La matematica dei sistemi caotici

a cura di Alessandro Musesti

Università Cattolica del Sacro Cuore, Brescia

Complicazione vs. caos

$$\log_3 \sqrt[4]{27\sqrt[3]{\frac{1}{9\sqrt[3]{81}}}} + \log_5 125\sqrt{5\sqrt{\frac{\sqrt{5}}{125}}} + \log_3 \frac{\sqrt[3]{\frac{1}{3}\sqrt[3]{81}}}{\sqrt[4]{3\sqrt{\frac{1}{3}}}}$$

Complicazione vs. caos

$$\log_3 \sqrt[4]{27\sqrt[3]{\frac{1}{9\sqrt[3]{81}}}} + \log_5 125\sqrt{5\sqrt{\frac{\sqrt{5}}{125}}} + \log_3 \frac{\sqrt[3]{\frac{1}{3}\sqrt[3]{81}}}{\sqrt[4]{3\sqrt{\frac{1}{3}}}}$$

$$x_{n+1} = 4(1 - x_n)x_n$$

Complicazione vs. caos

$$\log_3 \sqrt[4]{27\sqrt[3]{\frac{1}{9\sqrt[3]{81}}}} + \log_5 125\sqrt{5\sqrt{\frac{\sqrt{5}}{125}}} + \log_3 \frac{\sqrt[3]{\frac{1}{3}\sqrt[3]{81}}}{\sqrt[4]{3\sqrt{\frac{1}{3}}}} = \boxed{\frac{10}{3}}$$

$$x_{n+1} = 4(1 - x_n)x_n$$

Complicazione vs. caos

$$\log_3 \sqrt[4]{27\sqrt[3]{\frac{1}{9\sqrt[3]{81}}}} + \log_5 125\sqrt{5\sqrt{\frac{\sqrt{5}}{125}}} + \log_3 \frac{\sqrt[3]{\frac{1}{3}\sqrt[3]{81}}}{\sqrt[4]{3\sqrt{\frac{1}{3}}}} = \boxed{\frac{10}{3}}$$

$$x_{n+1} = 4(1 - x_n)x_n \quad \to \quad \text{caos}$$

Complicazione vs. caos

$$\log_3 \sqrt[4]{27\sqrt[3]{\frac{1}{9\sqrt[3]{81}}}} + \log_5 125\sqrt{5\sqrt{\frac{\sqrt{5}}{125}}} + \log_3 \frac{\sqrt[3]{\frac{1}{3}\sqrt[3]{81}}}{\sqrt[4]{3\sqrt{\frac{1}{3}}}} = \boxed{\frac{10}{3}}$$

$$x_{n+1} = 4(1-x_n)x_n \quad \rightarrow \quad \text{caos}$$

$$\text{complicato} \quad \neq \quad \text{caotico}$$

Pierre-Simon Laplace (1749-1827)

Il Meccanicismo ottocentesco ed il sogno di Laplace:

Pierre-Simon Laplace (1749-1827)

Il Meccanicismo ottocentesco ed il sogno di Laplace:

"Un intelletto che ad un determinato istante dovesse conoscere tutte le forze che mettono in moto la natura, e tutte le posizioni di tutti gli oggetti di cui la natura è composta, se questo intelletto fosse inoltre sufficientemente ampio da sottoporre questi dati ad analisi, esso racchiuderebbe in un'unica formula i movimenti dei corpi più grandi dell'universo e quelli degli atomi più piccoli; per un tale intelletto nulla sarebbe incerto ed il futuro, proprio come il passato, sarebbe evidente davanti ai suoi occhi."

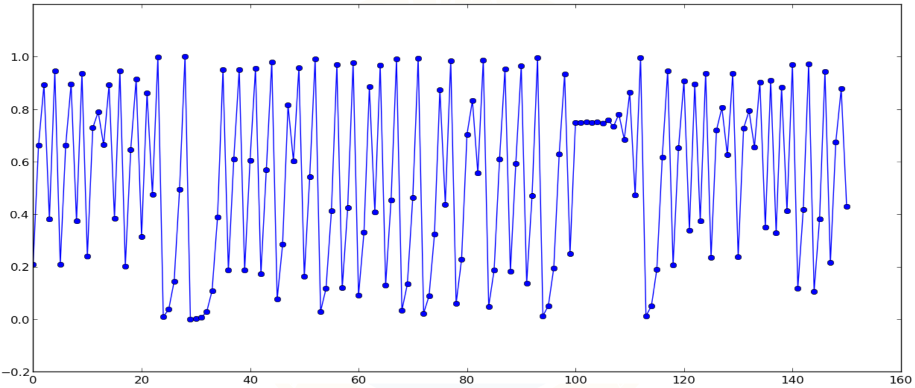
Pierre-Simon Laplace (1749-1827)

Il Meccanicismo ottocentesco ed il sogno di Laplace:

"Un intelletto che ad un determinato istante dovesse conoscere tutte le forze che mettono in moto la natura, e tutte le posizioni di tutti gli oggetti di cui la natura è composta, se questo intelletto fosse inoltre sufficientemente ampio da sottoporre questi dati ad analisi, esso racchiuderebbe in un'unica formula i movimenti dei corpi più grandi dell'universo e quelli degli atomi più piccoli; per un tale intelletto nulla sarebbe incerto ed il futuro, proprio come il passato, sarebbe evidente davanti ai suoi occhi."

Data la posizione e a velocità di tutte le particelle che compongono l'Universo, è possibile conoscere il loro moto ad ogni istante.

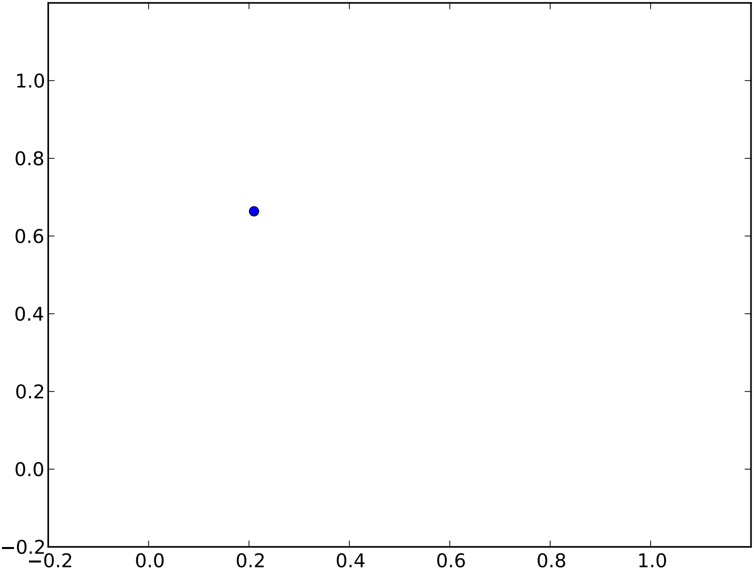
Successione casuale?



Successione casuale?

0.21, 0.6636, 0.8929, 0.3824, 0.9447, 0.2091, 0.6614, 0.8958, 0.3734, 0.9359, 0.2398, 0.7292, 0.7898, 0.6641, 0.8923, 0.3843, 0.9464, 0.2028, 0.6466, 0.914, 0.3143, 0.8621, 0.4756, 0.9976, 0.0095, 0.0376, 0.1446, 0.4947, 0.9999, 0.0004, 0.0018, 0.0071, 0.0281, 0.1091, 0.3888, 0.9506, 0.188, 0.6106, 0.951, 0.1862, 0.6062, 0.9549, 0.1722, 0.5702, 0.9803, 0.0772, 0.285, 0.8151, 0.6029, 0.9577, 0.1622, 0.5435, 0.9924, 0.03, 0.1165, 0.4119, 0.9689, 0.1205, 0.4238, 0.9768, 0.0908, 0.3302, 0.8846, 0.4082, 0.9663, 0.1303, 0.4533, 0.9913, 0.0345, 0.1333, 0.4622, 0.9943, 0.0227, 0.0886, 0.3231, 0.8749, 0.4379, 0.9846, 0.0607, 0.2281, 0.7042, 0.8332, 0.5558, 0.9875, 0.0493, 0.1874, 0.6091, 0.9524, 0.1814, 0.594, 0.9646, 0.1365, 0.4714, 0.9967, 0.0131, 0.0516, 0.1956, 0.6294, 0.933, 0.2501, 0.7501, 0.7498, 0.7505, 0.749, 0.752, 0.7461, 0.7578, 0.7341, 0.7807, 0.6848, 0.8634, 0.4718, 0.9968, 0.0127, 0.0501, 0.1904, 0.6165, 0.9457, 0.2053, 0.6527, 0.9067, 0.3383, 0.8954, 0.3746, 0.9371, 0.2356, 0.7204, 0.8057, 0.6263, 0.9362, 0.2389, 0.7272, 0.7935, 0.6555, 0.9032, 0.3496, 0.9095, 0.3291, 0.8832, 0.4127, 0.9695, 0.1183, 0.4173, 0.9726, 0.1065, 0.3806, 0.943, 0.2149, 0.6749, 0.8776, 0.3982

