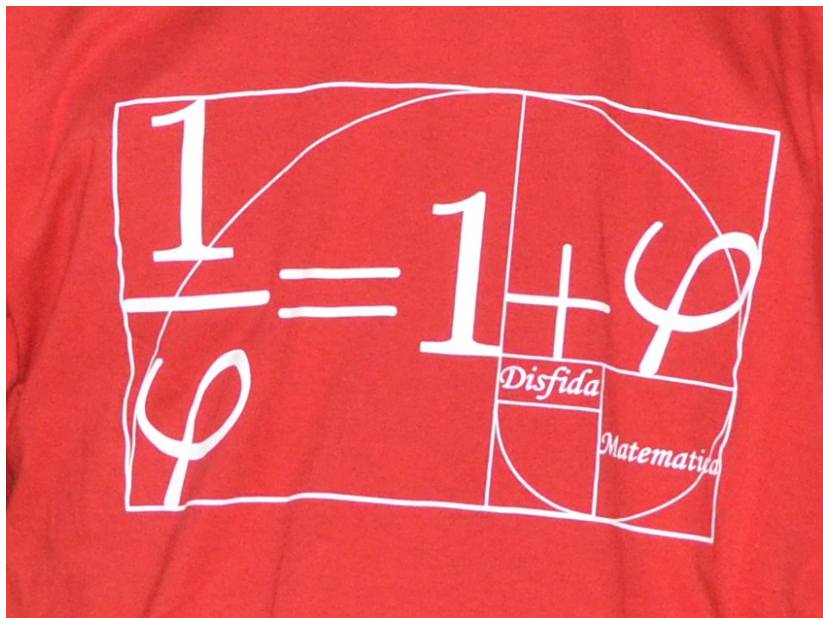




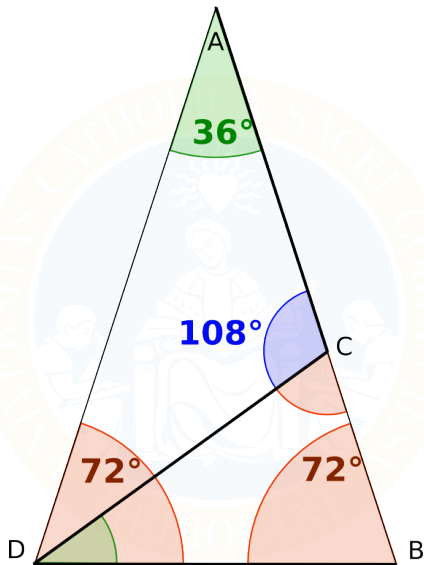
Come sono fatti i tasselli di Penrose?



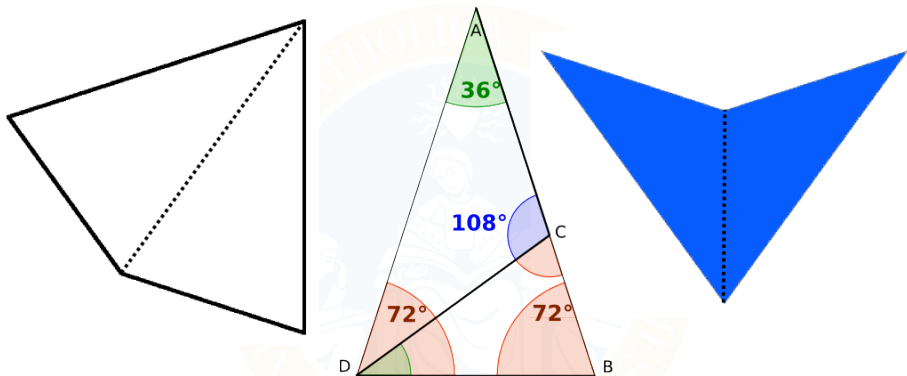
Come sono fatti i tasselli di Penrose?

