L'azzardo calcolato

Usare la matematica per imparare a (non) giocare

a cura di Alessandro Musesti

Università Cattolica del Sacro Cuore, Brescia

Itinerari di educazione civica

2 dicembre 2020

L'inizio del calcolo delle probabilità

Il cavaliere de Méré, attorno al 1650, era solito proporre due scommesse:

L'inizio del calcolo delle probabilità

Il cavaliere de Méré, attorno al 1650, era solito proporre due scommesse:

(1) Scommettiamo che lanciando un dado quattro volte, uscirà un *sei* almeno una volta

L'inizio del calcolo delle probabilità

Il cavaliere de Méré, attorno al 1650, era solito proporre due scommesse:

(1) Scommettiamo che lanciando un dado quattro volte, uscirà un *sei* almeno una volta
(2) Scommettiamo che lanciando due dadi ventiquattro volte, uscirà un *doppio sei* almeno una volta

L'inizio del calcolo delle probabilità

Il cavaliere de Méré, attorno al 1650, era solito proporre due scommesse:

(1) Scommettiamo che lanciando un dado quattro volte, uscirà un *sei* almeno una volta
(2) Scommettiamo che lanciando due dadi ventiquattro volte, uscirà un *doppio sei* almeno una volta

Nel suo ragionamento le due scommesse dovevano avere la stessa probabilità di vittoria:

(1) quattro possibilità per un caso favorevole su sei
(2) ventiquattro $(6 \cdot 4)$ possibilità per un caso su trentasei $(6 \cdot 6)$

L'inizio del calcolo delle probabilità

Il cavaliere de Méré, attorno al 1650, era solito proporre due scommesse:

(1) Scommettiamo che lanciando un dado quattro volte, uscirà un *sei* almeno una volta
(2) Scommettiamo che lanciando due dadi ventiquattro volte, uscirà un *doppio sei* almeno una volta

Nel suo ragionamento le due scommesse dovevano avere la stessa probabilità di vittoria:

(1) quattro possibilità per un caso favorevole su sei
(2) ventiquattro $(6 \cdot 4)$ possibilità per un caso su trentasei $(6 \cdot 6)$

Eppure si accorse che se scommetteva sulla prima vinceva e se scommetteva sulla seconda perdeva. . .

La probabilità

Se i casi sono tutti *equiprobabili*:

$$P(\text{evento}) = \frac{\text{numero di casi favorevoli}}{\text{numero di casi possibili}}$$

La probabilità

Se i casi sono tutti *equiprobabili*:

$$P(\text{evento}) = \frac{\text{numero di casi favorevoli}}{\text{numero di casi possibili}}$$

La probabilità di un evento è un numero compreso tra 0 e 1. Per esprimerla come percentuale, basta moltiplicarla per 100.

La probabilità

Se i casi sono tutti *equiprobabili*:

$$P(\text{evento}) = \frac{\text{numero di casi favorevoli}}{\text{numero di casi possibili}}$$

La probabilità di un evento è un numero compreso tra 0 e 1. Per esprimerla come percentuale, basta moltiplicarla per 100.

$P = 1$: evento *certo* $\qquad$ $P = 0$: evento *impossibile*

La probabilità

Se i casi sono tutti *equiprobabili*:

$$P(\text{evento}) = \frac{\text{numero di casi favorevoli}}{\text{numero di casi possibili}}$$

La probabilità di un evento è un numero compreso tra 0 e 1. Per esprimerla come percentuale, basta moltiplicarla per 100.

$P = 1$: evento *certo* $\qquad$ $P = 0$: evento *impossibile*

$1 - P(\text{evento})$: è la probabilità che l'evento *non* succeda

La probabilità

Se i casi sono tutti *equiprobabili*:

$$P(\text{evento}) = \frac{\text{numero di casi favorevoli}}{\text{numero di casi possibili}}$$

La probabilità di un evento è un numero compreso tra 0 e 1. Per esprimerla come percentuale, basta moltiplicarla per 100.

$P = 1$: evento *certo* $\qquad$ $P = 0$: evento *impossibile*

$1 - P(\text{evento})$: è la probabilità che l'evento *non* succeda

Esempio: lancio di un dado.

$$P(\{1\}) = \frac{1}{6} = 16,\overline{6}\% \qquad P(\{2,4,6\}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 50\%$$

La probabilità

Se i casi sono tutti *equiprobabili*:

$$P(\text{evento}) = \frac{\text{numero di casi favorevoli}}{\text{numero di casi possibili}}$$

La probabilità di un evento è un numero compreso tra 0 e 1. Per esprimerla come percentuale, basta moltiplicarla per 100.