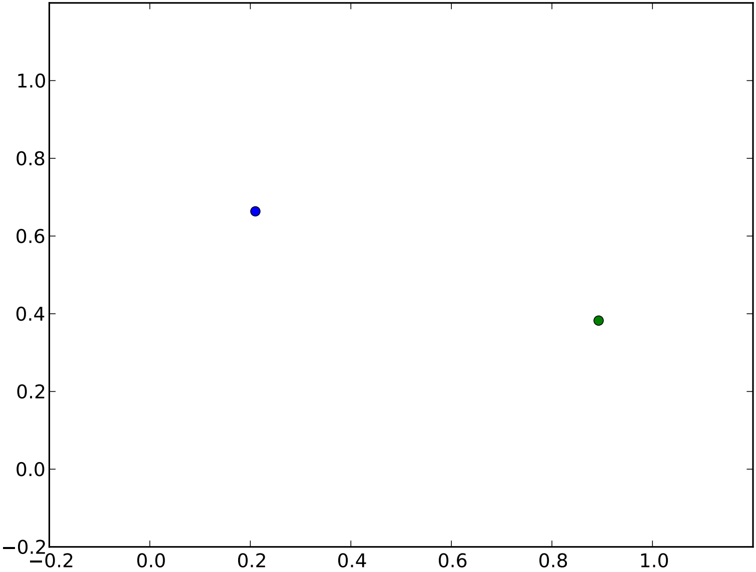
Ordine dal caos



Inizio

Fine

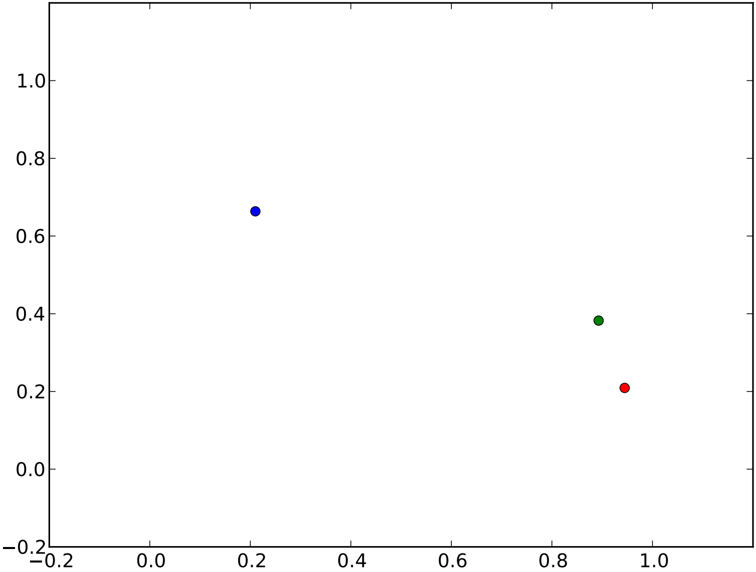
Ordine dal caos



Inizio

Fine

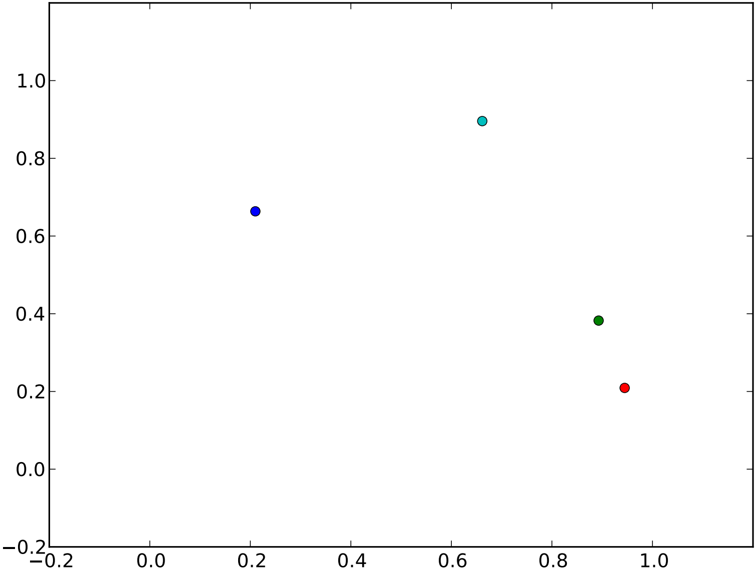
Ordine dal caos



Inizio

Fine

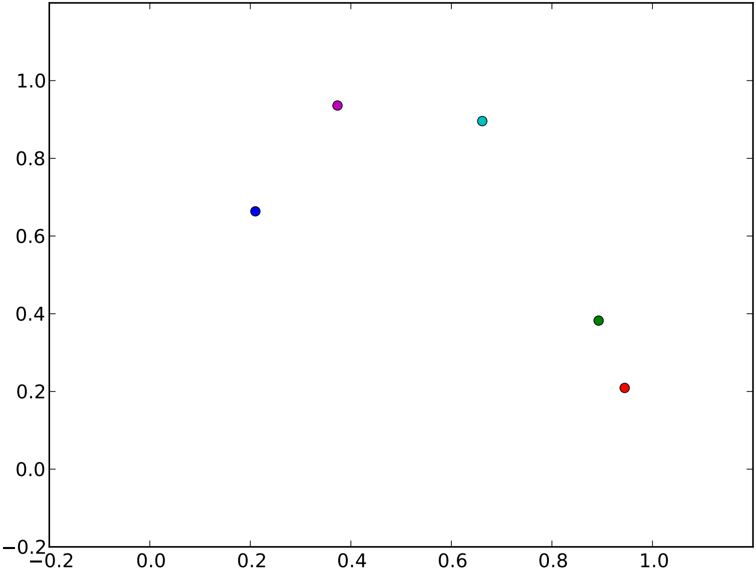
Ordine dal caos



Inizio

Fine

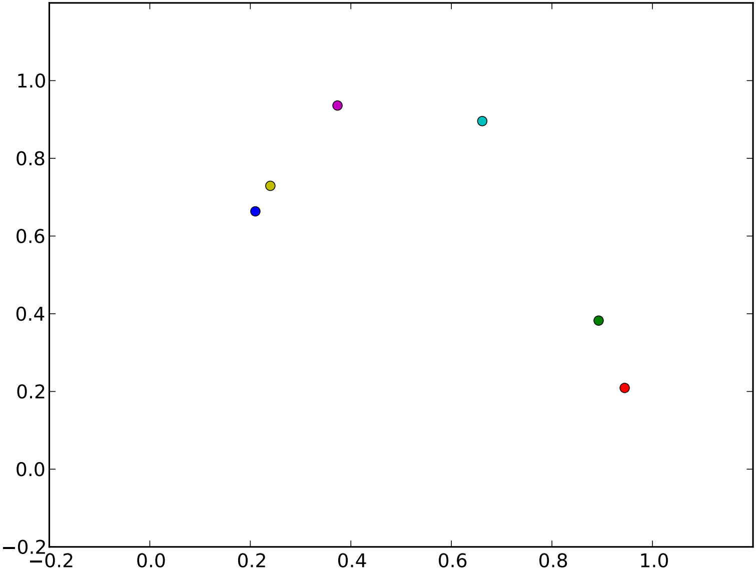
Ordine dal caos



Inizio

Fine

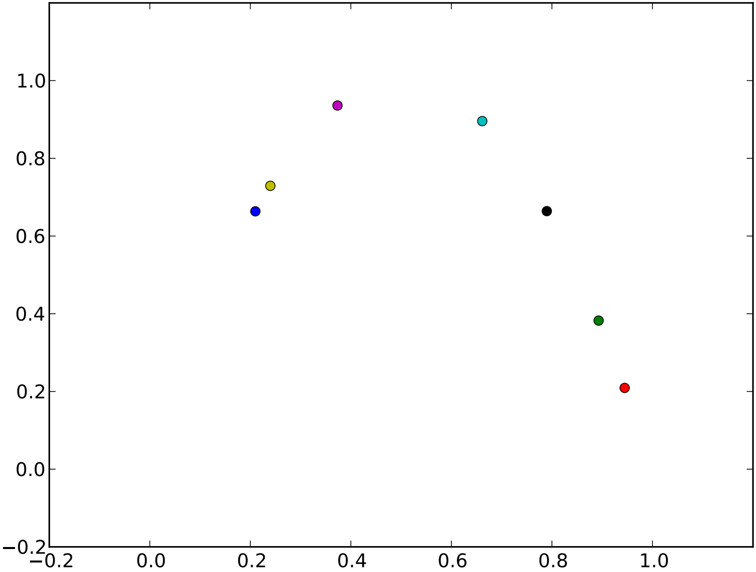
Ordine dal caos



Inizio

Fine

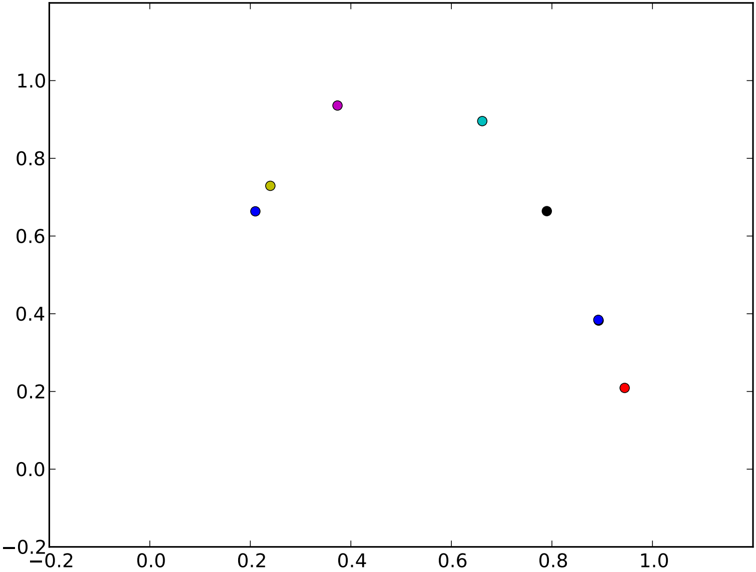
Ordine dal caos



Inizio

Fine

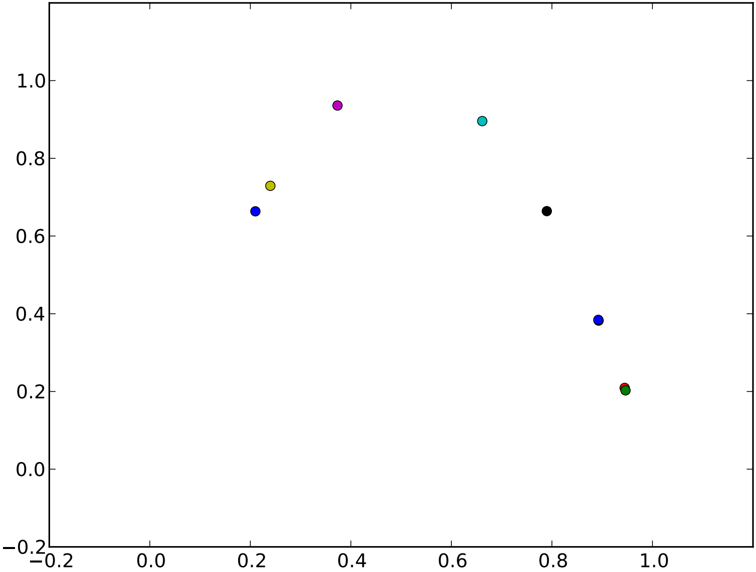
Ordine dal caos



Inizio

Fine

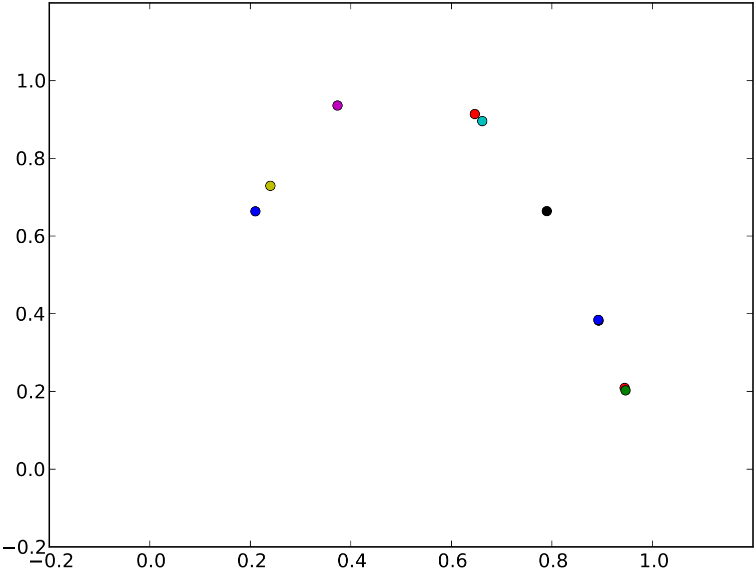
Ordine dal caos



Inizio

Fine

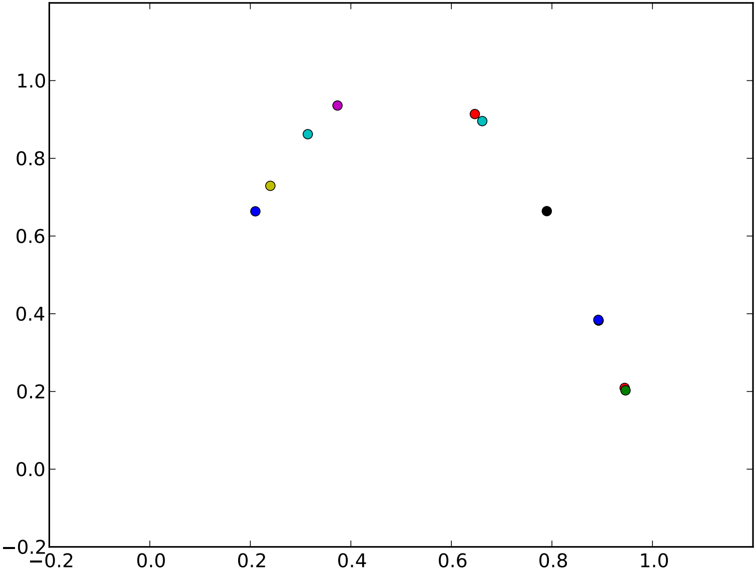
Ordine dal caos



Inizio

Fine

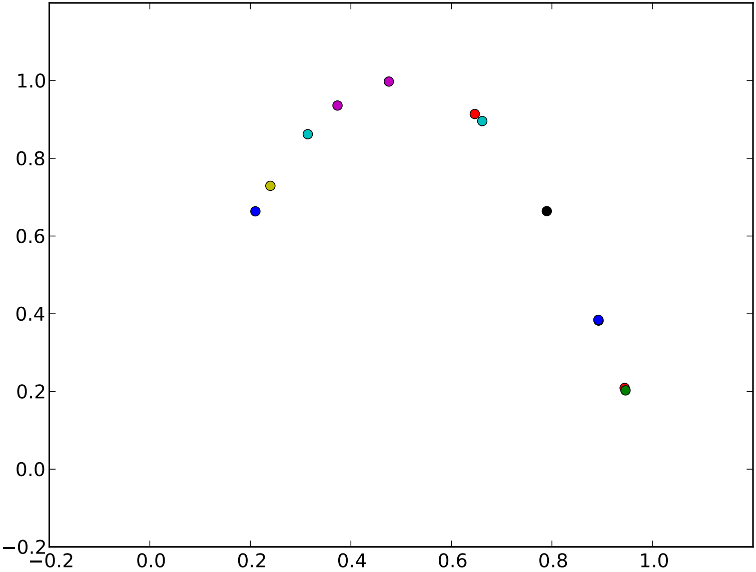
Ordine dal caos



Inizio

Fine

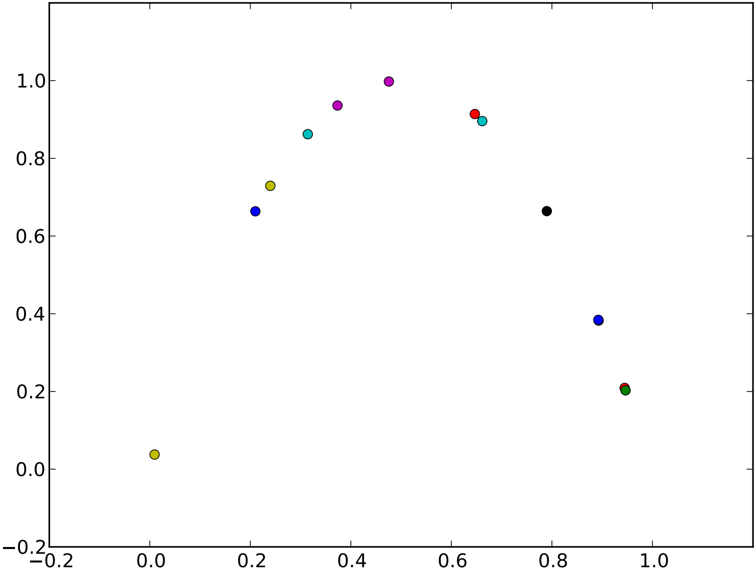
Ordine dal caos



Inizio

Fine

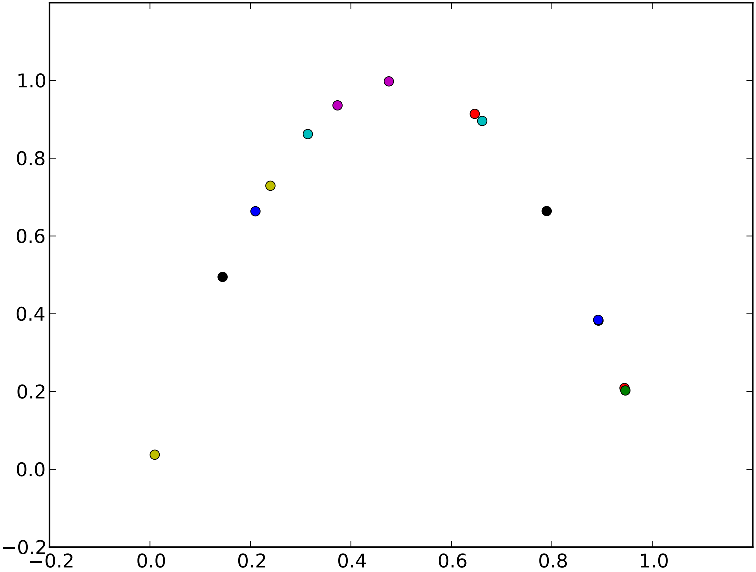
Ordine dal caos



Inizio

Fine

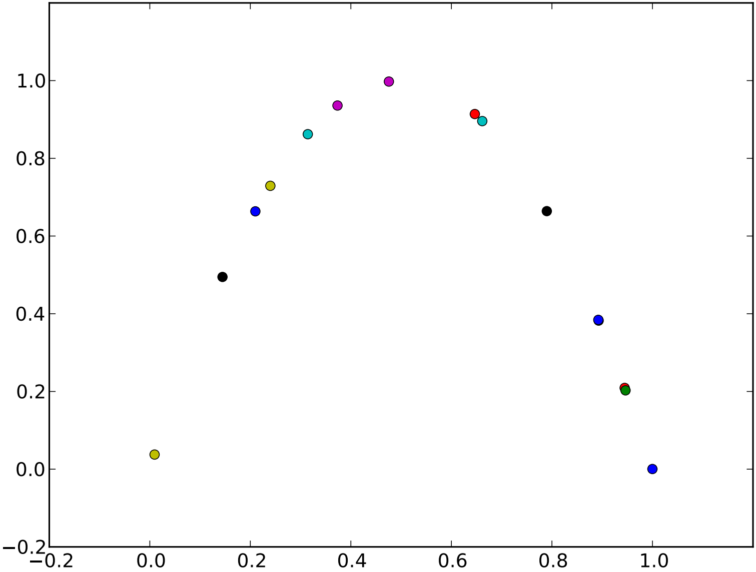
Ordine dal caos



Inizio

Fine

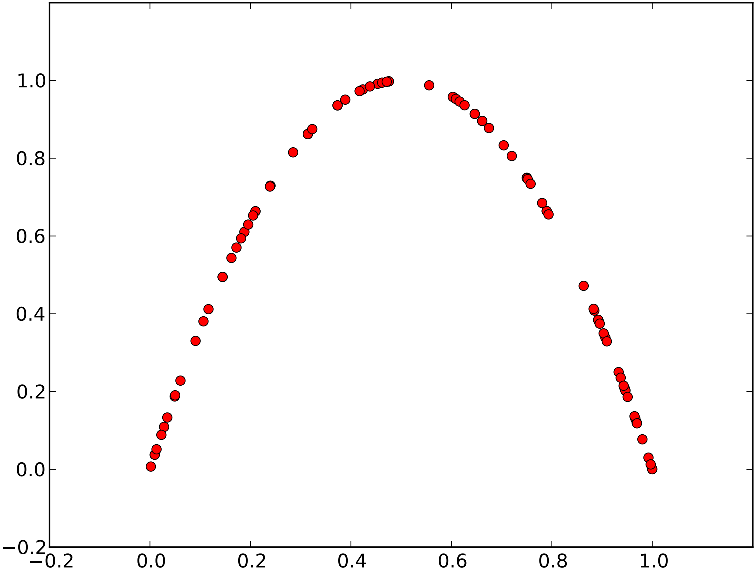
Ordine dal caos



Inizio

Fine

Ordine dal caos



Inizio

Fine

Sistemi dinamici discreti

Sono equazioni del tipo

$$x_{n+1} = f(x_n)$$

dove f è una funzione numerica.

Sistemi dinamici discreti

Sono equazioni del tipo

$$x_{n+1} = f(x_n)$$

dove f è una funzione numerica.
A partire dal numero x_0 (lo stato iniziale) si ricava

$$x_1 = f(x_0),$$

Sistemi dinamici discreti

Sono equazioni del tipo

$$x_{n+1} = f(x_n)$$

dove f è una funzione numerica.
A partire dal numero x_0 (lo stato iniziale) si ricava

$$x_1 = f(x_0), \quad x_2 = f(x_1) = f(f(x_0)),$$

Sistemi dinamici discreti

Sono equazioni del tipo

$$x_{n+1} = f(x_n)$$

dove f è una funzione numerica.
A partire dal numero x_0 (lo stato iniziale) si ricava

$$x_1 = f(x_0), \quad x_2 = f(x_1) = f(f(x_0)), \quad x_3 = f(x_2) = f(f(f(x_0))), \quad \dots$$

Sistemi dinamici discreti

Sono equazioni del tipo

$$x_{n+1} = f(x_n)$$

dove f è una funzione numerica.
A partire dal numero x_0 (lo stato iniziale) si ricava

$$x_1 = f(x_0), \quad x_2 = f(x_1) = f(f(x_0)), \quad x_3 = f(x_2) = f(f(f(x_0))), \quad \dots$$

Quindi per conoscere il sistema in un dato istante devo conoscere il sistema all'istante precedente.

Sistemi dinamici discreti

Sono equazioni del tipo

$$x_{n+1} = f(x_n)$$

dove f è una funzione numerica.
A partire dal numero x_0 (lo stato iniziale) si ricava

$$x_1 = f(x_0), \quad x_2 = f(x_1) = f(f(x_0)), \quad x_3 = f(x_2) = f(f(f(x_0))), \quad \dots$$

Quindi per conoscere il sistema in un dato istante devo conoscere il sistema all'istante precedente.
Uno dei sistemi dinamici discreti più famosi è la **mappa logistica**

$$x_{n+1} = ax_n(1 - x_n)$$

che può descrivere come cambia il numero di individui di una specie in un ambiente dalle risorse limitate.

Dove andremo a finire?

Una delle cose che interessano di più, quando si studia un sistema dinamico, è capire dove "vanno a finire" certe condizioni iniziali, ovvero qual è il limite della successione x_n se si parte da un certo dato iniziale x_0.

Dove andremo a finire?