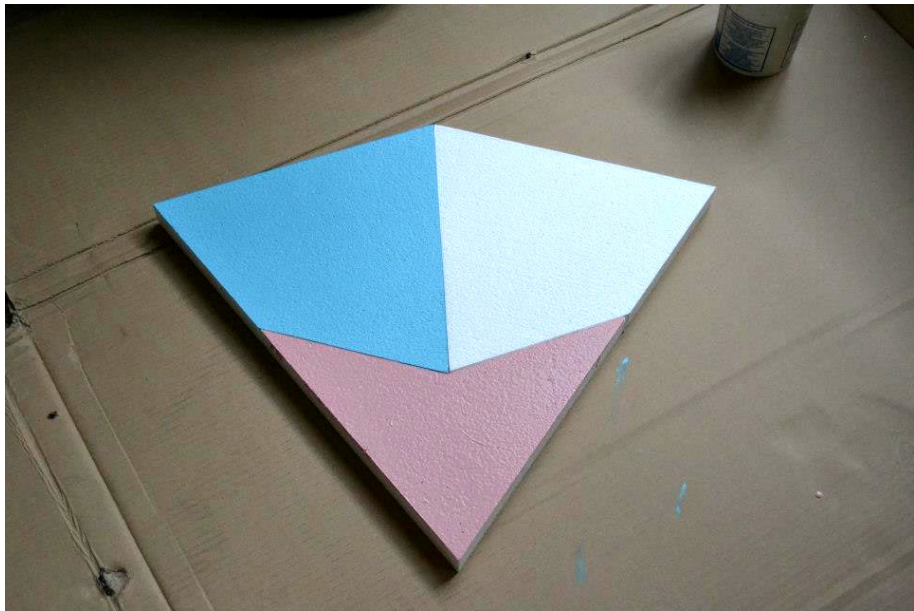


I triangoli aurei



I triangoli aurei compongono frecce e aquiloni

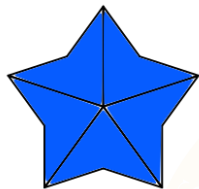






Alessandro Musesti - Università Cattolica del Sacro Cuore

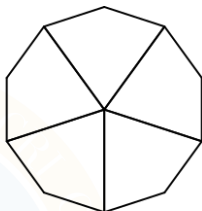
I vertici della tassellazione



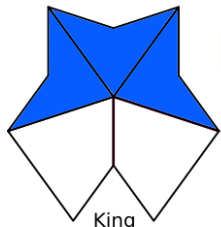
Star



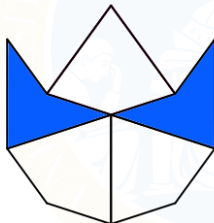
Ace



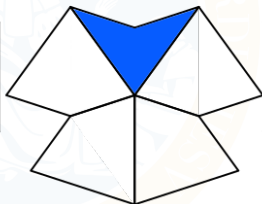
Sun



