Parliamo di logica

Alessandro Musesti

Università Cattolica del Sacro Cuore

Allenamenti di Matematica, 27 febbraio 2009

Citazione

La logica, come il whisky, perde i suoi effetti benefici quando è assunta in quantità troppo alte.

Citazione

La logica, come il whisky, perde i suoi effetti benefici quando è assunta in quantità troppo alte.

Lord Dunsany (1878-1957)

Il test di Peter Wason (1966)

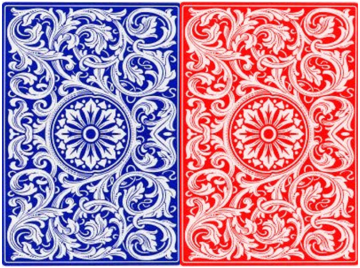
Dispongo queste quattro carte da gioco davanti a voi, due coperte e due scoperte

Il test di Peter Wason (1966)

Dispongo queste quattro carte da gioco davanti a voi, due coperte e due scoperte

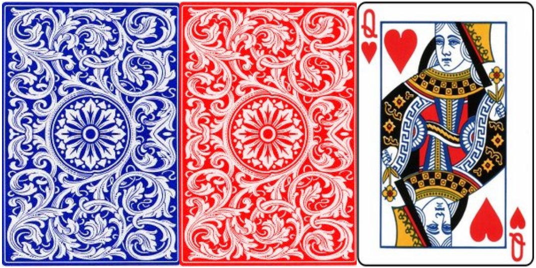
Il test di Peter Wason (1966)

Dispongo queste quattro carte da gioco davanti a voi, due coperte e due scoperte



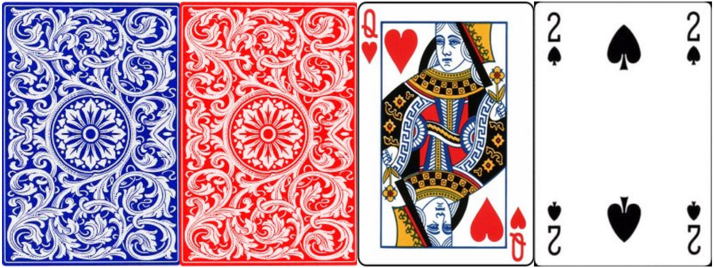
Il test di Peter Wason (1966)

Dispongo queste quattro carte da gioco davanti a voi, due coperte e due scoperte



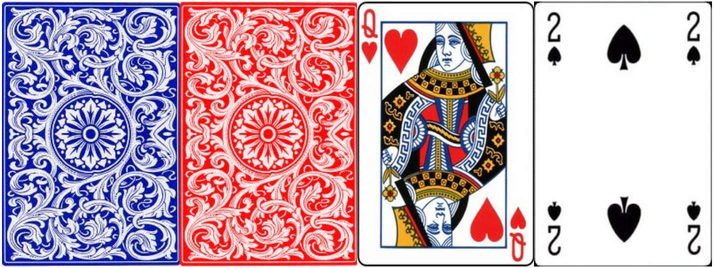
Il test di Peter Wason (1966)

Dispongo queste quattro carte da gioco davanti a voi, due coperte e due scoperte



Il test di Peter Wason (1966)

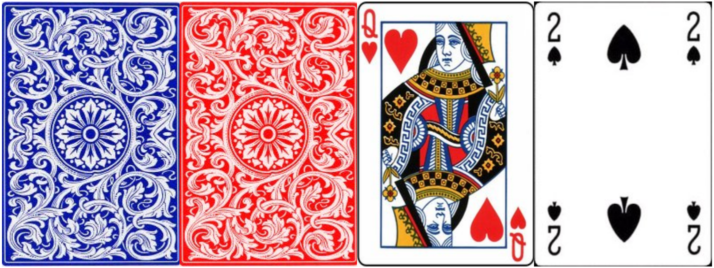
Dispongo queste quattro carte da gioco davanti a voi, due coperte e due scoperte



e faccio la seguente affermazione:
Ogni carta con il dorso blu è una figura.

Il test di Peter Wason (1966)

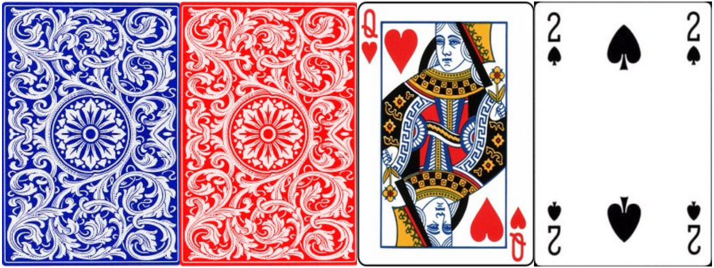
Dispongo queste quattro carte da gioco davanti a voi, due coperte e due scoperte



e faccio la seguente affermazione:
Ogni carta con il dorso blu è una figura.
Quali carte bisogna voltare per dimostrare la verità o falsità della mia affermazione?

Il test di Peter Wason (1966)

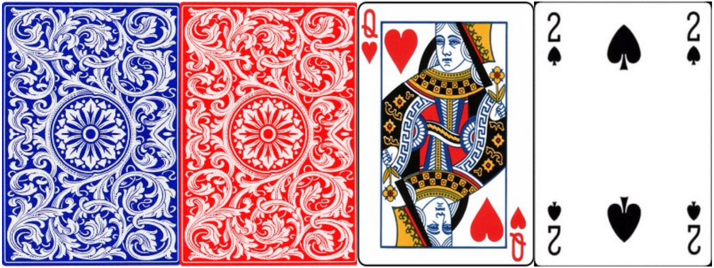
Dispongo queste quattro carte da gioco davanti a voi, due coperte e due scoperte



e faccio la seguente affermazione:
Ogni carta con il dorso blu è una figura.
Quali carte bisogna voltare per dimostrare la verità o falsità della mia affermazione?
46% Blu e Donna

Il test di Peter Wason (1966)