$P = 1$: evento *certo* $\qquad$ $P = 0$: evento *impossibile*

$1 - P(\text{evento})$: è la probabilità che l'evento *non* succeda

Esempio: lancio di un dado.

$$P(\{1\}) = \frac{1}{6} = 16,\overline{6}\% \qquad P(\{2,4,6\}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 50\%$$

Quindi de Méré pensava di vincere con probabilità $P = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} = 66,\overline{6}\%$

Blaise Pascal

Ma non era così! Il cavaliere de Méré si rivolse dunque all'amico Blaise Pascal, il grande matematico e filosofo francese. Pascal ragionò così:

Blaise Pascal

Ma non era così! Il cavaliere de Méré si rivolse dunque all'amico Blaise Pascal, il grande matematico e filosofo francese. Pascal ragionò così: (1) La probabilità che *non* esca un sei in un lancio è $\frac{5}{6}$. Quindi la probabilità che non esca un sei in quattro lanci è

$$\frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = \left(\frac{5}{6}\right)^4 .$$

Blaise Pascal

Ma non era così! Il cavaliere de Méré si rivolse dunque all'amico Blaise Pascal, il grande matematico e filosofo francese. Pascal ragionò così:
(1) La probabilità che *non* esca un sei in un lancio è $\frac{5}{6}$. Quindi la probabilità che non esca un sei in quattro lanci è

$$\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}=\left(\frac{5}{6}\right)^4.$$

Allora la probabilità che *esca almeno* un sei è

$$1-\left(\frac{5}{6}\right)^4$$

Blaise Pascal

Ma non era così! Il cavaliere de Méré si rivolse dunque all'amico Blaise Pascal, il grande matematico e filosofo francese. Pascal ragionò così:
(1) La probabilità che *non* esca un sei in un lancio è $\frac{5}{6}$. Quindi la probabilità che non esca un sei in quattro lanci è

$$\frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = \left(\frac{5}{6}\right)^4 .$$

Allora la probabilità che *esca almeno* un sei è

$$1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4 = \frac{6^4 - 5^4}{6^4}$$

Blaise Pascal

Ma non era così! Il cavaliere de Méré si rivolse dunque all'amico Blaise Pascal, il grande matematico e filosofo francese. Pascal ragionò così:
(1) La probabilità che *non* esca un sei in un lancio è $\frac{5}{6}$. Quindi la probabilità che non esca un sei in quattro lanci è

$$\frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = \left(\frac{5}{6}\right)^4 .$$

Allora la probabilità che *esca almeno* un sei è

$$1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4 = \frac{6^4 - 5^4}{6^4} = \frac{671}{1296} \simeq 0.5177 = 51,77\%$$

Blaise Pascal

Ma non era così! Il cavaliere de Méré si rivolse dunque all'amico Blaise Pascal, il grande matematico e filosofo francese. Pascal ragionò così:
(1) La probabilità che *non* esca un sei in un lancio è $\frac{5}{6}$. Quindi la probabilità che non esca un sei in quattro lanci è

$$\frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = \left(\frac{5}{6}\right)^4 .$$

Allora la probabilità che *esca almeno* un sei è

$$1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4 = \frac{6^4 - 5^4}{6^4} = \frac{671}{1296} \simeq 0.5177 = 51,77\%$$

Quindi la scommessa è favorevole all'uscita di almeno un sei (anche se con probabilità ben più bassa del 66%).

Blaise Pascal

(2) La probabilità che *non* esca un doppio sei in un lancio è $\frac{35}{36}$. Quindi la probabilità che non esca un sei in ventiquattro lanci è

$$\left(\frac{35}{36}\right)^{24}.$$

Blaise Pascal

(2) La probabilità che *non* esca un doppio sei in un lancio è $\frac{35}{36}$. Quindi la probabilità che non esca un sei in ventiquattro lanci è

$$\left(\frac{35}{36}\right)^{24}.$$

Allora la probabilità che *esca almeno* un doppio sei è

$$1-\left(\frac{35}{36}\right)^{24} = \frac{36^{24}-35^{24}}{36^{24}} =$$

(2) La probabilità che *non* esca un doppio sei in un lancio è $\frac{35}{36}$. Quindi la probabilità che non esca un sei in ventiquattro lanci è

$$\left(\frac{35}{36}\right)^{24}.$$

Allora la probabilità che *esca almeno* un doppio sei è

$$1-\left(\frac{35}{36}\right)^{24}=\frac{36^{24}-35^{24}}{36^{24}}=\frac{11033126465283976852912127963392284191}{22452257707354557240087211123792674816}\simeq 0.4914$$

Blaise Pascal

(2) La probabilità che *non* esca un doppio sei in un lancio è $\frac{35}{36}$. Quindi la probabilità che non esca un sei in ventiquattro lanci è

$$\left(\frac{35}{36}\right)^{24}.$$

Allora la probabilità che *esca almeno* un doppio sei è

$$1-\left(\frac{35}{36}\right)^{24}=\frac{36^{24}-35^{24}}{36^{24}}=\frac{11033126465283976852912127963392284191}{22452257707354557240087211123792674816}\simeq 0.4914$$

Quindi la scommessa è *sfavorevole* all'uscita di almeno un doppio sei!

Blaise Pascal

(2) La probabilità che *non* esca un doppio sei in un lancio è $\frac{35}{36}$. Quindi la probabilità che non esca un sei in ventiquattro lanci è

$$\left(\frac{35}{36}\right)^{24}.$$

Allora la probabilità che *esca almeno* un doppio sei è

$$1-\left(\frac{35}{36}\right)^{24}=\frac{36^{24}-35^{24}}{36^{24}}=\frac{11033126465283976852912127963392284191}{22452257707354557240087211123792674816}\simeq 0.4914$$

Quindi la scommessa è *sfavorevole* all'uscita di almeno un doppio sei!