Una delle cose che interessano di più, quando si studia un sistema dinamico, è capire dove "vanno a finire" certe condizioni iniziali, ovvero qual è il limite della successione x_n se si parte da un certo dato iniziale x_0.

Ad esempio, nella mappa logistica

$$x_{n+1} = ax_n(1 - x_n)$$

è chiaro che se la condizione iniziale è $x_0 = 0$, allora si avrà $x_n = 0$ per ogni n, e dunque anche il limite fa 0.

Dove andremo a finire?

Una delle cose che interessano di più, quando si studia un sistema dinamico, è capire dove "vanno a finire" certe condizioni iniziali, ovvero qual è il limite della successione x_n se si parte da un certo dato iniziale x_0.

Ad esempio, nella mappa logistica

$$x_{n+1} = a x_n (1 - x_n)$$

è chiaro che se la condizione iniziale è $x_0 = 0$, allora si avrà $x_n = 0$ per ogni n, e dunque anche il limite fa 0.

Ciò è molto naturale: se non ci sono individui all'inizio, essi non possono neanche cominciare a riprodursi, e quindi non ce ne saranno mai.

Il metodo grafico

Esiste un metodo grafico semplice ma potente per capire dove vanno a finire le condizioni iniziali in una mappa iterata. Si fa così:

Il metodo grafico

Esiste un metodo grafico semplice ma potente per capire dove vanno a finire le condizioni iniziali in una mappa iterata. Si fa così:

- si disegna la funzione $f(x)$

Il metodo grafico

Esiste un metodo grafico semplice ma potente per capire dove vanno a finire le condizioni iniziali in una mappa iterata. Si fa così:

- si disegna la funzione $f(x)$
- si traccia la bisettrice del **I-III** quadrante: $y = x$

Il metodo grafico

Esiste un metodo grafico semplice ma potente per capire dove vanno a finire le condizioni iniziali in una mappa iterata. Si fa così:

- si disegna la funzione $f(x)$
- si traccia la bisettrice del I-III quadrante: $y = x$
- si parte sull'asse x dalla condizione iniziale x_0, muovendosi poi in verticale fino al grafico di f, e in orizzontale fino alla bisettrice

Il metodo grafico

Esiste un metodo grafico semplice ma potente per capire dove vanno a finire le condizioni iniziali in una mappa iterata. Si fa così:

- si disegna la funzione $f(x)$
- si traccia la bisettrice del I-III quadrante: $y = x$
- si parte sull'asse x dalla condizione iniziale x_0, muovendosi poi in verticale fino al grafico di f, e in orizzontale fino alla bisettrice
- si continua così per un po' di volte, cercando di capire cosa succede alla traiettoria

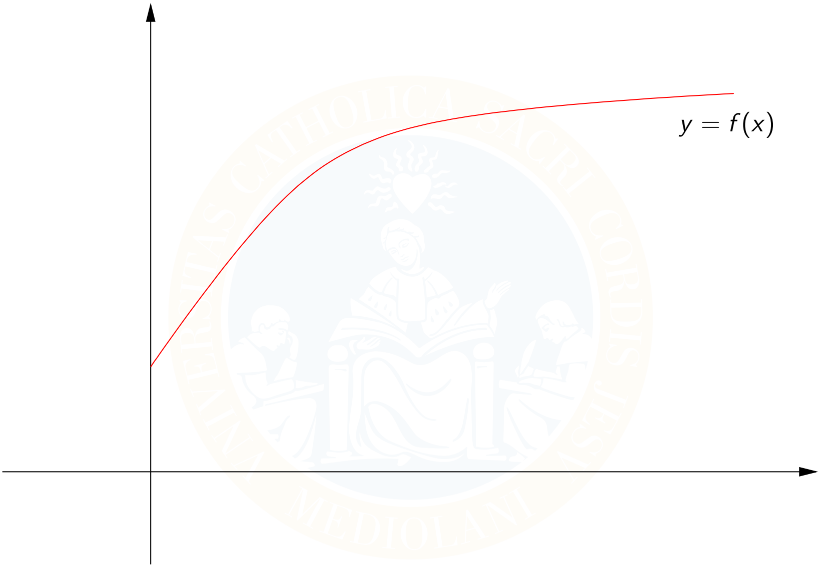
Il metodo grafico

Esiste un metodo grafico semplice ma potente per capire dove vanno a finire le condizioni iniziali in una mappa iterata. Si fa così:

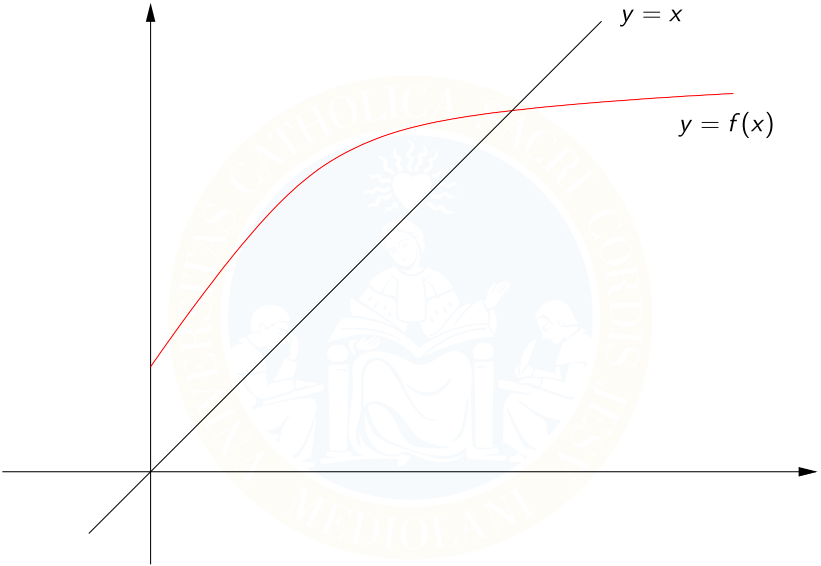
- si disegna la funzione $f(x)$
- si traccia la bisettrice del **I-III** quadrante: $y = x$
- si parte sull'asse x dalla condizione iniziale x_0, muovendosi poi in verticale fino al grafico di f, e in orizzontale fino alla bisettrice
- si continua così per un po' di volte, cercando di capire cosa succede alla traiettoria

Ogni volta che si interseca il grafico di f, si ottengono i valori della successione agli istanti successivi, quindi ci si può fare un'idea, anche se informale, su cosa succede alla successione all'aumentare di n.