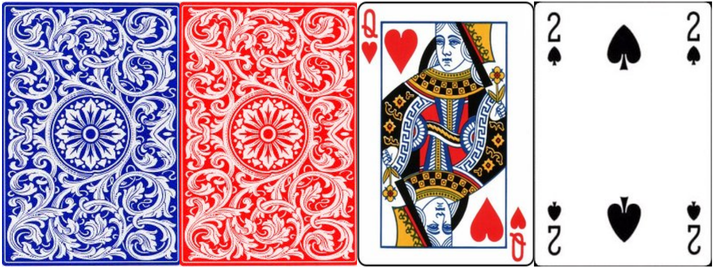
Dispongo queste quattro carte da gioco davanti a voi, due coperte e due scoperte



e faccio la seguente affermazione:
Ogni carta con il dorso blu è una figura.
Quali carte bisogna voltare per dimostrare la verità o falsità della mia affermazione?
46% Blu e Donna   33% solo Blu

Il test di Peter Wason (1966)

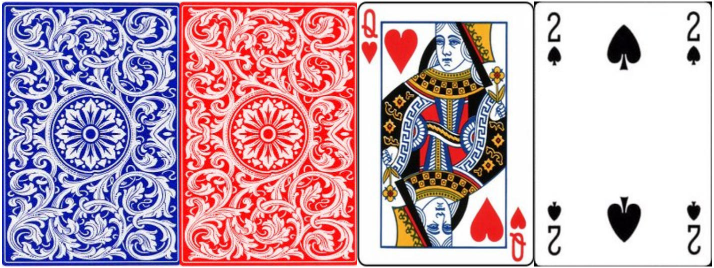
Dispongo queste quattro carte da gioco davanti a voi, due coperte e due scoperte



e faccio la seguente affermazione:
Ogni carta con il dorso blu è una figura.
Quali carte bisogna voltare per dimostrare la verità o falsità della mia affermazione?
46% Blu e Donna   33% solo Blu   . . .

Il test di Peter Wason (1966)

Dispongo queste quattro carte da gioco davanti a voi, due coperte e due scoperte



e faccio la seguente affermazione:
Ogni carta con il dorso blu è una figura.
Quali carte bisogna voltare per dimostrare la verità o falsità della mia affermazione?
46% Blu e Donna   33% solo Blu   . . .   5% risposta esatta!

Connettivi logici

$\mathcal{P}, \mathcal{Q}$ sono dei *predicati*

Connettivi logici

$\mathcal{P}, \mathcal{Q}$ sono dei *predicati*

$\mathcal{P}$	$\neg\mathcal{P}$
V	F
F	V

Connettivi logici

$\mathcal{P}, \mathcal{Q}$ sono dei *predicati*

$\mathcal{P}$	$\neg\mathcal{P}$
V	F
F	V

$\mathcal{P}$	$\mathcal{Q}$	$\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q}$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Connettivi logici

$\mathcal{P}, \mathcal{Q}$ sono dei *predicati*

$\mathcal{P}$	$\neg\mathcal{P}$
V	F
F	V

$\mathcal{P}$	$\mathcal{Q}$	$\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q}$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

$\mathcal{P}$	$\mathcal{Q}$	$\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Connettivi logici

$\mathcal{P}, \mathcal{Q}$ sono dei *predicati*

$\mathcal{P}$	$\neg\mathcal{P}$
V	F
F	V

$\mathcal{P}$	$\mathcal{Q}$	$\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q}$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

$\mathcal{P}$	$\mathcal{Q}$	$\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

$\mathcal{P}$	$\mathcal{Q}$	$\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Connettivi logici

$\mathcal{P}, \mathcal{Q}$ sono dei *predicati*

$\mathcal{P}$	$\neg\mathcal{P}$
V	F
F	V

$\mathcal{P}$	$\mathcal{Q}$	$\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q}$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

$\mathcal{P}$	$\mathcal{Q}$	$\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

$\mathcal{P}$	$\mathcal{Q}$	$\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

$\mathcal{P}$	$\mathcal{Q}$	$\mathcal{P} \Leftrightarrow \mathcal{Q}$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Regole

Regola di deduzione: $$\boxed{\Big(\mathcal{P} \wedge (\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q})\Big) \Rightarrow \mathcal{Q}}$$

Regole

Regola di deduzione: $\boxed{\Big(\mathcal{P} \wedge (\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q})\Big) \Rightarrow \mathcal{Q}}$

$\mathcal{P}$	$\mathcal{Q}$	$\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$	$\mathcal{P} \wedge (\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q})$	$\Big(\mathcal{P} \wedge (\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q})\Big) \Rightarrow \mathcal{Q}$
V	V	V	V	V
V	F	F	F	V
F	V	V	F	V
F	F	V	F	V

Regole

Regola di deduzione: $$\boxed{\Big(\mathcal{P} \wedge (\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q})\Big) \Rightarrow \mathcal{Q}}$$

$\mathcal{P}$	$\mathcal{Q}$	$\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$	$\mathcal{P} \wedge (\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q})$	$\Big(\mathcal{P} \wedge (\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q})\Big) \Rightarrow \mathcal{Q}$
V	V	V	V	V
V	F	F	F	V
F	V	V	F	V
F	F	V	F	V

Dim. per assurdo: $$\boxed{\Big((\mathcal{P} \wedge (\neg\mathcal{Q})) \Rightarrow (\mathcal{R} \wedge (\neg\mathcal{R}))\Big) \Rightarrow (\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q})}$$

Regole

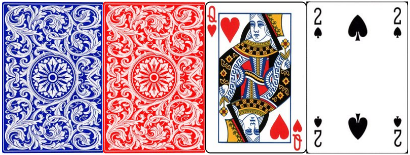
Regola di deduzione: $\boxed{\Big(\mathcal{P} \wedge (\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q})\Big) \Rightarrow \mathcal{Q}}$

$\mathcal{P}$	$\mathcal{Q}$	$\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$	$\mathcal{P} \wedge (\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q})$	$\Big(\mathcal{P} \wedge (\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q})\Big) \Rightarrow \mathcal{Q}$
V	V	V	V	V
V	F	F	F	V
F	V	V	F	V
F	F	V	F	V

Dim. per assurdo: $\boxed{\Big((\mathcal{P} \wedge (\neg\mathcal{Q})) \Rightarrow (\mathcal{R} \wedge (\neg\mathcal{R}))\Big) \Rightarrow (\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q})}$

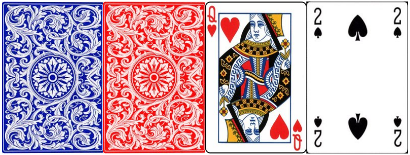
$\mathcal{P}$	$\mathcal{Q}$	$\mathcal{R}$	$\mathcal{P} \wedge (\neg\mathcal{Q})$	$\mathcal{R} \wedge (\neg\mathcal{R})$	$(\cdot) \Rightarrow (\cdot)$	$\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$	$\Big((\cdot) \Rightarrow (\cdot)\Big) \Rightarrow (\cdot)$
V	V	V	F	F	V	V	V
V	V	F	F	F	V	V	V
V	F	V	V	F	F	F	V
V	F	F	V	F	F	F	V
F	V	V	F	F	V	V	V
F	V	F	F	F	V	V	V
F	F	V	F	F	V	V	V
F	F	F	F	F	V	V	V

Il quesito iniziale



Se una di queste quattro carte ha il dorso blu, allora è una figura.