Per rispondere alla domanda, Pascal *inventò* il calcolo delle probabilità, che poi perfezionò insieme a Pierre de Fermat.

Gioco equo?

Il progetto BetOnMath, del Politecnico di Milano, comincia proponendo un gioco a testa o croce. Si gioca in tre (due giocatori più il banco) e si lanciano contemporaneamente due monete:

Gioco equo?

Il progetto BetOnMath, del Politecnico di Milano, comincia proponendo un gioco a testa o croce. Si gioca in tre (due giocatori più il banco) e si lanciano contemporaneamente due monete:

- se escono due teste, vince il giocatore A
- se escono due croci, vince il giocatore B
- se escono una testa e una croce, vince il banco

Gioco equo?

Il progetto BetOnMath, del Politecnico di Milano, comincia proponendo un gioco a testa o croce. Si gioca in tre (due giocatori più il banco) e si lanciano contemporaneamente due monete:

- se escono due teste, vince il giocatore A
- se escono due croci, vince il giocatore B
- se escono una testa e una croce, vince il banco

Poiché gli esiti possibili sono solo tre (due teste, due croci, una testa e una croce), il gioco sembra equo.

Gioco equo?

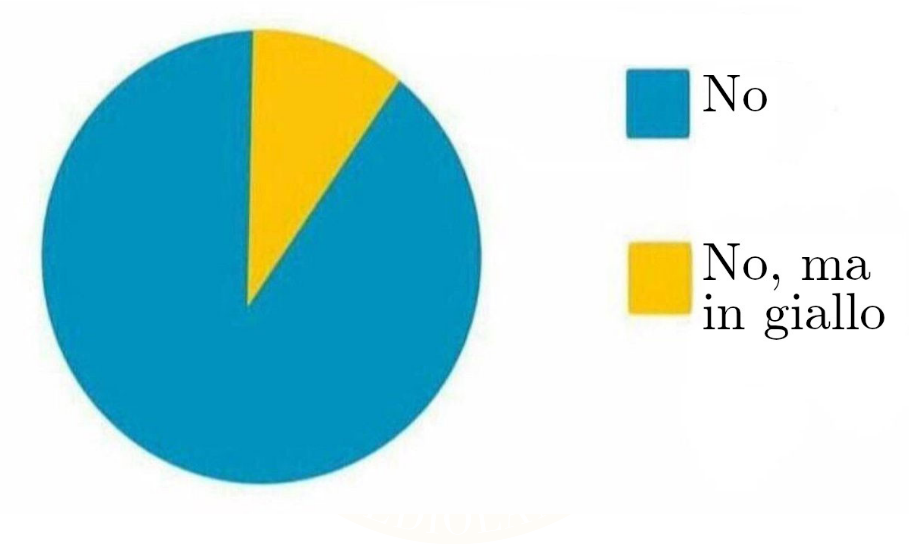
Il progetto BetOnMath, del Politecnico di Milano, comincia proponendo un gioco a testa o croce. Si gioca in tre (due giocatori più il banco) e si lanciano contemporaneamente due monete:

- se escono due teste, vince il giocatore A
- se escono due croci, vince il giocatore B
- se escono una testa e una croce, vince il banco

Poiché gli esiti possibili sono solo tre (due teste, due croci, una testa e una croce), il gioco sembra equo.

Voi giochereste?

Risultati del sondaggio



Il concetto di valore atteso

Il *valore atteso* di una giocata è il "guadagno medio" che mi aspetto di avere se effettuo la giocata tantissime volte.

Il concetto di valore atteso

Il *valore atteso* di una giocata è il "guadagno medio" che mi aspetto di avere se effettuo la giocata tantissime volte.
Esso è legato alla probabilità degli eventi, e si calcola moltiplicando il guadagno di un evento per la relativa probabilità, e sommando su tutti gli eventi.

Il concetto di valore atteso

Il *valore atteso* di una giocata è il "guadagno medio" che mi aspetto di avere se effettuo la giocata tantissime volte.
Esso è legato alla probabilità degli eventi, e si calcola moltiplicando il guadagno di un evento per la relativa probabilità, e sommando su tutti gli eventi.
Ad esempio, se in un gioco a testa o croce guadagniamo 100 se esce testa e perdiamo 50 se esce croce, avremo un valore atteso di

$$E = 100 \cdot \frac{1}{2} + (-50) \cdot \frac{1}{2} = 25.$$

Il concetto di valore atteso

Il *valore atteso* di una giocata è il "guadagno medio" che mi aspetto di avere se effettuo la giocata tantissime volte.
Esso è legato alla probabilità degli eventi, e si calcola moltiplicando il guadagno di un evento per la relativa probabilità, e sommando su tutti gli eventi.
Ad esempio, se in un gioco a testa o croce guadagniamo 100 se esce testa e perdiamo 50 se esce croce, avremo un valore atteso di

$$E = 100 \cdot \frac{1}{2} + (-50) \cdot \frac{1}{2} = 25.$$

Quindi se giochiamo tante volte a questo gioco, ci aspettiamo di guadagnare in media 25 ad ogni giocata.

Il valore atteso per le due monete

Supponiamo che al gioco delle due monete ognuno metta 1 euro per partecipare, e che chi vince prenda tutto il piatto.