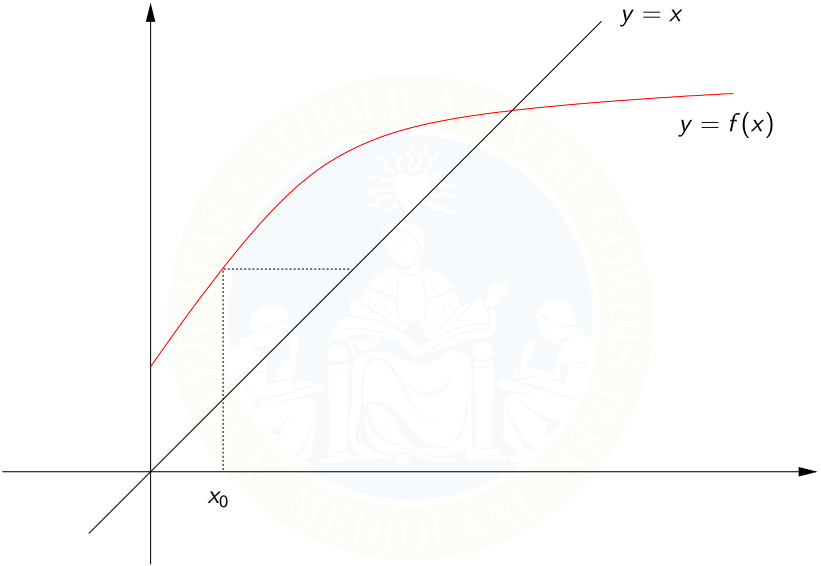
Metodo grafico



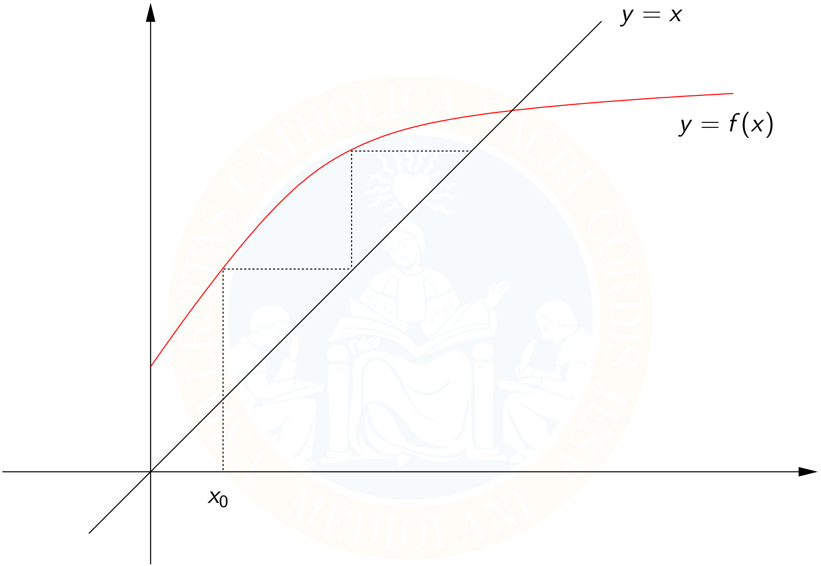
Metodo grafico



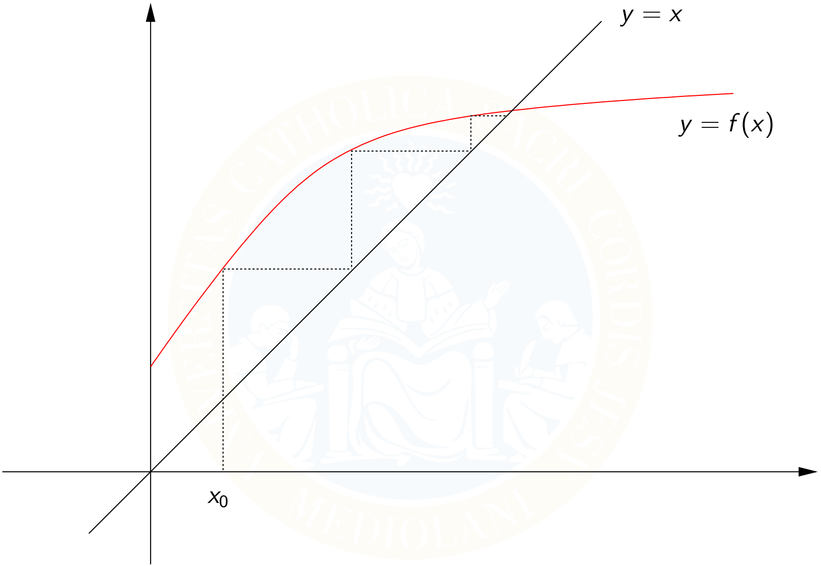
Metodo grafico



Metodo grafico



Metodo grafico



Commento al primo grafico

In questo caso si capisce che a partire da quella posizione x_0 si andrà a convergere verso una certa posizione, che è data dall'intersezione del grafico di f con la bisettrice, ovvero dall'equazione

$$f(x) = x.$$

Le soluzioni di questa equazione, che vengono chiamate punti fissi di f, sono le posizioni di equilibrio, ovvero: se si parte da lì, non ci si muove.

Commento al primo grafico

In questo caso si capisce che a partire da quella posizione x_0 si andrà a convergere verso una certa posizione, che è data dall'intersezione del grafico di f con la bisettrice, ovvero dall'equazione

$$f(x) = x.$$

Le soluzioni di questa equazione, che vengono chiamate punti fissi di f, sono le posizioni di equilibrio, ovvero: se si parte da lì, non ci si muove. Ad esempio, la posizione $x = 0$ per la mappa logistica è di equilibrio.

Commento al primo grafico

In questo caso si capisce che a partire da quella posizione x_0 si andrà a convergere verso una certa posizione, che è data dall'intersezione del grafico di f con la bisettrice, ovvero dall'equazione

$$f(x) = x.$$

Le soluzioni di questa equazione, che vengono chiamate punti fissi di f, sono le posizioni di equilibrio, ovvero: se si parte da lì, non ci si muove. Ad esempio, la posizione $x = 0$ per la mappa logistica è di equilibrio. Naturalmente, se fossimo partiti da un valore iniziale diverso avremmo potuto avere ben altro esito.

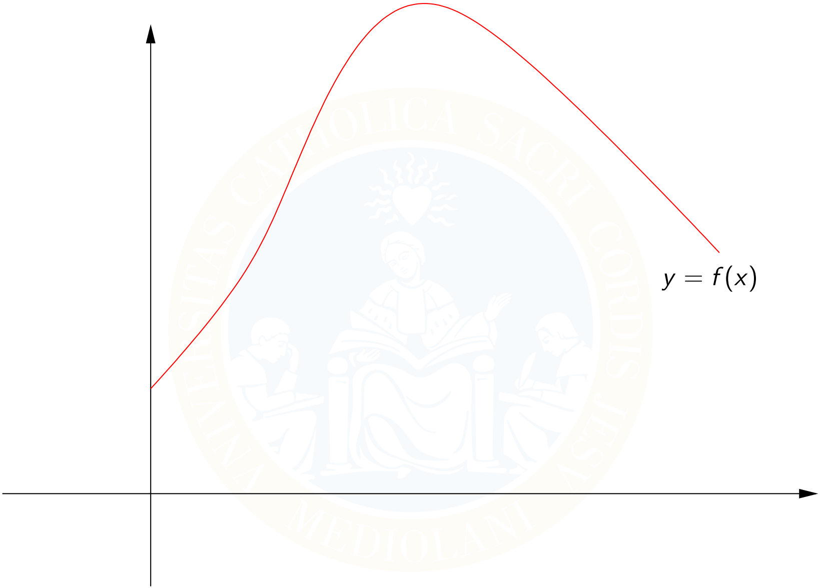
Commento al primo grafico

In questo caso si capisce che a partire da quella posizione x_0 si andrà a convergere verso una certa posizione, che è data dall'intersezione del grafico di f con la bisettrice, ovvero dall'equazione

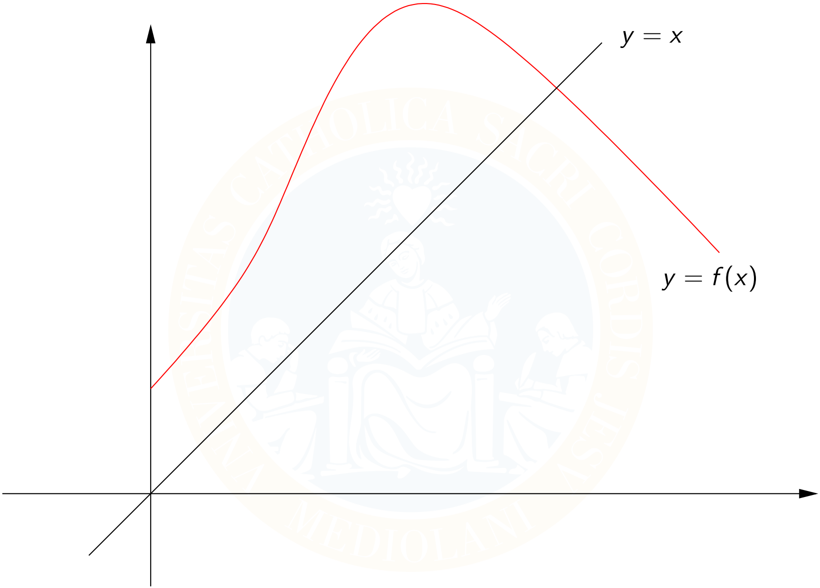
$$f(x) = x.$$

Le soluzioni di questa equazione, che vengono chiamate punti fissi di f, sono le posizioni di equilibrio, ovvero: se si parte da lì, non ci si muove. Ad esempio, la posizione $x = 0$ per la mappa logistica è di equilibrio. Naturalmente, se fossimo partiti da un valore iniziale diverso avremmo potuto avere ben altro esito.
Vediamo nel prossimo lucido un esempio più complicato.