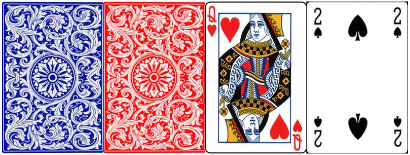
Il quesito iniziale



Se una di queste quattro carte ha il dorso blu, allora è una figura.

$\mathcal{P}$	$\mathcal{Q}$	$\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Il quesito iniziale

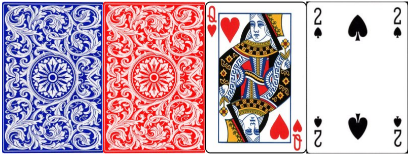


Se una di queste quattro carte ha il dorso blu, allora è una figura.

$\mathcal{P}$	$\mathcal{Q}$	$\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Devo capire quando $\mathcal{P}$ è vera (Blu) e $\mathcal{Q}$ è falsa (2).

Il quesito iniziale



Se una di queste quattro carte ha il dorso blu, allora è una figura.

$\mathcal{P}$	$\mathcal{Q}$	$\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Devo capire quando $\mathcal{P}$ è vera (Blu) e $\mathcal{Q}$ è falsa (2).

Quindi devo girare Blu e 2.

Paradossi dell'implicazione

Paradossi dell'implicazione

Se $\mathcal{P}$ è vera, allora $\mathcal{Q} \Rightarrow \mathcal{P}$ è vera.

Paradossi dell'implicazione

Se $\mathcal{P}$ è vera, allora $\mathcal{Q} \Rightarrow \mathcal{P}$ è vera.
"Se ogni numero pari è la somma di due numeri primi, allora oggi è venerdì."

Paradossi dell'implicazione

Se $\mathcal{P}$ è vera, allora $\mathcal{Q} \Rightarrow \mathcal{P}$ è vera.
"Se ogni numero pari è la somma di due numeri primi, allora oggi è venerdì."

Se $\mathcal{P}$ è falsa, allora $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$ è vera.

Paradossi dell'implicazione

Se $\mathcal{P}$ è vera, allora $\mathcal{Q} \Rightarrow \mathcal{P}$ è vera.
"Se ogni numero pari è la somma di due numeri primi, allora oggi è venerdì."

Se $\mathcal{P}$ è falsa, allora $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$ è vera.
"Se π è razionale, allora la matematica non è un'opinione."

Paradossi dell'implicazione

Se $\mathcal{P}$ è vera, allora $\mathcal{Q} \Rightarrow \mathcal{P}$ è vera.
"Se ogni numero pari è la somma di due numeri primi, allora oggi è venerdì."

Se $\mathcal{P}$ è falsa, allora $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$ è vera.
"Se π è razionale, allora la matematica non è un'opinione."

$(\neg\mathcal{P} \wedge \mathcal{P}) \Rightarrow \mathcal{Q}$

Paradossi dell'implicazione

Se $\mathcal{P}$ è vera, allora $\mathcal{Q} \Rightarrow \mathcal{P}$ è vera.
"Se ogni numero pari è la somma di due numeri primi, allora oggi è venerdì."

Se $\mathcal{P}$ è falsa, allora $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$ è vera.
"Se π è razionale, allora la matematica non è un'opinione."

$(\neg\mathcal{P} \wedge \mathcal{P}) \Rightarrow \mathcal{Q}$
"Se piove e non piove, allora ogni numero pari è la somma di due numeri primi."

Paradossi dell'implicazione

$$\Big((\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}) \wedge (\mathcal{R} \Rightarrow \mathcal{S})\Big) \;\Rightarrow\; \Big((\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{S}) \vee (\mathcal{R} \Rightarrow \mathcal{Q})\Big)$$

Paradossi dell'implicazione

$$\Big((\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}) \wedge (\mathcal{R} \Rightarrow \mathcal{S})\Big) \;\Rightarrow\; \Big((\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{S}) \vee (\mathcal{R} \Rightarrow \mathcal{Q})\Big)$$

$\mathcal{P}$	$\mathcal{Q}$	$\mathcal{R}$	$\mathcal{S}$	$\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$	$\mathcal{R} \Rightarrow \mathcal{S}$	$\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{S}$	$\mathcal{R} \Rightarrow \mathcal{Q}$	$\wedge$	$\vee$	tot.
V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	V	F	V	F	F	V	F	V	V
V	V	F	V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	F	V	V	F	V	V	V	V
V	F	V	V	F	V	V	F	F	V	V
V	F	V	F	F	F	F	F	F	F	V
V	F	F	V	F	V	V	V	F	V	V
V	F	F	F	F	V	F	V	F	V	V
F	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V
F	V	V	F	V	F	V	V	F	V	V
F	V	F	V	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	F	V	V	V	V	V	V	V
F	F	V	V	V	V	V	F	V	V	V
F	F	V	F	V	F	V	F	F	V	V
F	F	F	V	V	V	V	V	V	V	V
F	F	F	F	V	V	V	V	V	V	V

Paradossi dell'implicazione

$$\Big((\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}) \wedge (\mathcal{R} \Rightarrow \mathcal{S})\Big) \;\Rightarrow\; \Big((\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{S}) \vee (\mathcal{R} \Rightarrow \mathcal{Q})\Big)$$