Il valore atteso per le due monete

Supponiamo che al gioco delle due monete ognuno metta 1 euro per partecipare, e che chi vince prenda tutto il piatto.
Se i tre eventi (TT, CC, TC) fossero equiprobabili si avrebbe

$$E = 2 \cdot \frac{1}{3} + (-1) \cdot \frac{1}{3} + (-1) \cdot \frac{1}{3} = 0$$

e quindi il gioco sarebbe equo.

Il valore atteso per le due monete

Supponiamo che al gioco delle due monete ognuno metta 1 euro per partecipare, e che chi vince prenda tutto il piatto.
Se i tre eventi (TT, CC, TC) fossero equiprobabili si avrebbe

$$E = 2 \cdot \frac{1}{3} + (-1) \cdot \frac{1}{3} + (-1) \cdot \frac{1}{3} = 0$$

e quindi il gioco sarebbe equo.
In realtà si ha $P(TT) = P(CC) = \frac{1}{4}$ e $P(TC) = \frac{1}{2}$, quindi

$$E = 2 \cdot \frac{1}{4} + (-1) \cdot \frac{1}{4} + (-1) \cdot \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$$

e quindi per chi scommette su TT il gioco è in perdita.

La roulette

Ora calcoliamo le probabilità di vincita di alcuni giochi molto diffusi. Nella roulette la puntata su un singolo numero viene pagata 35 volte la posta. Le possibilità di vincita però sono una su 37 (per la presenza dello zero) o addirittura una su 38 (nella roulette americana, dove c'è anche il doppio zero).

La roulette

Ora calcoliamo le probabilità di vincita di alcuni giochi molto diffusi.
Nella roulette la puntata su un singolo numero viene pagata 35 volte la posta. Le possibilità di vincita però sono una su 37 (per la presenza dello zero) o addirittura una su 38 (nella roulette americana, dove c'è anche il doppio zero).
Si può calcolare il *valore atteso* del gioco, ovvero quanto si guadagna in media ad ogni giocata:

$$\frac{1}{37} \cdot 35 + \frac{36}{37} \cdot (-1) = -\frac{1}{37} \simeq -0.027$$

ovvero per ogni euro giocato sul singolo numero, in media si perdono 2,7 centesimi.

La roulette

Ora calcoliamo le probabilità di vincita di alcuni giochi molto diffusi.
Nella roulette la puntata su un singolo numero viene pagata 35 volte la posta. Le possibilità di vincita però sono una su 37 (per la presenza dello zero) o addirittura una su 38 (nella roulette americana, dove c'è anche il doppio zero).
Si può calcolare il *valore atteso* del gioco, ovvero quanto si guadagna in media ad ogni giocata:

$$\frac{1}{37} \cdot 35 + \frac{36}{37} \cdot (-1) = -\frac{1}{37} \simeq -0.027$$

ovvero per ogni euro giocato sul singolo numero, in media si perdono 2,7 centesimi.
Con la roulette americana è un po' peggio:

$$\frac{1}{38} \cdot 35 + \frac{37}{38} \cdot (-1) = -\frac{1}{19} \simeq -0.053$$

quindi si perdono in media poco più di 5 centesimi per ogni euro giocato.

La roulette: rosso e nero

Anche la giocata al rosso e nero è in perdita: si hanno 18 possibilità su 37 di raddoppiare la posta e 19 su 37 di perderla. Il valore atteso è:

$$\frac{18}{37} \cdot 1 + \frac{19}{37} \cdot (-1) = -\frac{1}{37} \simeq -0.027$$

esattamente come giocare sul singolo numero.

La roulette: rosso e nero

Anche la giocata al rosso e nero è in perdita: si hanno 18 possibilità su 37 di raddoppiare la posta e 19 su 37 di perderla. Il valore atteso è:

$$\frac{18}{37} \cdot 1 + \frac{19}{37} \cdot (-1) = -\frac{1}{37} \simeq -0.027$$

esattamente come giocare sul singolo numero.
Per la roulette americana:

$$\frac{18}{38} \cdot 1 + \frac{20}{38} \cdot (-1) = -\frac{1}{19} \simeq -0.053$$

anche qui esattamente uguale alla giocata sul singolo numero.

La roulette: rosso e nero

Anche la giocata al rosso e nero è in perdita: si hanno 18 possibilità su 37 di raddoppiare la posta e 19 su 37 di perderla. Il valore atteso è:

$$\frac{18}{37} \cdot 1 + \frac{19}{37} \cdot (-1) = -\frac{1}{37} \simeq -0.027$$

esattamente come giocare sul singolo numero.
Per la roulette americana:

$$\frac{18}{38} \cdot 1 + \frac{20}{38} \cdot (-1) = -\frac{1}{19} \simeq -0.053$$

anche qui esattamente uguale alla giocata sul singolo numero.

Se si fanno i conti con tutte le altre giocate, risulta sempre la stessa perdita: 0,027 euro sulla roulette tradizionale e 0,053 su quella americana, per ogni euro giocato.