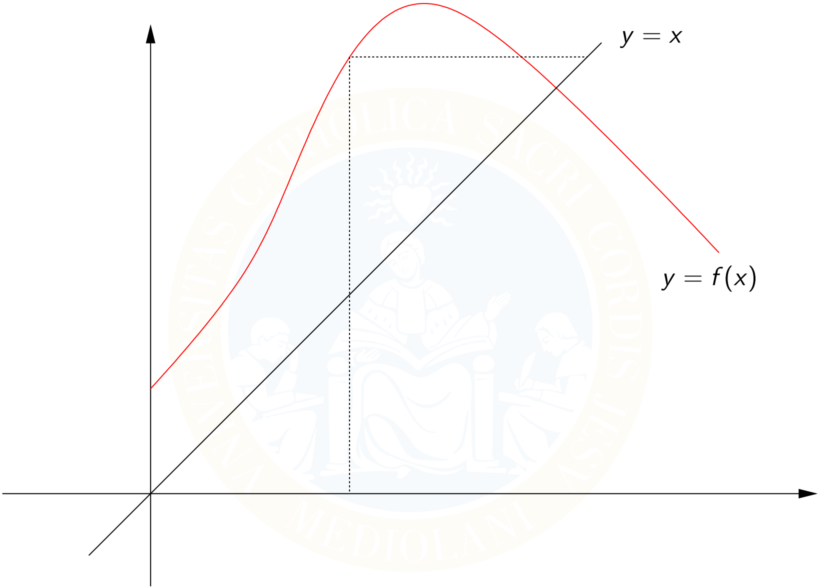
Metodo grafico



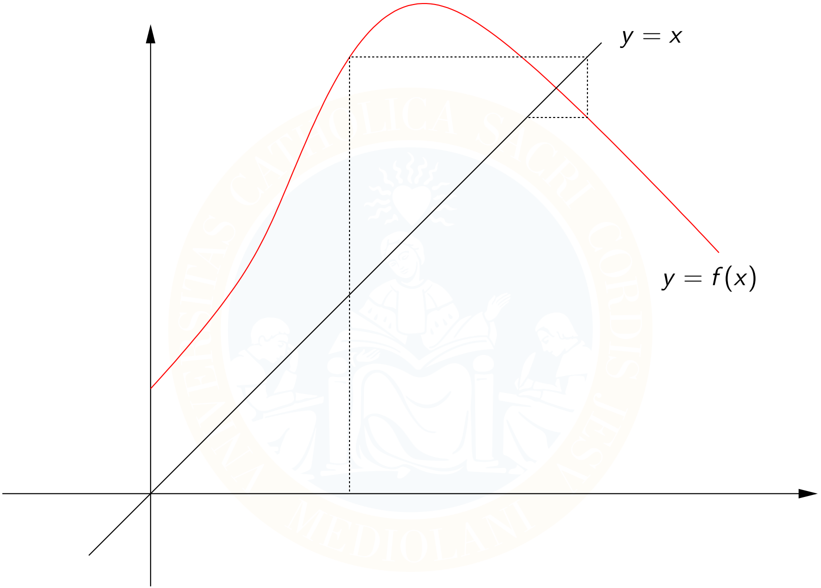
Metodo grafico



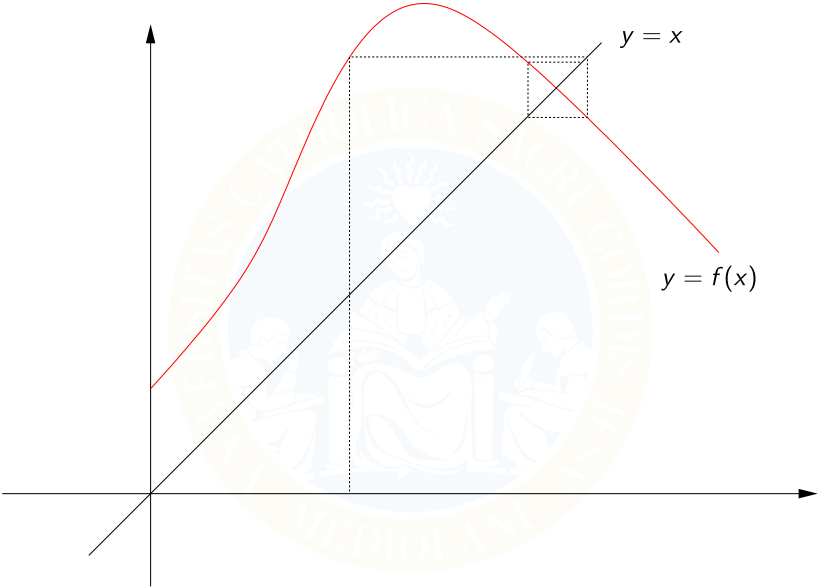
Metodo grafico



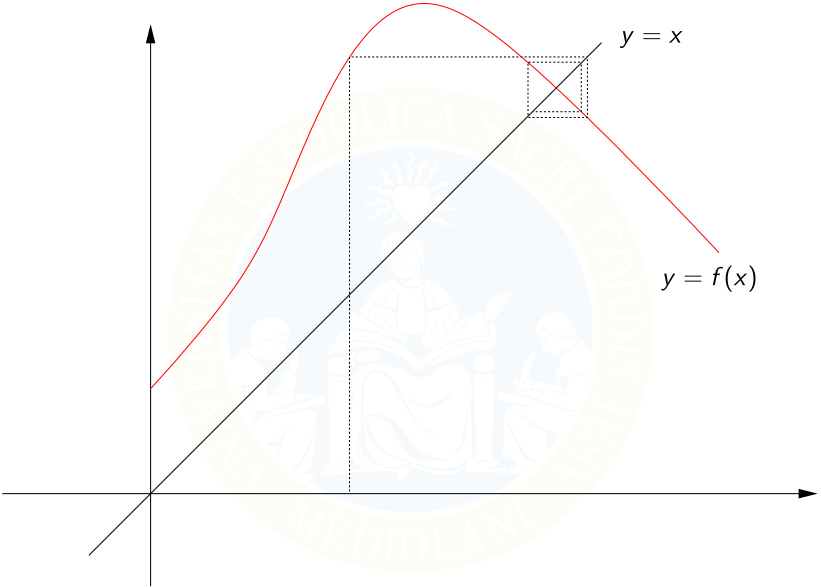
Metodo grafico



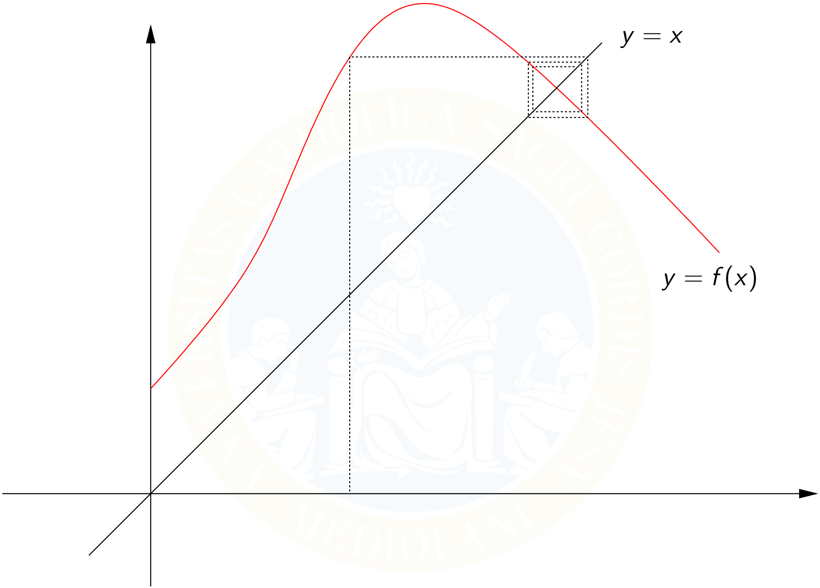
Metodo grafico



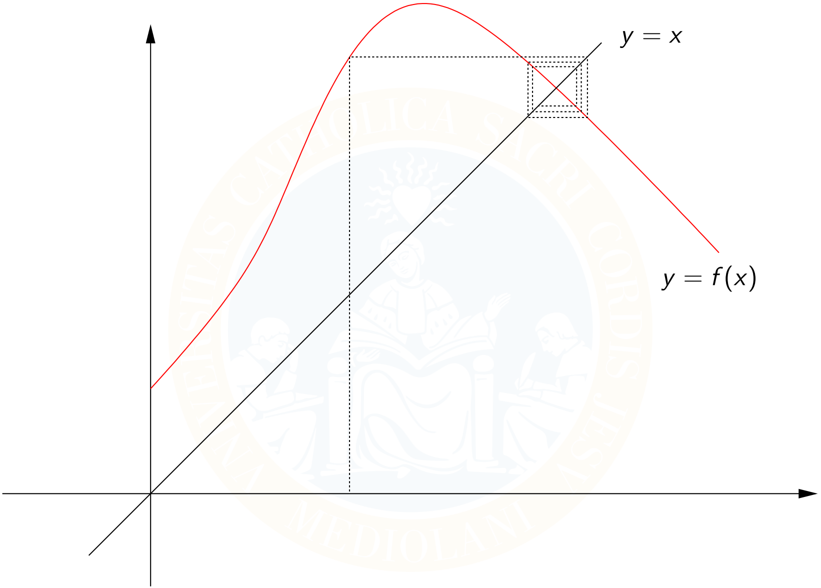
Metodo grafico



Metodo grafico



Metodo grafico



Commento al secondo grafico

In questo caso non è ben chiaro dove vada a finire la posizione iniziale. Si avvicina un po' a un punto fisso, ma potrebbe anche andare verso un "quadrato".

Commento al secondo grafico

In questo caso non è ben chiaro dove vada a finire la posizione iniziale. Si avvicina un po' a un punto fisso, ma potrebbe anche andare verso un "quadrato".
Ciò significa che il sistema potrebbe tendere ad oscillare tra due posizioni, senza assestarsi mai, un po' come la successione $(-1)^n$.

Commento al secondo grafico

In questo caso non è ben chiaro dove vada a finire la posizione iniziale. Si avvicina un po' a un punto fisso, ma potrebbe anche andare verso un "quadrato".
Ciò significa che il sistema potrebbe tendere ad oscillare tra due posizioni, senza assestarsi mai, un po' come la successione $(-1)^n$.
Quando succede questo, si dice che il sistema assume una periodicità di periodo 2.

Commento al secondo grafico

In questo caso non è ben chiaro dove vada a finire la posizione iniziale. Si avvicina un po' a un punto fisso, ma potrebbe anche andare verso un "quadrato".
Ciò significa che il sistema potrebbe tendere ad oscillare tra due posizioni, senza assestarsi mai, un po' come la successione $(-1)^n$.
Quando succede questo, si dice che il sistema assume una periodicità di periodo 2.
Naturalmente, potrebbero esserci situazioni in cui la periodicità diventa 4, 8, 16...

La mappa logistica

Veniamo ora alla mappa logistica:

$$f(x) = ax(1 - x)\,.$$

La mappa logistica

Veniamo ora alla mappa logistica:

$$f(x) = ax(1 - x)\,.$$

Si osserva che, se $a < 3$, tutto tende verso la posizione di equilibrio (che si dice **stabile**).

La mappa logistica

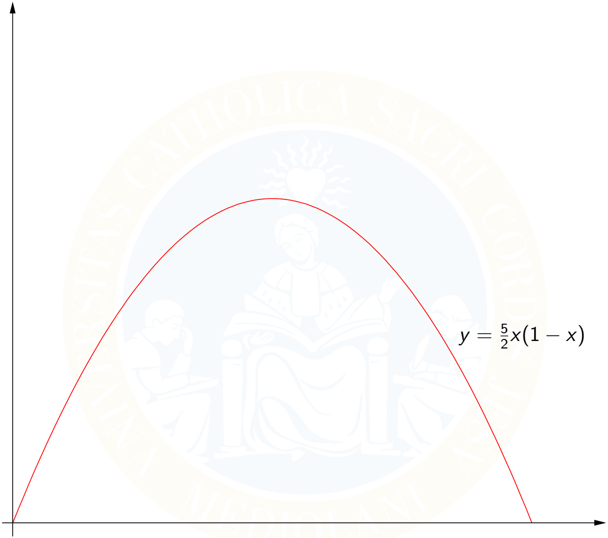
Veniamo ora alla mappa logistica:

$$f(x) = ax(1-x)\,.$$

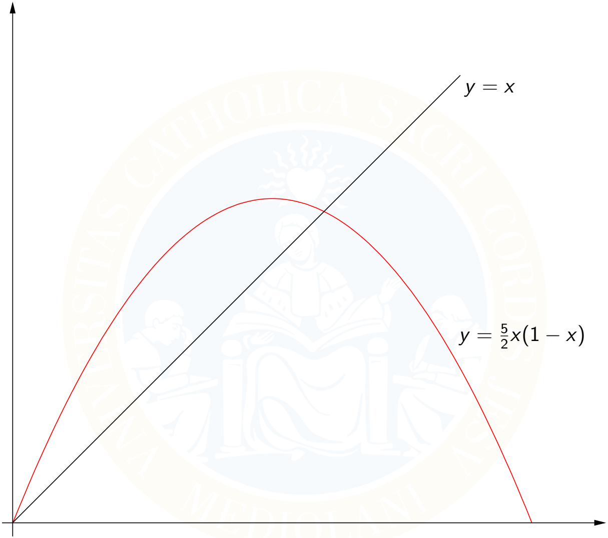
Si osserva che, se $a < 3$, tutto tende verso la posizione di equilibrio (che si dice **stabile**).

Il coefficiente a rappresenta la capacità riproduttiva della specie. Quindi se $a < 3$, cioè se la capacità riproduttiva della specie non è troppo alta, il numero di individui tende verso un valore prefissato, e tale valore è $1 - \frac{1}{a}$.