$\mathcal{P}$	$\mathcal{Q}$	$\mathcal{R}$	$\mathcal{S}$	$\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$	$\mathcal{R} \Rightarrow \mathcal{S}$	$\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{S}$	$\mathcal{R} \Rightarrow \mathcal{Q}$	$\wedge$	$\vee$	tot.
V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	V	F	V	F	F	V	F	V	V
V	V	F	V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	F	V	V	F	V	V	V	V
V	F	V	V	F	V	V	F	F	V	V
V	F	V	F	F	F	F	F	F	F	V
V	F	F	V	F	V	V	V	F	V	V
V	F	F	F	F	V	F	V	F	V	V
F	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V
F	V	V	F	V	F	V	V	F	V	V
F	V	F	V	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	F	V	V	V	V	V	V	V
F	F	V	V	V	V	V	F	V	V	V
F	F	V	F	V	F	V	F	F	V	V
F	F	F	V	V	V	V	V	V	V	V
F	F	F	F	V	V	V	V	V	V	V

Se mi trovo a Madrid, allora sono in Spagna, e se mi trovo a Roma, allora sono in Italia.

Paradossi dell'implicazione

$$\Big((\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}) \wedge (\mathcal{R} \Rightarrow \mathcal{S})\Big) \;\Rightarrow\; \Big((\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{S}) \vee (\mathcal{R} \Rightarrow \mathcal{Q})\Big)$$

$\mathcal{P}$	$\mathcal{Q}$	$\mathcal{R}$	$\mathcal{S}$	$\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$	$\mathcal{R} \Rightarrow \mathcal{S}$	$\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{S}$	$\mathcal{R} \Rightarrow \mathcal{Q}$	$\wedge$	$\vee$	tot.
V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	V	F	V	F	F	V	F	V	V
V	V	F	V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	F	V	V	F	V	V	V	V
V	F	V	V	F	V	V	F	F	V	V
V	F	V	F	F	F	F	F	F	F	V
V	F	F	V	F	V	V	V	F	V	V
V	F	F	F	F	V	F	V	F	V	V
F	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V
F	V	V	F	V	F	V	V	F	V	V
F	V	F	V	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	F	V	V	V	V	V	V	V
F	F	V	V	V	V	V	F	V	V	V
F	F	V	F	V	F	V	F	F	V	V
F	F	F	V	V	V	V	V	V	V	V
F	F	F	F	V	V	V	V	V	V	V

Se mi trovo a Madrid, allora sono in Spagna, e se mi trovo a Roma, allora sono in Italia. Quindi è vero che se mi trovo a Madrid allora sono in Italia, oppure è vero che se mi trovo a Roma allora sono in Spagna.

Paradossi dell'implicazione

$$\Big((\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q}) \Rightarrow \mathcal{R}\Big) \;\Rightarrow\; \Big((\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{R}) \vee (\mathcal{Q} \Rightarrow \mathcal{R})\Big)$$

Paradossi dell'implicazione

$$\Big((\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q}) \Rightarrow \mathcal{R}\Big) \;\Rightarrow\; \Big((\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{R}) \vee (\mathcal{Q} \Rightarrow \mathcal{R})\Big)$$

Se schiaccio l'interruttore A e l'interruttore B, la luce si accende.

Paradossi dell'implicazione

$$\Big((\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q}) \Rightarrow \mathcal{R}\Big) \;\Rightarrow\; \Big((\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{R}) \vee (\mathcal{Q} \Rightarrow \mathcal{R})\Big)$$

Se schiaccio l'interruttore A e l'interruttore B, la luce si accende. Quindi, se schiaccio l'interruttore A la luce si accende, o se schiaccio l'interruttore B la luce si accende.

Autoreferenzialità: il paradosso del mentitore

Epimenide (VII secolo a.C.):

> *"Tutti i Cretesi sono bugiardi."*

Autoreferenzialità: il paradosso del mentitore

Epimenide (VII secolo a.C.):

> *"Tutti i Cretesi sono bugiardi."*

Ma Epimenide è di Creta!

Autoreferenzialità: il paradosso del mentitore

Epimenide (VII secolo a.C.):

> *"Tutti i Cretesi sono bugiardi."*

Ma Epimenide è di Creta!

La frase **non** è un paradosso: è una frase falsa, ma la sua negazione è

Autoreferenzialità: il paradosso del mentitore

Epimenide (VII secolo a.C.):

> *"Tutti i Cretesi sono bugiardi."*

Ma Epimenide è di Creta!

La frase **non** è un paradosso: è una frase falsa, ma la sua negazione è

> *"Esiste almeno un Cretese che non è bugiardo."*

Autoreferenzialità: il paradosso del mentitore

Epimenide (VII secolo a.C.):

"Tutti i Cretesi sono bugiardi."

Ma Epimenide è di Creta!

La frase **non** è un paradosso: è una frase falsa, ma la sua negazione è

"Esiste almeno un Cretese che non è bugiardo."

E questa frase può benissimo essere vera.

Ancora autoreferenzialità

"Questa frase contiene sei parole."

Ancora autoreferenzialità

"Questa frase contiene sei parole."

È una frase **falsa**.

Ancora autoreferenzialità

“*Questa frase contiene sei parole.*”

È una frase **falsa**. Dunque

“*Questa frase* non *contiene sei parole.*”

Ancora autoreferenzialità

"Questa frase contiene sei parole."

È una frase **falsa**. Dunque

"Questa frase non *contiene sei parole."*

è una frase **vera**.

Ancora autoreferenzialità

“Questa frase contiene sei parole.”

È una frase **falsa**. Dunque

“Questa frase non *contiene sei parole.”*

è una frase **vera**. O no??

Ancora autoreferenzialità: il paradosso di Russell

Un insieme che non contiene se stesso come elemento si dice *normale*.

Ancora autoreferenzialità: il paradosso di Russell

Un insieme che non contiene se stesso come elemento si dice *normale*.

Un insieme che contiene se stesso come elemento si dice *strano*.

Ancora autoreferenzialità: il paradosso di Russell

Un insieme che non contiene se stesso come elemento si dice *normale*.

Un insieme che contiene se stesso come elemento si dice *strano*.

L'insieme degli insiemi normali è normale o è strano?

Cambiamo argomento: Smullyan e i cappelli

Aldo, Giovanni e Giacomo sono tre logici perfetti.