La roulette: rosso e nero

Anche la giocata al rosso e nero è in perdita: si hanno 18 possibilità su 37 di raddoppiare la posta e 19 su 37 di perderla. Il valore atteso è:

$$\frac{18}{37} \cdot 1 + \frac{19}{37} \cdot (-1) = -\frac{1}{37} \simeq -0.027$$

esattamente come giocare sul singolo numero.
Per la roulette americana:

$$\frac{18}{38} \cdot 1 + \frac{20}{38} \cdot (-1) = -\frac{1}{19} \simeq -0.053$$

anche qui esattamente uguale alla giocata sul singolo numero.

Se si fanno i conti con tutte le altre giocate, risulta sempre la stessa perdita: 0,027 euro sulla roulette tradizionale e 0,053 su quella americana, per ogni euro giocato.

Seppur di poco, la roulette è un gioco in perdita!

La Lotteria della Certezza

Gioca anche tu alla **Lotteria della Certezza**:
ogni biglietto vince **sicuramente 4,87 euro!**

Costo del biglietto: 5 euro…

La Lotteria della Certezza

Gioca anche tu alla **Lotteria della Certezza**: ogni biglietto vince **sicuramente 4,87 euro!**

Costo del biglietto: 5 euro...

Il Lotto

Veniamo al gioco del lotto: qui i conti sono un po' più complicati.
La giocata più semplice è indovinare un singolo numero su una ruota: poiché ci sono 90 numeri e ne vengono estratti 5, si hanno $\frac{5}{90} = \frac{1}{18}$ possibilità di vincere. Il sito di Lottomatica riporta che la vincita in questo caso è 11,23 euro per ogni euro giocato.

Il Lotto

Veniamo al gioco del lotto: qui i conti sono un po' più complicati.
La giocata più semplice è indovinare un singolo numero su una ruota: poiché ci sono 90 numeri e ne vengono estratti 5, si hanno $\frac{5}{90} = \frac{1}{18}$ possibilità di vincere. Il sito di Lottomatica riporta che la vincita in questo caso è 11,23 euro per ogni euro giocato.
Il valore atteso quindi è

$$\frac{1}{18} \cdot 11.23 + \frac{17}{18} \cdot (-1) = -0.32$$

ovvero si perdono in media 32 centesimi per ogni euro giocato (circa un terzo).

Il Lotto

Veniamo al gioco del lotto: qui i conti sono un po' più complicati.
La giocata più semplice è indovinare un singolo numero su una ruota: poiché ci sono 90 numeri e ne vengono estratti 5, si hanno $\frac{5}{90} = \frac{1}{18}$ possibilità di vincere. Il sito di Lottomatica riporta che la vincita in questo caso è 11,23 euro per ogni euro giocato.
Il valore atteso quindi è

$$\frac{1}{18} \cdot 11.23 + \frac{17}{18} \cdot (-1) = -0.32$$

ovvero si perdono in media 32 centesimi per ogni euro giocato (circa un terzo).

E le cose peggiorano con le altre giocate.

Il Lotto: la cinquina

Ad esempio, per la cinquina il lotto paga 6 milioni di euro per ogni euro giocato (tasse escluse). Una bella cifra!

Il Lotto: la cinquina

Ad esempio, per la cinquina il lotto paga 6 milioni di euro per ogni euro giocato (tasse escluse). Una bella cifra!
Ma qual è la probabilità di indovinare tutti e cinque i numeri estratti su una ruota? Si hanno 5 possibilità su 90 per il primo estratto, 4 su 89 per il secondo, poi 3 su 88 per il terzo, due su 87 per il quarto, una su 86 per l'ultimo. In totale, facendo il prodotto:

$$\frac{5}{90}\frac{4}{89}\frac{3}{88}\frac{2}{87}\frac{1}{86} = \frac{1}{43949268}$$

quindi si ha una possibilità su 43 milioni di fare cinquina.

Il Lotto: la cinquina

Ad esempio, per la cinquina il lotto paga 6 milioni di euro per ogni euro giocato (tasse escluse). Una bella cifra!
Ma qual è la probabilità di indovinare tutti e cinque i numeri estratti su una ruota? Si hanno 5 possibilità su 90 per il primo estratto, 4 su 89 per il secondo, poi 3 su 88 per il terzo, due su 87 per il quarto, una su 86 per l'ultimo. In totale, facendo il prodotto:

$$\frac{5}{90}\frac{4}{89}\frac{3}{88}\frac{2}{87}\frac{1}{86} = \frac{1}{43949268}$$

quindi si ha una possibilità su 43 milioni di fare cinquina.
In questo caso il valore medio è:

$$\frac{1}{43949268} \cdot 6000000 + \frac{43949267}{43949268} \cdot (-1) \simeq -0.86$$

ovvero si perdono in media 86 centesimi per ogni euro giocato.

Il Lotto: la cinquina

Ad esempio, per la cinquina il lotto paga 6 milioni di euro per ogni euro giocato (tasse escluse). Una bella cifra!
Ma qual è la probabilità di indovinare tutti e cinque i numeri estratti su una ruota? Si hanno 5 possibilità su 90 per il primo estratto, 4 su 89 per il secondo, poi 3 su 88 per il terzo, due su 87 per il quarto, una su 86 per l'ultimo. In totale, facendo il prodotto:

$$\frac{5}{90}\frac{4}{89}\frac{3}{88}\frac{2}{87}\frac{1}{86} = \frac{1}{43949268}$$

quindi si ha una possibilità su 43 milioni di fare cinquina.
In questo caso il valore medio è:

$$\frac{1}{43949268} \cdot 6000000 + \frac{43949267}{43949268} \cdot (-1) \simeq -0.86$$

ovvero si perdono in media 86 centesimi per ogni euro giocato.