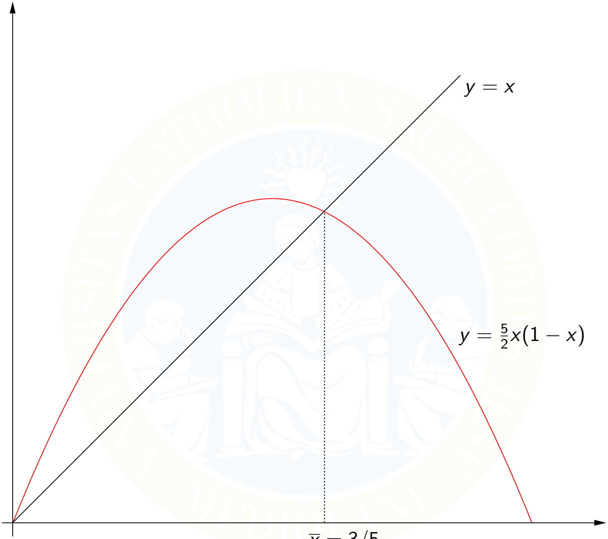
Disegno nel caso $a < 3$ (qui $a = 5/2$)



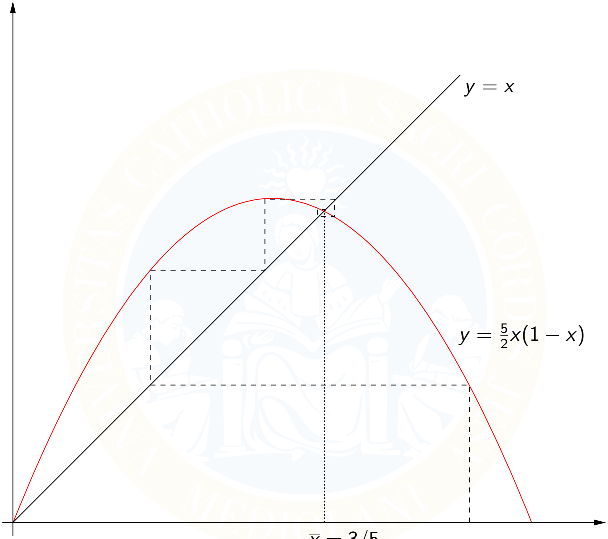
Disegno nel caso $a < 3$ (qui $a = 5/2$)



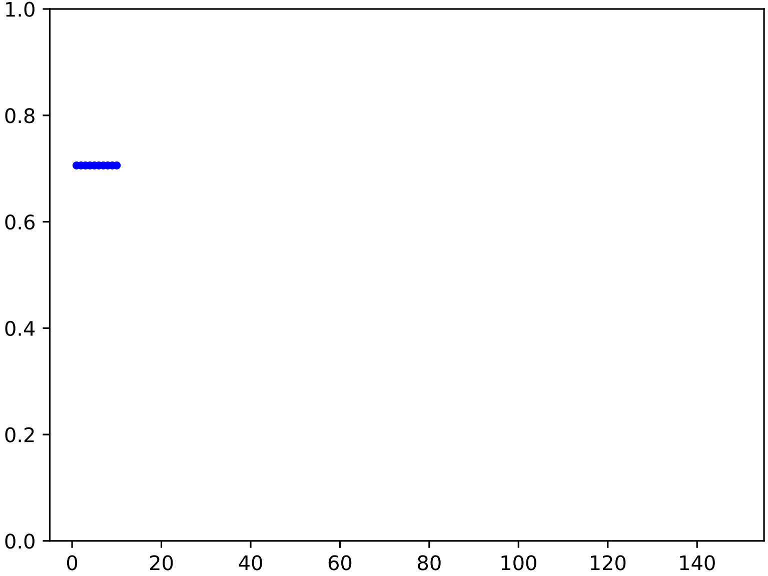
Disegno nel caso $a < 3$ (qui $a = 5/2$)



Disegno nel caso $a < 3$ (qui $a = 5/2$)



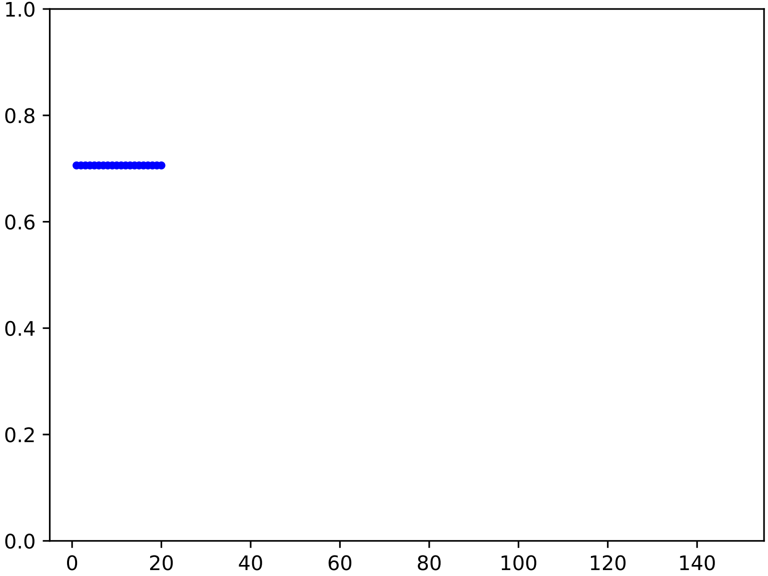
Instabilità nel caso $a > 3$ (qui $a = 3.4$)



Inizio

Fine

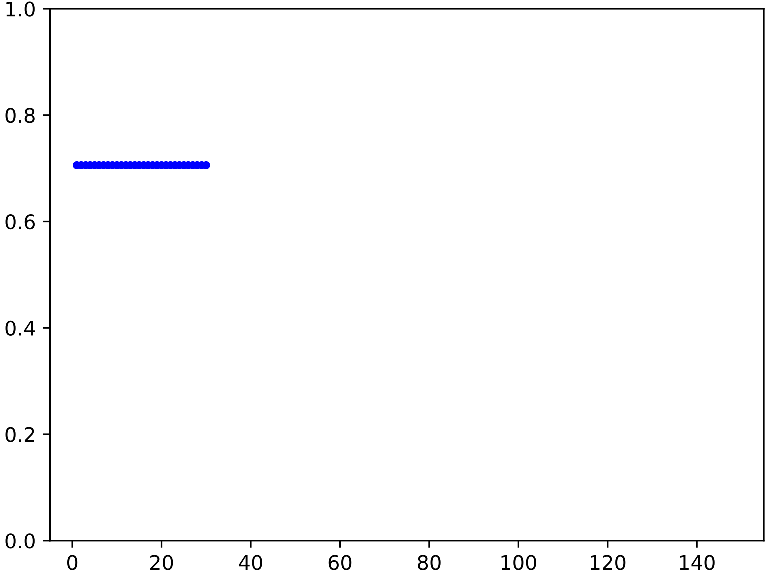
Instabilità nel caso $a > 3$ (qui $a = 3.4$)



Inizio

Fine

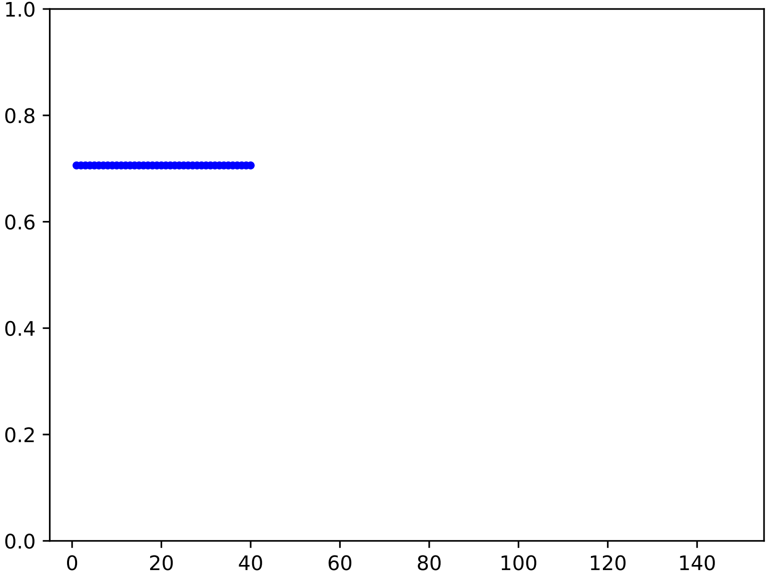
Instabilità nel caso $a > 3$ (qui $a = 3.4$)



Inizio

Fine

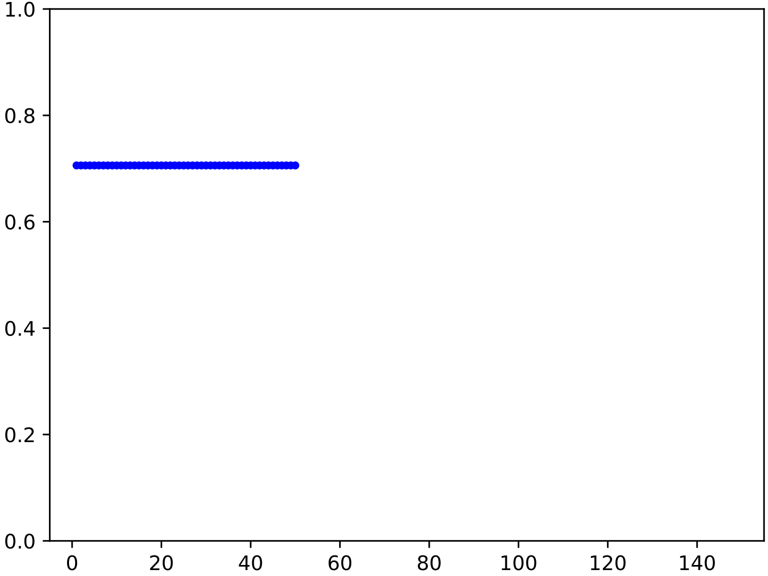
Instabilità nel caso $a > 3$ (qui $a = 3.4$)



Inizio

Fine

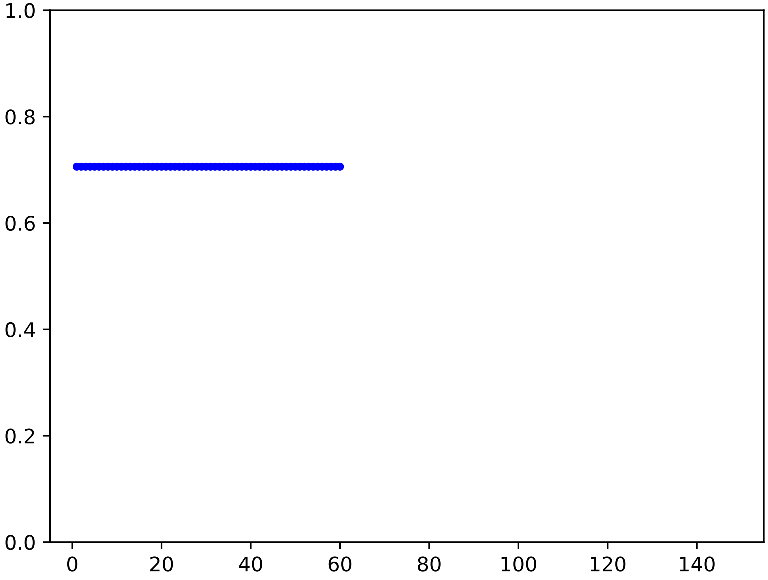
Instabilità nel caso $a > 3$ (qui $a = 3.4$)



Inizio

Fine

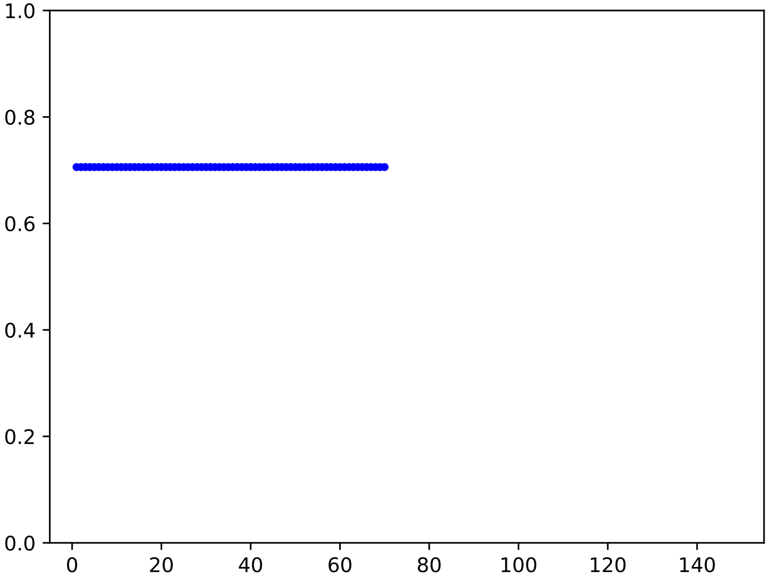
Instabilità nel caso $a > 3$ (qui $a = 3.4$)