Cambiamo argomento: Smullyan e i cappelli

Aldo, Giovanni e Giacomo sono tre logici perfetti.
Ci sono quattro francobolli rossi e quattro francobolli blu.

Cambiamo argomento: Smullyan e i cappelli

Aldo, Giovanni e Giacomo sono tre logici perfetti.
Ci sono quattro francobolli rossi e quattro francobolli blu.
Ognuno incolla (al buio) due francobolli sul proprio cappello, e i due che avanzano vengono buttati.

Cambiamo argomento: Smullyan e i cappelli

Aldo, Giovanni e Giacomo sono tre logici perfetti.
Ci sono quattro francobolli rossi e quattro francobolli blu.
Ognuno incolla (al buio) due francobolli sul proprio cappello, e i due che avanzano vengono buttati.

Si riaccende la luce. Alla domanda: "Sapete di che colore sono i vostri francobolli?", i logici rispondono, nell'ordine:

Cambiamo argomento: Smullyan e i cappelli

Aldo, Giovanni e Giacomo sono tre logici perfetti.
Ci sono quattro francobolli rossi e quattro francobolli blu.
Ognuno incolla (al buio) due francobolli sul proprio cappello, e i due che avanzano vengono buttati.

Si riaccende la luce. Alla domanda: "Sapete di che colore sono i vostri francobolli?", i logici rispondono, nell'ordine:

Aldo: "No".

Cambiamo argomento: Smullyan e i cappelli

Aldo, Giovanni e Giacomo sono tre logici perfetti.
Ci sono quattro francobolli rossi e quattro francobolli blu.
Ognuno incolla (al buio) due francobolli sul proprio cappello, e i due che avanzano vengono buttati.

Si riaccende la luce. Alla domanda: “Sapete di che colore sono i vostri francobolli?”, i logici rispondono, nell’ordine:

Aldo: “No”. Giovanni: “No”.

Cambiamo argomento: Smullyan e i cappelli

Aldo, Giovanni e Giacomo sono tre logici perfetti.
Ci sono quattro francobolli rossi e quattro francobolli blu.
Ognuno incolla (al buio) due francobolli sul proprio cappello, e i due che avanzano vengono buttati.

Si riaccende la luce. Alla domanda: "Sapete di che colore sono i vostri francobolli?", i logici rispondono, nell'ordine:

Aldo: "No". Giovanni: "No". Giacomo: "No".

Cambiamo argomento: Smullyan e i cappelli

Aldo, Giovanni e Giacomo sono tre logici perfetti.
Ci sono quattro francobolli rossi e quattro francobolli blu.
Ognuno incolla (al buio) due francobolli sul proprio cappello, e i due che avanzano vengono buttati.

Si riaccende la luce. Alla domanda: “Sapete di che colore sono i vostri francobolli?”, i logici rispondono, nell’ordine:

Aldo: “No”. Giovanni: “No”. Giacomo: “No”. Aldo “No”.

Cambiamo argomento: Smullyan e i cappelli

Aldo, Giovanni e Giacomo sono tre logici perfetti.
Ci sono quattro francobolli rossi e quattro francobolli blu.
Ognuno incolla (al buio) due francobolli sul proprio cappello, e i due che avanzano vengono buttati.

Si riaccende la luce. Alla domanda: "Sapete di che colore sono i vostri francobolli?", i logici rispondono, nell'ordine:

Aldo: "No". Giovanni: "No". Giacomo: "No". Aldo "No". Giovanni: "Sì!"

Cambiamo argomento: Smullyan e i cappelli

Aldo, Giovanni e Giacomo sono tre logici perfetti.
Ci sono quattro francobolli rossi e quattro francobolli blu.
Ognuno incolla (al buio) due francobolli sul proprio cappello, e i due che avanzano vengono buttati.

Si riaccende la luce. Alla domanda: "Sapete di che colore sono i vostri francobolli?", i logici rispondono, nell'ordine:

Aldo: "No". Giovanni: "No". Giacomo: "No". Aldo "No". Giovanni: "Sì!"

Di che colore sono i francobolli di Giovanni?

Smullyan: il problema dei cappelli

Aldo, Giovanni e Giacomo. Quattro francobolli rossi e quattro francobolli blu.

Aldo: “No”. Giovanni: “No”. Giacomo: “No”. Aldo “No”.

Giovanni: “Sì!”

Smullyan: il problema dei cappelli

Aldo, Giovanni e Giacomo. Quattro francobolli rossi e quattro francobolli blu.
Aldo: “No”. Giovanni: “No”. Giacomo: “No”. Aldo “No”.
Giovanni: “Sì!”

Giovanni pensa: se avessi rosso-rosso, Aldo avrebbe ragionato così: “Io non posso avere rosso-rosso, perché allora Giacomo avrebbe visto quattro rossi e sarebbe stato certo di avere blu-blu.

Smullyan: il problema dei cappelli

Aldo, Giovanni e Giacomo. Quattro francobolli rossi e quattro francobolli blu.
Aldo: "No". Giovanni: "No". Giacomo: "No". Aldo "No".
Giovanni: "Sì!"

Giovanni pensa: se avessi rosso-rosso, Aldo avrebbe ragionato così: "Io non posso avere rosso-rosso, perché allora Giacomo avrebbe visto quattro rossi e sarebbe stato certo di avere blu-blu. Ma non posso avere neppure blu-blu, perché Giacomo avrebbe fatto su Giovanni lo stesso ragionamento che io ho fatto ora su di lui. Dunque ho rosso-blu."

Smullyan: il problema dei cappelli

Aldo, Giovanni e Giacomo. Quattro francobolli rossi e quattro francobolli blu.
Aldo: “No”. Giovanni: “No”. Giacomo: “No”. Aldo “No”.
Giovanni: “Sì!”

Giovanni pensa: se avessi rosso-rosso, Aldo avrebbe ragionato così: “Io non posso avere rosso-rosso, perché allora Giacomo avrebbe visto quattro rossi e sarebbe stato certo di avere blu-blu. Ma non posso avere neppure blu-blu, perché Giacomo avrebbe fatto su Giovanni lo stesso ragionamento che io ho fatto ora su di lui. Dunque ho rosso-blu.”
Sempre Giovanni pensa: se avessi blu-blu, sarebbe stato lo stesso.