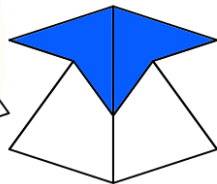
King



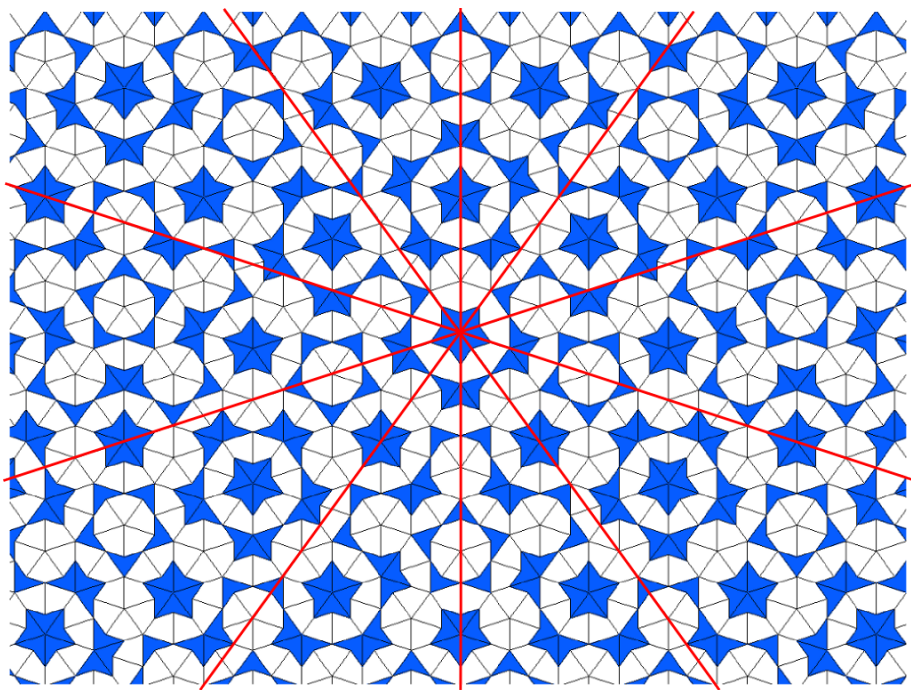
Jack



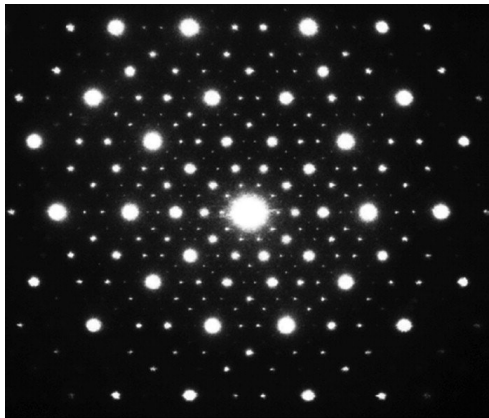
Queen



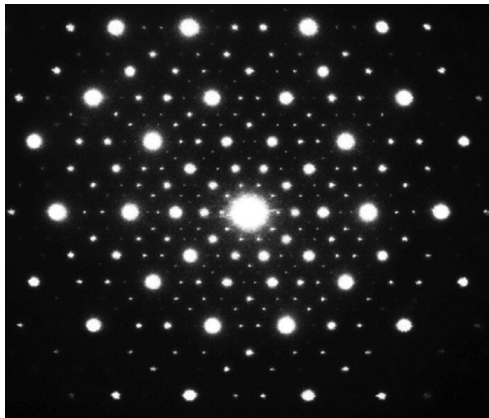
Deuce



La simmetria decagonale

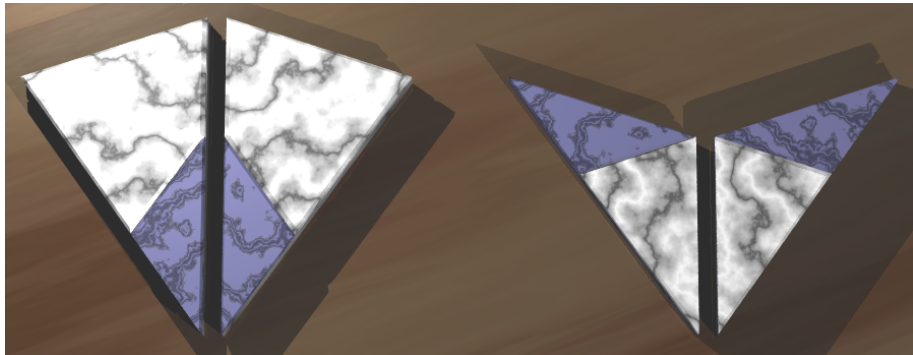


La simmetria decagonale

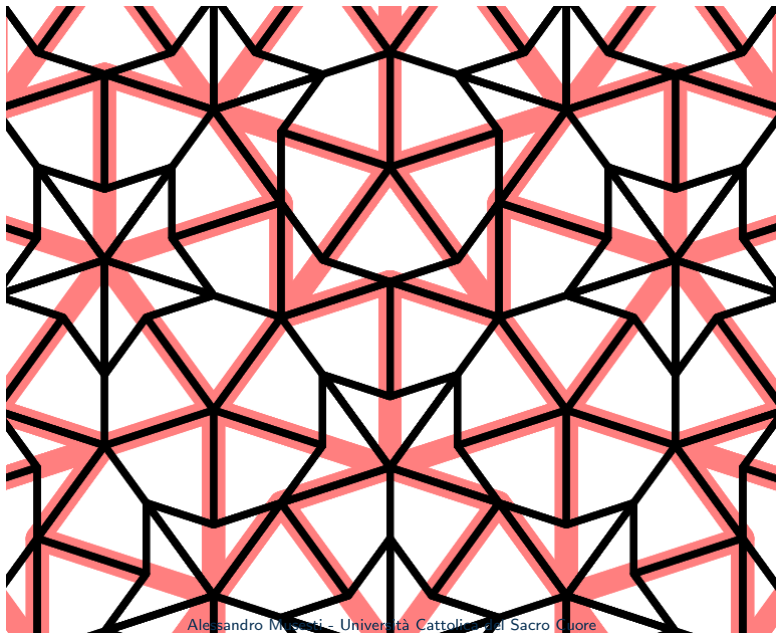


Dan Shechtman: Nobel 2011
per la chimica

Suddivisione dei tasselli



Suddivisione e inflazione



Un approfondimento: papillon e Batman