Inizio

Fine

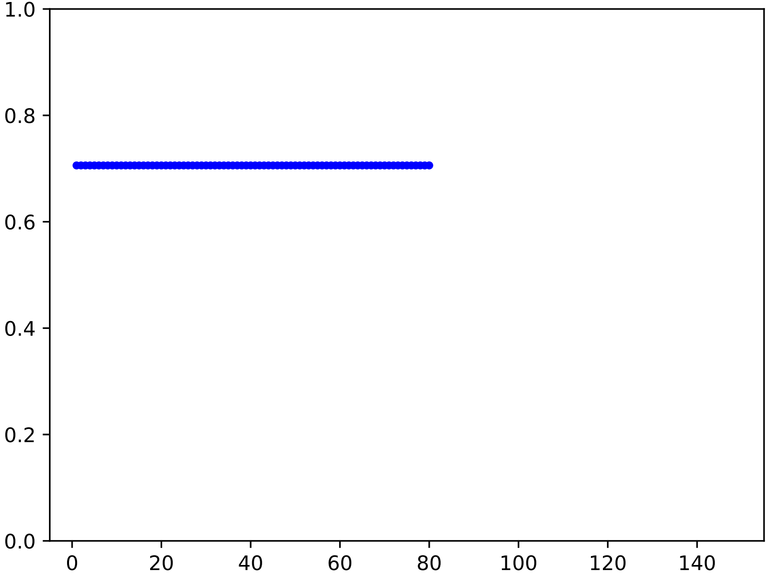
Instabilità nel caso $a > 3$ (qui $a = 3.4$)



Inizio

Fine

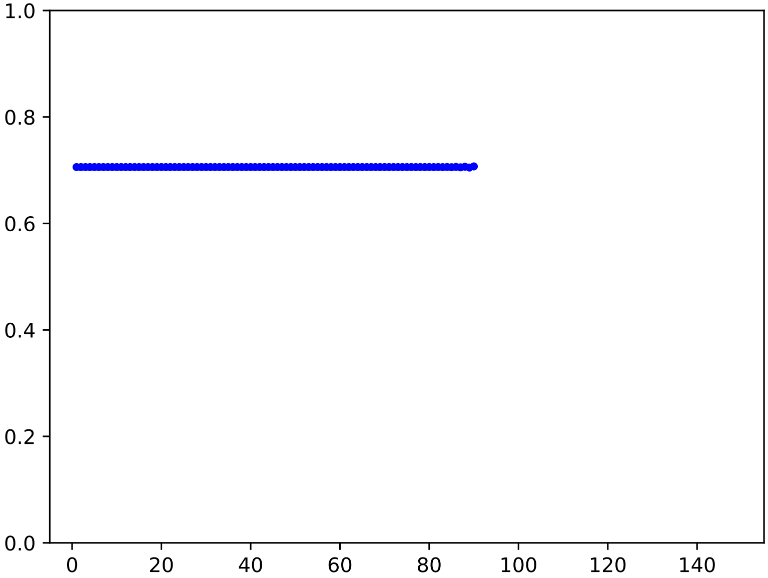
Instabilità nel caso $a > 3$ (qui $a = 3.4$)



Inizio

Fine

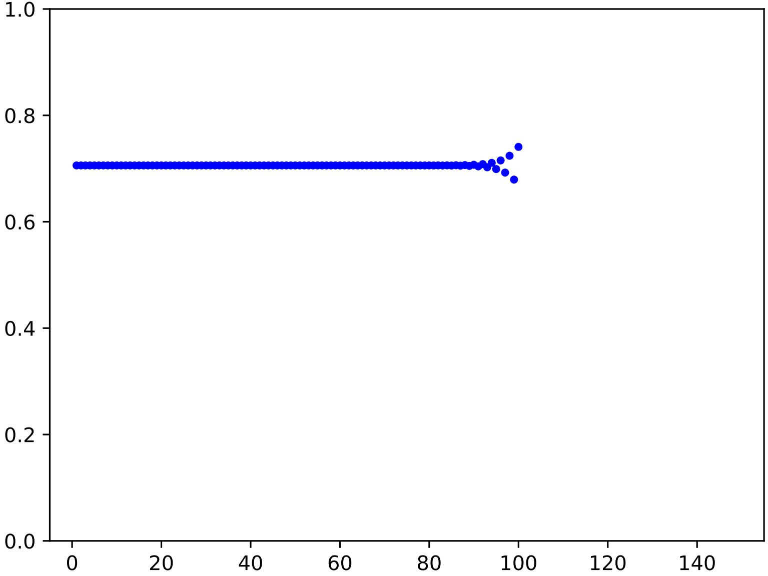
Instabilità nel caso $a > 3$ (qui $a = 3.4$)



Inizio

Fine

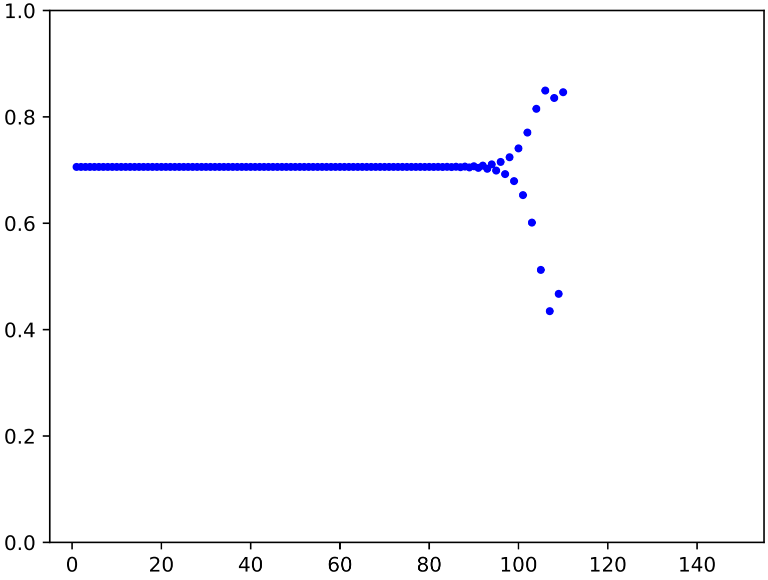
Instabilità nel caso $a > 3$ (qui $a = 3.4$)



Inizio

Fine

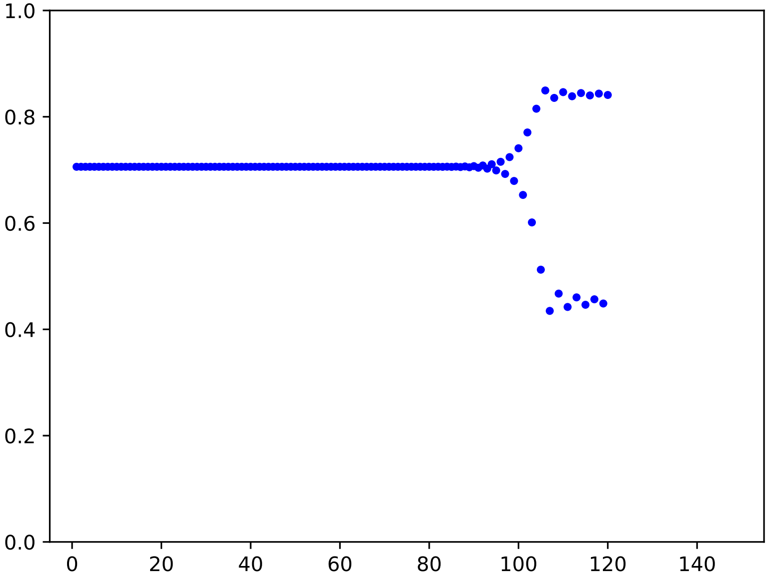
Instabilità nel caso $a > 3$ (qui $a = 3.4$)



Inizio

Fine

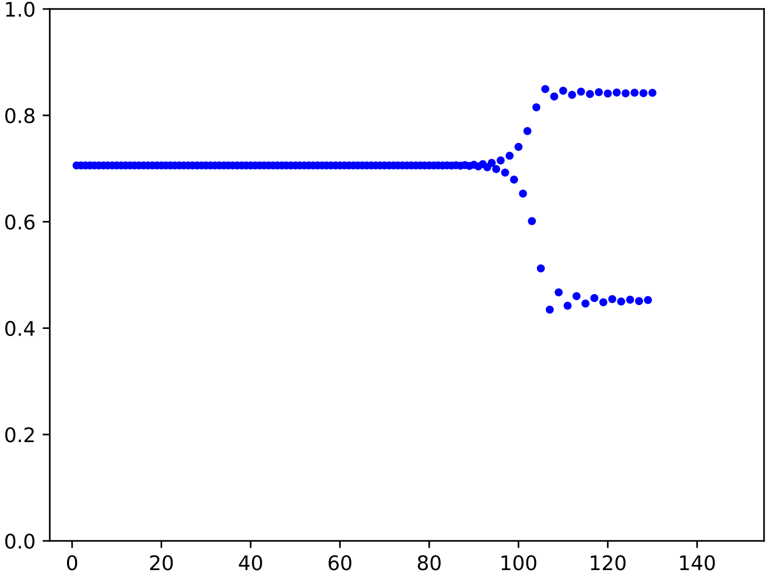
Instabilità nel caso $a > 3$ (qui $a = 3.4$)



Inizio

Fine

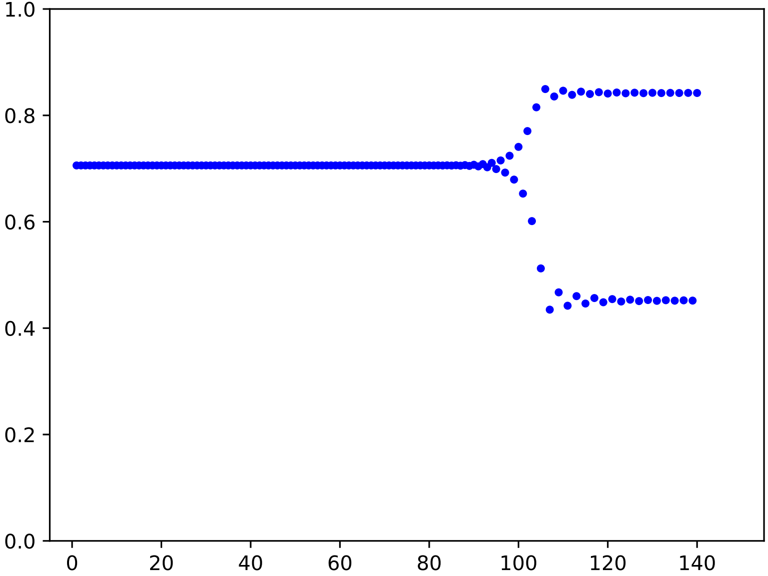
Instabilità nel caso $a > 3$ (qui $a = 3.4$)



Inizio

Fine

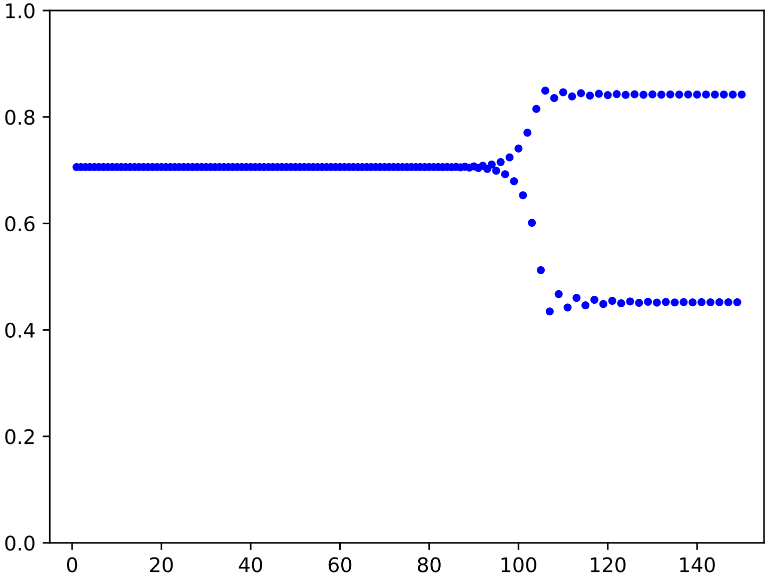
Instabilità nel caso $a > 3$ (qui $a = 3.4$)



Inizio

Fine

Instabilità nel caso $a > 3$ (qui $a = 3.4$)



Inizio

Fine

Il caso $a > 3$

Ma cosa succede nel caso $a > 3$? Qui le cose si fanno più complicate: appaiono dei cicli di ordine 2 (quelli che nel disegno sembrano dei "quadrati"), che restano stabili per

$$3 < a < 1 + \sqrt{6} \quad (\simeq 3.45)\,.$$

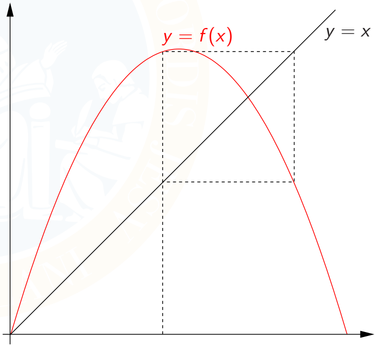


Figura: $a = 3.4$

Il caso $a > 3$

Ma cosa succede nel caso $a > 3$? Qui le cose si fanno più complicate: appaiono dei cicli di ordine 2 (quelli che nel disegno sembrano dei "quadrati"), che restano stabili per

$$3 < a < 1 + \sqrt{6} \quad (\simeq 3.45)\,.$$

Dal punto di vista biologico: per un intervallo di valori ben preciso della capacità riproduttiva, il numero degli individui tenderà a oscillare periodicamente tra due valori ben precisi.