Smullyan: il problema dei cappelli

Aldo, Giovanni e Giacomo. Quattro francobolli rossi e quattro francobolli blu.
Aldo: “No”. Giovanni: “No”. Giacomo: “No”. Aldo “No”.
Giovanni: “Sì!”

Giovanni pensa: se avessi rosso-rosso, Aldo avrebbe ragionato così: “Io non posso avere rosso-rosso, perché allora Giacomo avrebbe visto quattro rossi e sarebbe stato certo di avere blu-blu. Ma non posso avere neppure blu-blu, perché Giacomo avrebbe fatto su Giovanni lo stesso ragionamento che io ho fatto ora su di lui. Dunque ho rosso-blu.”
Sempre Giovanni pensa: se avessi blu-blu, sarebbe stato lo stesso. Ma Aldo non ha saputo rispondere, dunque io ho rosso-blu.

Smullyan: il problema dei cappelli

Aldo, Giovanni e Giacomo. Quattro francobolli rossi e quattro francobolli blu.

Aldo: "No". Giovanni: "No". Giacomo: "No". Aldo "No".

Giovanni: "Sì!"

Smullyan: il problema dei cappelli

Aldo, Giovanni e Giacomo. Quattro francobolli rossi e quattro francobolli blu.

Aldo: “No”. Giovanni: “No”. Giacomo: “No”. Aldo “No”. Giovanni: “Sì!”

Soluzione alternativa: li quesito è perfettamente simmetrico tra rosso e blu.

Smullyan: il problema dei cappelli

Aldo, Giovanni e Giacomo. Quattro francobolli rossi e quattro francobolli blu.
Aldo: “No”. Giovanni: “No”. Giacomo: “No”. Aldo “No”.
Giovanni: “Sì!”

Soluzione alternativa: li quesito è perfettamente simmetrico tra rosso e blu. Però, il gioco deve avere una risposta!

Smullyan: il problema dei cappelli

Aldo, Giovanni e Giacomo. Quattro francobolli rossi e quattro francobolli blu.

Aldo: “No”. Giovanni: “No”. Giacomo: “No”. Aldo “No”.
Giovanni: “Sì!”

Soluzione alternativa: li quesito è perfettamente simmetrico tra rosso e blu. Però, il gioco deve avere una risposta!
Se la risposta fosse rosso-rosso, allo stesso modo dovrebbe essere blu-blu.

Smullyan: il problema dei cappelli

Aldo, Giovanni e Giacomo. Quattro francobolli rossi e quattro francobolli blu.

Aldo: “No”. Giovanni: “No”. Giacomo: “No”. Aldo “No”. Giovanni: “Sì!”

Soluzione alternativa: li quesito è perfettamente simmetrico tra rosso e blu. Però, il gioco deve avere una risposta!
Se la risposta fosse rosso-rosso, allo stesso modo dovrebbe essere blu-blu.
Dunque l’unica risposta possibile è rosso-blu.

Smullyan: il problema dei cappelli

Aldo, Giovanni e Giacomo. Quattro francobolli rossi e quattro francobolli blu.

Aldo: "No". Giovanni: "No". Giacomo: "No". Aldo "No". Giovanni: "Sì!"

Soluzione alternativa: Ii quesito è perfettamente simmetrico tra rosso e blu. Però, il gioco deve avere una risposta!
Se la risposta fosse rosso-rosso, allo stesso modo dovrebbe essere blu-blu.
Dunque l'unica risposta possibile è rosso-blu.

In questo caso, abbiamo supposto che Smullyan sia un logico perfetto!

Un problema di Dudeney

Su un autobus ci sono un autista, un controllore e un meccanico, che si chiamano Bresciani, Ferrari, Leali (non necessariamente in questo ordine).

Un problema di Dudeney

Su un autobus ci sono un autista, un controllore e un meccanico, che si chiamano Bresciani, Ferrari, Leali (non necessariamente in questo ordine).
Ci sono poi tre passeggeri: il sig. Bresciani, il sig. Ferrari, il sig. Leali

Un problema di Dudeney

Su un autobus ci sono un autista, un controllore e un meccanico, che si chiamano Bresciani, Ferrari, Leali (non necessariamente in questo ordine).
Ci sono poi tre passeggeri: il sig. Bresciani, il sig. Ferrari, il sig. Leali (guarda un po'...).

Un problema di Dudeney

Su un autobus ci sono un autista, un controllore e un meccanico, che si chiamano Bresciani, Ferrari, Leali (non necessariamente in questo ordine).
Ci sono poi tre passeggeri: il sig. Bresciani, il sig. Ferrari, il sig. Leali (guarda un po'...).
Si sa che:

1. il sig. Leali vive a Flero;
2. il controllore vive a Concesio;
3. il sig. Ferrari non conosce la logica;
4. il passeggero omonimo del controllore vive a Rezzato;
5. il controllore e uno dei passeggeri, un famoso matematico, sono vicini di casa;
6. Bresciani batte il meccanico a briscola.

Un problema di Dudeney

Su un autobus ci sono un autista, un controllore e un meccanico, che si chiamano Bresciani, Ferrari, Leali (non necessariamente in questo ordine).
Ci sono poi tre passeggeri: il sig. Bresciani, il sig. Ferrari, il sig. Leali (guarda un po'...).
Si sa che:

1. il sig. Leali vive a Flero;
2. il controllore vive a Concesio;
3. il sig. Ferrari non conosce la logica;
4. il passeggero omonimo del controllore vive a Rezzato;
5. il controllore e uno dei passeggeri, un famoso matematico, sono vicini di casa;
6. Bresciani batte il meccanico a briscola.

Chi è l'autista?

Problema di Dudeney

	aut.	contr.	mecc.
Bresciani			
Ferrari			
Leali			

	Flero	Concesio	Rezzato
Sig. B.			
Sig. F.			
Sig. L.			

Problema di Dudeney

	aut.	contr.	mecc.
Bresciani			
Ferrari			
Leali			

	Flero	Concesio	Rezzato
Sig. B.			
Sig. F.			
Sig. L.			