Ma chi ce lo fa fare di giocare al Lotto??

La Lotteria della Cinquina

Gioca anche tu alla **Lotteria della Cinquina**:
ogni biglietto vince **sicuramente 70 centesimi di euro!**

Costo del biglietto: 5 euro...

La Lotteria della Cinquina

Gioca anche tu alla **Lotteria della Cinquina**:
ogni biglietto vince **sicuramente 70 centesimi di euro!**

Costo del biglietto: 5 euro. . .

Il Lotto: i ritardatari

Un brevissimo discorso sui numeri ritardatari: **non** hanno più probabilità degli altri di uscire!

È vero che nella Teoria delle probabilità si dimostra la *Legge dei grandi numeri* (Teorema di Bernoulli), per cui al crescere del numero delle estrazioni la frequenza di uscita di ogni numero tende alla sua probabilità, cioè $1/18$. Questo vuol dire che se il numero di estrazioni tende all'infinito, allora ogni numero si presenta su ogni ruota in media una volta ogni 18 estrazioni.

Ma questo non ci dice niente su un numero piccolo di estrazioni, come 100 o 200 (i numeri "centenari"). Ad ogni estrazione, ogni numero ha la stessa probabilità di uscire della volta precedente.

Messaggio finale: è inutile giocare sui ritardatari...

Intermezzo: i coefficienti binomiali

Un modo più diretto per calcolare la probabilità di fare una cinquina è quello di calcolare il numero di tutte le cinquine possibili, che si denota con

$$\binom{90}{5}$$

In generale, $\binom{n}{k}$ denota il numero di sottoinsiemi di k elementi presi in un insieme di n elementi, e si ha

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n}{[1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots k][1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-k)]}$$

quindi

$$\binom{90}{5} = \frac{90!}{5!\,85!} = \frac{90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87 \cdot 86}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 3 \cdot 89 \cdot 22 \cdot 87 \cdot 86 = 43949268$$

Giochi in cui il banco non salta mai

Ci sono poi giochi in cui il banco non potrà mai perdere! È il caso del Superenalotto, che alcuni anni fa riscuoteva un enorme successo (in esso bisogna indovinare i sei numeri estratti tra 90).

Giochi in cui il banco non salta mai

Ci sono poi giochi in cui il banco non potrà mai perdere! È il caso del Superenalotto, che alcuni anni fa riscuoteva un enorme successo (in esso bisogna indovinare i sei numeri estratti tra 90).
I premi del Superenalotto infatti sono il 60% dei soldi che sono stati giocati. Quindi più la gente gioca e più si alzano i premi, e il gestore del gioco guadagna il 40% senza correre alcun rischio.

Giochi in cui il banco non salta mai

Ci sono poi giochi in cui il banco non potrà mai perdere! È il caso del Superenalotto, che alcuni anni fa riscuoteva un enorme successo (in esso bisogna indovinare i sei numeri estratti tra 90).
I premi del Superenalotto infatti sono il 60% dei soldi che sono stati giocati. Quindi più la gente gioca e più si alzano i premi, e il gestore del gioco guadagna il 40% senza correre alcun rischio.

Le possibilità di fare sei al Superenalotto sono

$$\text{una su } \binom{90}{6} = 622\,614\,630$$

quindi affinché valga la pena di giocare un euro (il costo di una giocata) il premio per il sei dovrebbe superare i 622 milioni di euro!

Giochi in cui il banco non salta mai

Ci sono poi giochi in cui il banco non potrà mai perdere! È il caso del Superenalotto, che alcuni anni fa riscuoteva un enorme successo (in esso bisogna indovinare i sei numeri estratti tra 90).
I premi del Superenalotto infatti sono il 60% dei soldi che sono stati giocati. Quindi più la gente gioca e più si alzano i premi, e il gestore del gioco guadagna il 40% senza correre alcun rischio.

Le possibilità di fare sei al Superenalotto sono

$$\text{una su } \binom{90}{6} = 622\,614\,630$$

quindi affinché valga la pena di giocare un euro (il costo di una giocata) il premio per il sei dovrebbe superare i 622 milioni di euro!

Il più alto premio per un sei si è avuto ad agosto 2019: 209 milioni di euro, ben lontano dai seicento milioni. Nel momento in cui scrivo c'è un montepremi di 68 milioni di euro...