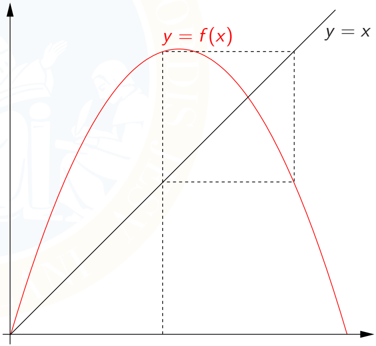


Figura: $a = 3.4$

Il caso $a > 1 + \sqrt{6}$

E per valori di a ancora più grandi, cosa succede? In questo caso si presenteranno progressivamente cicli di ordine 4, 8, 16, ...
Questo fenomeno si chiama **raddoppio del periodo**: ogni volta che un ciclo periodico diventa instabile, nasce un ciclo periodico stabile di periodo doppio.

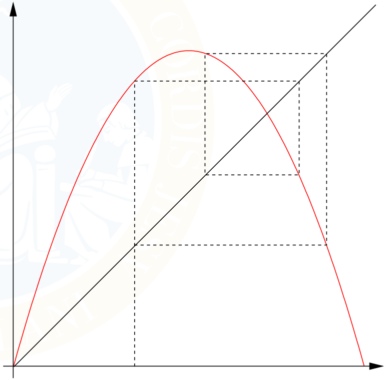


Figura: $a = 3.6$, periodo 4

Il caso $a > 1 + \sqrt{6}$

E per valori di *a* ancora più grandi, cosa succede? In questo caso si presenteranno progressivamente cicli di ordine 4, 8, 16, ...
Questo fenomeno si chiama **raddoppio del periodo**: ogni volta che un ciclo periodico diventa instabile, nasce un ciclo periodico stabile di periodo doppio.

Quindi per alcuni valori del parametro *a* il numero degli individui tenderà a oscillare periodicamente fra 4 valori diversi, per valori di *a* più grandi oscillerà tra 8 valori diversi, e così via.

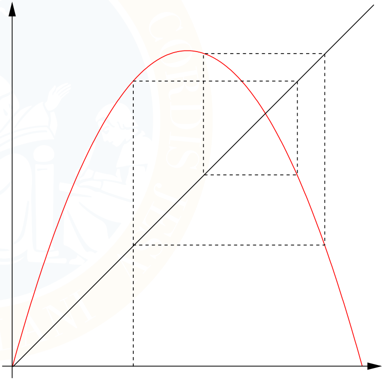


Figura: $a = 3.6$, periodo 4

Il caos

La cosa più sorprendente della mappa logistica è che i valori del parametro a per cui il periodo si raddoppia non tendono all'infinito, ma si accumulano verso un misterioso numero che vale all'incirca

$$a \simeq 3.57\,.$$

Il caos

La cosa più sorprendente della mappa logistica è che i valori del parametro a per cui il periodo si raddoppia non tendono all'infinito, ma si accumulano verso un misterioso numero che vale all'incirca

$$a \simeq 3.57\,.$$

Per valori di a più grandi di 3.57 il comportamento della mappa logistica diventa

Il caos

La cosa più sorprendente della mappa logistica è che i valori del parametro a per cui il periodo si raddoppia non tendono all'infinito, ma si accumulano verso un misterioso numero che vale all'incirca

$$a \simeq 3.57\,.$$

Per valori di a più grandi di 3.57 il comportamento della mappa logistica diventa

caos!

Il caos

La cosa più sorprendente della mappa logistica è che i valori del parametro a per cui il periodo si raddoppia non tendono all'infinito, ma si accumulano verso un misterioso numero che vale all'incirca

$$a \simeq 3.57\,.$$

Per valori di a più grandi di 3.57 il comportamento della mappa logistica diventa

caos!

Nella successione dei valori non è più possibile prevedere un comportamento. Ci sono continue oscillazioni tra tanti valori in modo apparentemente casuale (anche se la successione è descritta da una formula semplice e non ambigua).

Il caos

La cosa più sorprendente della mappa logistica è che i valori del parametro a per cui il periodo si raddoppia non tendono all'infinito, ma si accumulano verso un misterioso numero che vale all'incirca

$$a \simeq 3.57\,.$$

Per valori di a più grandi di 3.57 il comportamento della mappa logistica diventa

caos!

Nella successione dei valori non è più possibile prevedere un comportamento. Ci sono continue oscillazioni tra tanti valori in modo apparentemente casuale (anche se la successione è descritta da una formula semplice e non ambigua).

Si parla, con un ossimoro, di **caos deterministico**, ovvero la nascita di fenomeni di tipo casuale da modelli che sono perfettamente deterministici.

L'effetto farfalla

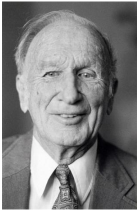
In questi fenomeni, partendo da due condizioni iniziali molto vicine si arriva, dopo pochi passi, in punti completamente diversi, in modo quasi imprevedibile. Questa si chiama **dipendenza sensibile dalle condizioni iniziali**, ed è uno tra gli aspetti principali del caos deterministico.

L'effetto farfalla

In questi fenomeni, partendo da due condizioni iniziali molto vicine si arriva, dopo pochi passi, in punti completamente diversi, in modo quasi imprevedibile. Questa si chiama **dipendenza sensibile dalle condizioni iniziali**, ed è uno tra gli aspetti principali del caos deterministico.
Tale fenomeno viene anche detto **effetto farfalla**, dal famoso titolo di una conferenza del 1972 di Edward Lorenz, uno tra i primi studiosi di questi aspetti:

L'effetto farfalla

In questi fenomeni, partendo da due condizioni iniziali molto vicine si arriva, dopo pochi passi, in punti completamente diversi, in modo quasi imprevedibile. Questa si chiama **dipendenza sensibile dalle condizioni iniziali**, ed è uno tra gli aspetti principali del caos deterministico.
Tale fenomeno viene anche detto **effetto farfalla**, dal famoso titolo di una conferenza del 1972 di Edward Lorenz, uno tra i primi studiosi di questi aspetti:

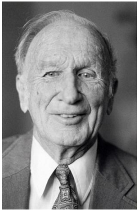


(1917-2008)

"Does the flap of a butterfly's wings in Brazil set off a tornado in Texas?"

L'effetto farfalla

In questi fenomeni, partendo da due condizioni iniziali molto vicine si arriva, dopo pochi passi, in punti completamente diversi, in modo quasi imprevedibile. Questa si chiama **dipendenza sensibile dalle condizioni iniziali**, ed è uno tra gli aspetti principali del caos deterministico.
Tale fenomeno viene anche detto **effetto farfalla**, dal famoso titolo di una conferenza del 1972 di Edward Lorenz, uno tra i primi studiosi di questi aspetti:



(1917-2008)

"Does the flap of a butterfly's wings in Brazil set off a tornado in Texas?"

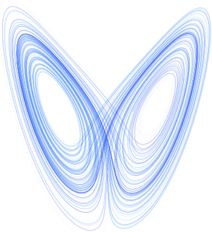


Diagramma di biforcazione

Per finire, vedremo un'immagine, presa da Wikipedia, che mostra il **diagramma di biforcazione** della mappa logistica.
Tale diagramma mostra sull'asse orizzontale il valore del parametro *a* (tra 2,4 e 4), e sull'ordinata la posizione dei punti di equilibrio o dei cicli *stabili*.

Diagramma di biforcazione

Per finire, vedremo un'immagine, presa da Wikipedia, che mostra il **diagramma di biforcazione** della mappa logistica.
Tale diagramma mostra sull'asse orizzontale il valore del parametro *a* (tra 2,4 e 4), e sull'ordinata la posizione dei punti di equilibrio o dei cicli *stabili*.

- Fino a 3 c'è un solo ramo, quindi una posizione d'equilibrio (oltre alla posizione nulla, naturalmente).
- Da 3 a 3,45 circa (cioè proprio $1+\sqrt{6}$), ci sono due rami, che vuol dire un ciclo di ordine 2.
- Da 3,45 a 3,55 circa, quattro rami, quindi un ciclo di ordine 4...

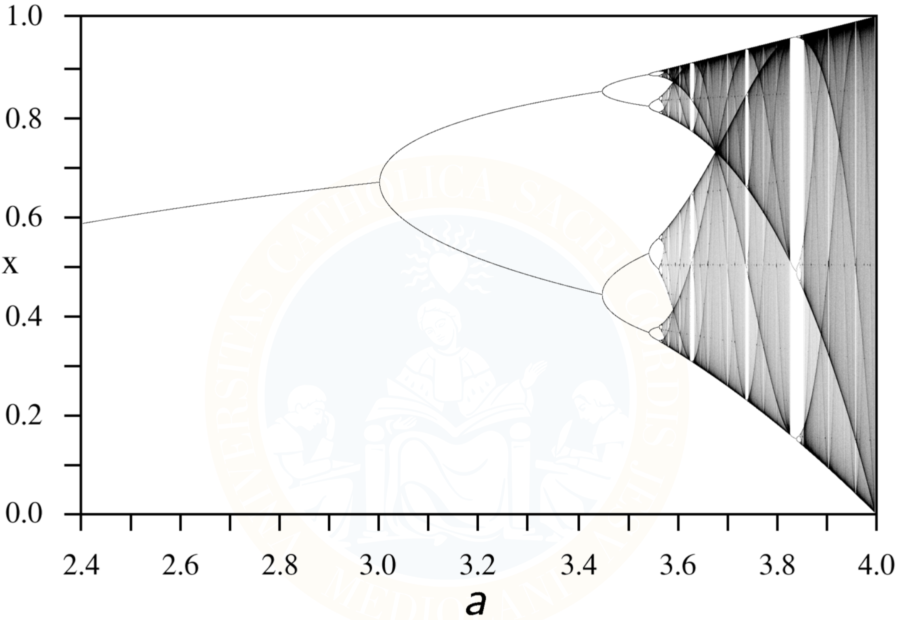
L'ordine dei cicli raddoppia continuamente fino a un valore di circa 3,57.
Da lì in poi, si entra nel caos deterministico.

Diagramma di biforcazione

Per finire, vedremo un'immagine, presa da Wikipedia, che mostra il **diagramma di biforcazione** della mappa logistica.
Tale diagramma mostra sull'asse orizzontale il valore del parametro a (tra 2,4 e 4), e sull'ordinata la posizione dei punti di equilibrio o dei cicli *stabili*.

- Fino a 3 c'è un solo ramo, quindi una posizione d'equilibrio (oltre alla posizione nulla, naturalmente).
- Da 3 a 3,45 circa (cioè proprio $1+\sqrt{6}$), ci sono due rami, che vuol dire un ciclo di ordine 2.
- Da 3,45 a 3,55 circa, quattro rami, quindi un ciclo di ordine 4...

L'ordine dei cicli raddoppia continuamente fino a un valore di circa 3,57.
Da lì in poi, si entra nel caos deterministico.
Ci sono dei cicli stabili anche per valori di a superiori a 3,57: ad esempio, poco dopo 3,8 si nota un ciclo di ordine 3 (si può mostrare che si ha un ciclo di ordine 3 per $a = 1+\sqrt{8} \simeq 3,828$).



Il diagramma ha una struttura frattale!