1. il sig. Leali vive a Flero;

Problema di Dudeney

	aut.	contr.	mecc.
Bresciani			
Ferrari			
Leali			

	Flero	Concesio	Rezzato
Sig. B.	0		
Sig. F.	0		
Sig. L.	1	0	0

1. il sig. Leali vive a Flero;

Problema di Dudeney

	aut.	contr.	mecc.
Bresciani			
Ferrari			
Leali			

	Flero	Concesio	Rezzato
Sig. B.	0		
Sig. F.	0		
Sig. L.	1	0	0

2. il controllore vive a Concesio;
3. il sig. Ferrari non conosce la logica;

5. il controllore e uno dei passeggeri, un famoso matematico, sono vicini di casa;

Problema di Dudeney

	aut.	contr.	mecc.
Bresciani			
Ferrari			
Leali			

	Flero	Concesio	Rezzato
Sig. B.	0		
Sig. F.	0	0	
Sig. L.	1	0	0

2. il controllore vive a Concesio;
3. il sig. Ferrari non conosce la logica;

5. il controllore e uno dei passeggeri, un famoso matematico, sono vicini di casa;

Problema di Dudeney

	aut.	contr.	mecc.
Bresciani			
Ferrari			
Leali			

	Flero	Concesio	Rezzato
Sig. B.	0	1	0
Sig. F.	0	0	1
Sig. L.	1	0	0

2. il controllore vive a Concesio;
3. il sig. Ferrari non conosce la logica;

5. il controllore e uno dei passeggeri, un famoso matematico, sono vicini di casa;

Problema di Dudeney

	aut.	contr.	mecc.
Bresciani			
Ferrari			
Leali			

	Flero	Concesio	Rezzato
Sig. B.	0	1	0
Sig. F.	0	0	1
Sig. L.	1	0	0

4. il passeggero omonimo del controllore vive a Rezzato;

Problema di Dudeney

	aut.	contr.	mecc.
Bresciani		0	
Ferrari	0	1	0
Leali		0	

	Flero	Concesio	Rezzato
Sig. B.	0	1	0
Sig. F.	0	0	1
Sig. L.	1	0	0

4. il passeggero omonimo del controllore vive a Rezzato;

Problema di Dudeney

	aut.	contr.	mecc.
Bresciani		0	
Ferrari	0	1	0
Leali		0	

	Flero	Concesio	Rezzato
Sig. B.	0	1	0
Sig. F.	0	0	1
Sig. L.	1	0	0

6. Bresciani batte il meccanico a briscola.

Problema di Dudeney

	aut.	contr.	mecc.
Bresciani	1	0	0
Ferrari	0	1	0
Leali	0	0	1

	Flero	Concesio	Rezzato
Sig. B.	0	1	0
Sig. F.	0	0	1
Sig. L.	1	0	0

6. Bresciani batte il meccanico a briscola.

Problema di Dudeney

	aut.	contr.	mecc.
Bresciani	1	0	0
Ferrari	0	1	0
Leali	0	0	1

	Flero	Concesio	Rezzato
Sig. B.	0	1	0
Sig. F.	0	0	1
Sig. L.	1	0	0

1. il sig. Leali vive a Flero;
2. il controllore vive a Concesio;
3. il sig. Ferrari non conosce la logica;
4. il passeggero omonimo del controllore vive a Rezzato;
5. il controllore e uno dei passeggeri, un famoso matematico, sono vicini di casa;
6. Bresciani batte il meccanico a briscola.

L'autista si chiama Bresciani.

L'isola di Smullyan

i *cavalieri* dicono sempre la verità,
i *furfanti* mentono sempre.

L'isola di Smullyan

i *cavalieri* dicono sempre la verità,
i *furfanti* mentono sempre.

- La frase "Io sono un cavaliere" può essere detta da chiunque.

L’isola di Smullyan

i *cavalieri* dicono sempre la verità,
i *furfanti* mentono sempre.

- La frase “Io sono un cavaliere” può essere detta da chiunque.
  $C \to C, \qquad F \to F$

L'isola di Smullyan

i *cavalieri* dicono sempre la verità,
i *furfanti* mentono sempre.

- La frase "Io sono un cavaliere" può essere detta da chiunque.
  $C \rightarrow C, \qquad F \rightarrow F$
- La frase "Io sono un furfante" è una contraddizione.

L'isola di Smullyan

i *cavalieri* dicono sempre la verità,
i *furfanti* mentono sempre.

- La frase "Io sono un cavaliere" può essere detta da chiunque.
  $C \to C, \qquad F \to F$
- La frase "Io sono un furfante" è una contraddizione.
  $C \to F, \qquad F \to C$

L'isola di Smullyan

i *cavalieri* dicono sempre la verità,
i *furfanti* mentono sempre.

- La frase "Io sono un cavaliere" può essere detta da chiunque.
  $C \to C, \qquad F \to F$
- La frase "Io sono un furfante" è una contraddizione.
  $C \to F, \qquad F \to C$
- Ci sono Aldo e Bruno. Aldo dice: "Siamo entrambi furfanti".
  Che cosa sono?

L'isola di Smullyan

i *cavalieri* dicono sempre la verità,
i *furfanti* mentono sempre.

- La frase "Io sono un cavaliere" può essere detta da chiunque.
  $C \to C, \qquad F \to F$
- La frase "Io sono un furfante" è una contraddizione.
  $C \to F, \qquad F \to C$
- Ci sono Aldo e Bruno. Aldo dice: "Siamo entrambi furfanti".
  Che cosa sono?
  $A \equiv C \to (F, F), \qquad A \equiv F \to \{(C, C), (C, F), (F, C)\}$

L'isola di Smullyan

i *cavalieri* dicono sempre la verità,
i *furfanti* mentono sempre.

- La frase "Io sono un cavaliere" può essere detta da chiunque.
  $C \rightarrow C, \qquad F \rightarrow F$
- La frase "Io sono un furfante" è una contraddizione.
  $C \rightarrow F, \qquad F \rightarrow C$
- Ci sono Aldo e Bruno. Aldo dice: "Siamo entrambi furfanti".
  Che cosa sono?
  $A \equiv C \rightarrow (F, F), \qquad A \equiv F \rightarrow \{(C, C), (C, F), \boxed{(F, C)}\}$

L'isola di Smullyan

i *cavalieri* dicono sempre la verità,
i *furfanti* mentono sempre.