Le scommesse sportive

Partita	1	X	2
Krasnodar - Siviglia	5.0	4.0	1.65
Rennes - Chelsea	5.0	4.0	1.65
Borussia Dortmund - Club Bruges	1.25	6.0	11.0
Dinamo Kiev - Barcellona	7.0	4.75	1.44
Juventus - Ferencvarosi TC	1.08	11.0	26.0
Lazio - Zenit S. Pietroburgo	1.7	4.0	4.75
Manchester United - Istanbul Basaksehir	1.22	6.5	12.0
Paris Saint Germain - RB Lipsia	1.57	4.5	5.25
Borussia Mgladbach - Shakhtar Donetsk	1.53	4.5	5.5
Olympiakos - Manchester City	10.0	5.5	1.3
Ajax - Midtjylland	1.3	5.75	9.0
Atletico Madrid - Lokomotiv Mosca	1.2	6.5	15.0
Bayern Monaco - FC Salisburgo	1.18	7.5	13.0
Inter - Real Madrid	2.15	3.8	3.1
Liverpool - Atalanta	1.61	4.5	4.75
Marsiglia - Porto	2.75	3.3	2.6

Quote

Le **quote** sono il reciproco delle probabilità

Quote

Le **quote** sono il reciproco delle probabilità

Partita	1	X	2
Juventus - Ferencvarosi TC	1.08	11.0	26.0
Lazio - Zenit S. Pietroburgo	1.7	4.0	4.75
Inter - Real Madrid	2.15	3.8	3.1
Liverpool - Atalanta	1.61	4.5	4.75

Quote

Le **quote** sono il reciproco delle probabilità

Partita	$p(1)$	$p(X)$	$p(2)$
Juventus - Ferencvarosi TC	0.926	0.091	0.038
Lazio - Zenit S. Pietroburgo	0.588	0.250	0.211
Inter - Real Madrid	0.465	0.263	0.323
Liverpool - Atalanta	0.621	0.222	0.211

Quote

Le **quote** sono il reciproco delle probabilità

Partita	$p(1)$	$p(X)$	$p(2)$	somma
Juventus - Ferencvarosi TC	0.926	0.091	0.038	1.049
Lazio - Zenit S. Pietroburgo	0.588	0.250	0.211	1.057
Inter - Real Madrid	0.465	0.263	0.323	1.051
Liverpool - Atalanta	0.621	0.222	0.211	1.054

Quote

Le **quote** sono il reciproco delle probabilità

Partita	$p(1)$	$p(X)$	$p(2)$	somma
Juventus - Ferencvarosi TC	0.926	0.091	0.038	1.049
Lazio - Zenit S. Pietroburgo	0.588	0.250	0.211	1.057
Inter - Real Madrid	0.465	0.263	0.323	1.051
Liverpool - Atalanta	0.621	0.222	0.211	1.054

Osservate: $p(1) + p(X) + p(2) > 1$

Quote e probabilità

Partita	1	X	2
Krasnodar - Siviglia	0.200	0.250	0.606
Rennes - Chelsea	0.200	0.250	0.606
Borussia Dortmund - Club Bruges	0.800	0.167	0.091
Dinamo Kiev - Barcellona	0.143	0.211	0.694
Juventus - Ferencvarosi TC	0.926	0.091	0.038
Lazio - Zenit S. Pietroburgo	0.588	0.250	0.211
Manchester United - Istanbul Basaksehir	0.820	0.154	0.083
Paris Saint Germain - RB Lipsia	0.637	0.222	0.190
Borussia Mgladbach - Shakhtar Donetsk	0.654	0.222	0.182
Olympiakos - Manchester City	0.100	0.182	0.769
Ajax - Midtjylland	0.769	0.174	0.111
Atletico Madrid - Lokomotiv Mosca	0.833	0.154	0.067
Bayern Monaco - FC Salisburgo	0.847	0.133	0.077
Inter - Real Madrid	0.465	0.263	0.323
Liverpool - Atalanta	0.621	0.222	0.211
Marsiglia - Porto	0.364	0.303	0.385

Quote e probabilità

Partita	1	X	2	somma
Krasnodar - Siviglia	0.200	0.250	0.606	1.056
Rennes - Chelsea	0.200	0.250	0.606	1.056
Borussia Dortmund - Club Bruges	0.800	0.167	0.091	1.058
Dinamo Kiev - Barcellona	0.143	0.211	0.694	1.048
Juventus - Ferencvarosi TC	0.926	0.091	0.038	1.055
Lazio - Zenit S. Pietroburgo	0.588	0.250	0.211	1.049
Manchester United - Istanbul Basaksehir	0.820	0.154	0.083	1.057
Paris Saint Germain - RB Lipsia	0.637	0.222	0.190	1.050
Borussia Mgladbach - Shakhtar Donetsk	0.654	0.222	0.182	1.058
Olympiakos - Manchester City	0.100	0.182	0.769	1.051
Ajax - Midtjylland	0.769	0.174	0.111	1.054
Atletico Madrid - Lokomotiv Mosca	0.833	0.154	0.067	1.054
Bayern Monaco - FC Salisburgo	0.847	0.133	0.077	1.058
Inter - Real Madrid	0.465	0.263	0.323	1.051
Liverpool - Atalanta	0.621	0.222	0.211	1.054
Marsiglia - Porto	0.364	0.303	0.385	1.051

Perché $p(1) + p(X) + p(2) > 1$?

Supponiamo di scommettere 1 euro su X: qual è il *valore atteso* del guadagno?

Perché $p(1) + p(X) + p(2) > 1$?

Supponiamo di scommettere 1 euro su X: qual è il *valore atteso* del guadagno?

$$p(1)(-1) + p(X)\left(\frac{1}{p(X)} - 1\right) + p(2)(-1) =$$

Perché $p(1) + p(X) + p(2) > 1$?

Supponiamo di scommettere 1 euro su X: qual è il *valore atteso* del guadagno?

$$p(1)(-1) + p(X)\left(\frac{1}{p(X)} - 1\right) + p(2)(-1) = 1 - \Big(p(1) + p(X) + p(2)\Big) < 0$$

Perché $p(1) + p(X) + p(2) > 1$?

Supponiamo di scommettere 1 euro su X: qual è il *valore atteso* del guadagno?

$$p(1)(-1) + p(X)\left(\frac{1}{p(X)} - 1\right) + p(2)(-1) = 1 - \Big(p(1) + p(X) + p(2)\Big) < 0$$

Anche questo gioco è sempre in perdita!

Le scommesse sportive: quanto si perde?

Valori attesi delle partite di Champions League:

-0.056, -0.056, -0.058, -0.048, -0.055, -0.049, -0.057, -0.050, -0.058, -0.051, -0.054, -0.054, -0.058, -0.051, -0.054, -0.051

Le scommesse sportive: quanto si perde?

Valori attesi delle partite di Champions League:

-0.056, -0.056, -0.058, -0.048, -0.055, -0.049, -0.057, -0.050, -0.058, -0.051, -0.054, -0.054, -0.058, -0.051, -0.054, -0.051

Valori attesi delle partite di Europa League:

-0.065, -0.059, -0.062, -0.068, -0.065, -0.062, -0.064, -0.068, -0.071, -0.069, -0.070, -0.062, -0.064, -0.072, -0.074, -0.069, -0.068, -0.060, -0.070, -0.058, -0.076, -0.070, -0.064

Le scommesse sportive: quanto si perde?

Valori attesi delle partite di Champions League:

-0.056, -0.056, -0.058, -0.048, -0.055, -0.049, -0.057, -0.050, -0.058, -0.051, -0.054, -0.054, -0.058, -0.051, -0.054, -0.051

Valori attesi delle partite di Europa League:

-0.065, -0.059, -0.062, -0.068, -0.065, -0.062, -0.064, -0.068, -0.071, -0.069, -0.070, -0.062, -0.064, -0.072, -0.074, -0.069, -0.068, -0.060, -0.070, -0.058, -0.076, -0.070, -0.064

Valori attesi delle partite di Serie A:

-0.063, -0.060, -0.067, -0.060, -0.063, -0.066, -0.071, -0.052, -0.061

Le scommesse sportive: quanto si perde?

Valori attesi delle partite di Champions League:

-0.056, -0.056, -0.058, -0.048, -0.055, -0.049, -0.057, -0.050, -0.058, -0.051, -0.054, -0.054, -0.058, -0.051, -0.054, -0.051

Valori attesi delle partite di Europa League:

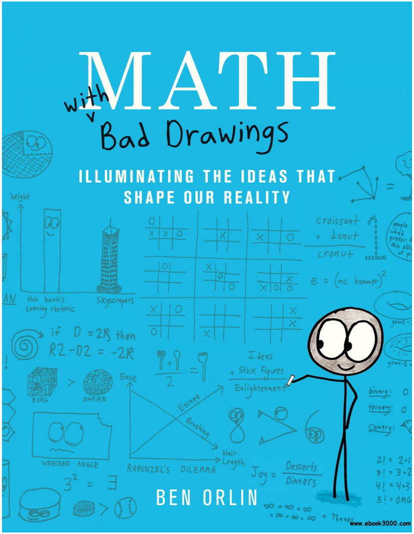
-0.065, -0.059, -0.062, -0.068, -0.065, -0.062, -0.064, -0.068, -0.071, -0.069, -0.070, -0.062, -0.064, -0.072, -0.074, -0.069, -0.068, -0.060, -0.070, -0.058, -0.076, -0.070, -0.064

Valori attesi delle partite di Serie A:

-0.063, -0.060, -0.067, -0.060, -0.063, -0.066, -0.071, -0.052, -0.061

La media è circa -0.061: ciò significa che per ogni euro giocato in media si perdono 6 centesimi. Più che alla roulette, meno che al Lotto.


PAOLO CANOVA • DIEGO RIZZUTO
fate il nostro
GIOCO
GRATTA E VINCI, AZZARDO
E MATEMATICA
add EDITORE


MATH
with Bad Drawings
ILLUMINATING THE IDEAS THAT
SHAPE OUR REALITY
BEN ORLIN
www.ebook3000.com

Bibliografia e sitografia

Paolo Canova, Diego Rizzuto, *Fate il nostro gioco. Gratta e vinci, azzardo e matematica*, ADD Editore, 2016
https://www.fateilnostrogioco.it/

Ben Orlin, *Math with Bad Drawings*, Black Dog & Leventhal, 2018
https://mathwithbaddrawings.com/

Chiara Andrà, Nicola Parolini, Marco Verani, *BetOnMath. Azzardo e matematica a scuola*, Springer, 2016
http://betonmath.polimi.it/

Federico Benuzzi, *La legge del perdente. La matematica come vaccino contro l'azzardopatia*, edizioni Dedalo, 2018
http://www.federicobenuzzi.com/

Grazie dell’attenzione