- La frase "Io sono un cavaliere" può essere detta da chiunque.
  $C \rightarrow C, \qquad F \rightarrow F$
- La frase "Io sono un furfante" è una contraddizione.
  $C \rightarrow F, \qquad F \rightarrow C$
- Ci sono Aldo e Bruno. Aldo dice: "Siamo entrambi furfanti". Che cosa sono?
  $A \equiv C \rightarrow (F, F), \qquad A \equiv F \rightarrow \{(C, C), (C, F), \boxed{(F, C)}\}$
- Aldo dice: "Io sono un furfante e Bruno no".

L'isola di Smullyan

i *cavalieri* dicono sempre la verità,
i *furfanti* mentono sempre.

- La frase "Io sono un cavaliere" può essere detta da chiunque.
  $C \rightarrow C, \qquad F \rightarrow F$
- La frase "Io sono un furfante" è una contraddizione.
  $C \rightarrow F, \qquad F \rightarrow C$
- Ci sono Aldo e Bruno. Aldo dice: "Siamo entrambi furfanti". Che cosa sono?
  $A \equiv C \rightarrow (F, F), \qquad A \equiv F \rightarrow \{(C, C), (C, F), \boxed{(F, C)}\}$
- Aldo dice: "Io sono un furfante e Bruno no".
  $A \equiv C \rightarrow (F, C), \qquad A \equiv F \rightarrow \{(C, C), (C, F), (F, F)\}$

L'isola di Smullyan

i *cavalieri* dicono sempre la verità,
i *furfanti* mentono sempre.

- La frase "Io sono un cavaliere" può essere detta da chiunque.
  $C \rightarrow C, \qquad F \rightarrow F$
- La frase "Io sono un furfante" è una contraddizione.
  $C \rightarrow F, \qquad F \rightarrow C$
- Ci sono Aldo e Bruno. Aldo dice: "Siamo entrambi furfanti". Che cosa sono?
  $A \equiv C \rightarrow (F, F), \qquad A \equiv F \rightarrow \{(C, C), (C, F), \boxed{(F, C)}\}$
- Aldo dice: "Io sono un furfante e Bruno no".
  $A \equiv C \rightarrow (F, C), \qquad A \equiv F \rightarrow \{(C, C), (C, F), \boxed{(F, F)}\}$

Nell'isola di Smullyan vivono infiniti abitanti A_0, A_1, A_2, ... Un giorno, tutti gli abitanti A_{2n} (quelli di indice pari) dicono la seguente frase: "Il numero di cavalieri sull'isola è finito". Se ne può dedurre che:

1. ci sono infiniti furfanti e infiniti cavalieri;
2. ci sono infiniti cavalieri ed un numero finito di furfanti;
3. ci sono infiniti furfanti ed un numero finito di cavalieri;
4. ci sono infiniti cavalieri, ma non siamo in grado di stabilire se i furfanti siano in numero finito o infinito;
5. ci sono infiniti furfanti, ma non siamo in grado di stabilire se i cavalieri siano in numero finito o infinito.

Nell'isola di Smullyan vivono infiniti abitanti A_0, A_1, A_2,... Un giorno, tutti gli abitanti A_{2n} (quelli di indice pari) dicono la seguente frase: "Il numero di cavalieri sull'isola è finito". Se ne può dedurre che:

1. ci sono infiniti furfanti e infiniti cavalieri;
2. ci sono infiniti cavalieri ed un numero finito di furfanti;
3. ci sono infiniti furfanti ed un numero finito di cavalieri;
4. ci sono infiniti cavalieri, ma non siamo in grado di stabilire se i furfanti siano in numero finito o infinito;
5. ci sono infiniti furfanti, ma non siamo in grado di stabilire se i cavalieri siano in numero finito o infinito.

Tra gli (A_{2n}) non tutti sono cavalieri,

Nell'isola di Smullyan vivono infiniti abitanti A_0, A_1, A_2,... Un giorno, tutti gli abitanti A_{2n} (quelli di indice pari) dicono la seguente frase: "Il numero di cavalieri sull'isola è finito". Se ne può dedurre che:

1. ci sono infiniti furfanti e infiniti cavalieri;
2. ci sono infiniti cavalieri ed un numero finito di furfanti;
3. ci sono infiniti furfanti ed un numero finito di cavalieri;
4. ci sono infiniti cavalieri, ma non siamo in grado di stabilire se i furfanti siano in numero finito o infinito;
5. ci sono infiniti furfanti, ma non siamo in grado di stabilire se i cavalieri siano in numero finito o infinito.

Tra gli (A_{2n}) non tutti sono cavalieri, quindi tutti gli (A_{2n}) sono furfanti.

Nell'isola di Smullyan vivono infiniti abitanti A_0, A_1, A_2,... Un giorno, tutti gli abitanti A_{2n} (quelli di indice pari) dicono la seguente frase: "Il numero di cavalieri sull'isola è finito". Se ne può dedurre che:

1. ci sono infiniti furfanti e infiniti cavalieri;
2. ci sono infiniti cavalieri ed un numero finito di furfanti;
3. ci sono infiniti furfanti ed un numero finito di cavalieri;
4. ci sono infiniti cavalieri, ma non siamo in grado di stabilire se i furfanti siano in numero finito o infinito;
5. ci sono infiniti furfanti, ma non siamo in grado di stabilire se i cavalieri siano in numero finito o infinito.

Tra gli (A_{2n}) non tutti sono cavalieri, quindi tutti gli (A_{2n}) sono furfanti. E quindi la frase è falsa, e anche i cavalieri sono infiniti.

Nell'isola di Smullyan vivono infiniti abitanti A_0, A_1, A_2,... Un giorno, tutti gli abitanti A_{2n} (quelli di indice pari) dicono la seguente frase: "Il numero di cavalieri sull'isola è finito". Se ne può dedurre che:

1. ci sono infiniti furfanti e infiniti cavalieri;
2. ci sono infiniti cavalieri ed un numero finito di furfanti;
3. ci sono infiniti furfanti ed un numero finito di cavalieri;
4. ci sono infiniti cavalieri, ma non siamo in grado di stabilire se i furfanti siano in numero finito o infinito;
5. ci sono infiniti furfanti, ma non siamo in grado di stabilire se i cavalieri siano in numero finito o infinito.

Tra gli (A_{2n}) non tutti sono cavalieri, quindi tutti gli (A_{2n}) sono furfanti. E quindi la frase è falsa, e anche i cavalieri sono infiniti.

Si deduce la 1.