Risoluzione della prova di Meccanica Analitica del 5 luglio 2024

I) 1. Come parametri lagrangiani usiamo l'ascissa di P lungo l'asta a partire da O e l'angolo ϑ indicato nel testo: in questo modo si ha la limitazione $\xi \in [0, 2\ell]$.

Nel caso $\xi \in (0, 2\ell)$ usiamo il potenziale, dove indichiamo con G il baricentro dell'asta:

$$U = -mgy_G - mgy_P - \frac{1}{2}k|P - B|^2 - \frac{1}{2}k|A - C|^2 = mg\ell \cos\vartheta + mg\xi \cos\vartheta - \frac{k}{2}\xi^2 \cos^2\vartheta - 2k\ell^2 \cos^2\vartheta.$$

Le posizioni di equilibrio si trovano risolvendo

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial \xi} = mg\cos\vartheta - k\xi\cos^2\vartheta = 0 \\ \dfrac{\partial U}{\partial \vartheta} = -mg\ell\sin\vartheta - mg\xi\sin\vartheta + k\xi^2\sin\vartheta\cos\vartheta + 4k\ell^2\sin\vartheta\cos\vartheta = 0. \end{cases}$$

Raccogliamo $\cos\vartheta$ nella prima equazione: se $\vartheta = \pi/2$ o $\vartheta = 3\pi/2$, dalla seconda si ha $\xi = -\ell$ che non è accettabile. Quindi la prima equazione si riduce a

$$mg - k\xi\cos\vartheta = 0.$$

Ora raccogliamo $\sin\vartheta$ nella seconda: se $\vartheta = 0$ abbiamo $\xi = mg/k$ che è accettabile per $\lambda < 2$, mentre se $\vartheta = \pi$ abbiamo $\xi = -mg/k$ che non è accettabile.

Della seconda equazione resta

$$-mg\ell - mg\xi + k\xi^2\cos\vartheta + 4k\ell^2\cos\vartheta = 0$$

e sostituendo $\xi\cos\vartheta = mg/k$ otteniamo

$$-mg\ell\cos\vartheta - \frac{m^2g^2}{k} + k\frac{m^2g^2}{k^2} + 4k\ell^2\cos^2\vartheta = 0 \quad \Rightarrow \quad -mg + 4k\ell\cos\vartheta = 0,$$

da cui $\cos\vartheta = \lambda/4$. Quindi

$$\xi\frac{\lambda}{4} = \frac{mg}{k} = \lambda\ell \quad \Rightarrow \quad \xi = 4\ell$$

che non è accettabile.

In definitiva, si ha la posizione di equilibrio

$$P\left(\frac{mg}{k}, 0\right) \quad \text{per } \lambda < 2.$$

2. Calcolando la matrice hessiana del potenziale troviamo

$$\mathcal{H} = \begin{bmatrix} -k\cos^2\vartheta & -mg\sin\vartheta + 2k\xi\sin\vartheta\cos\vartheta \\ -mg\sin\vartheta + 2k\xi\sin\vartheta\cos\vartheta & -mg\ell\cos\vartheta - mg\xi\cos\vartheta + k(\xi^2 + 4\ell^2)(\cos^2\vartheta - \sin^2\vartheta) \end{bmatrix},$$

e quindi risulta

$$\mathcal{H}(P) = \begin{bmatrix} -k & 0 \\ 0 & -mg\ell + 4k\ell^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k & 0 \\ 0 & k\ell^2(-\lambda + 4) \end{bmatrix}$$

che è definita negativa per $\lambda > 4$. Ma poiché P esiste solo per $\lambda < 2$, si ha che P è instabile quando esiste.

3. Si hanno posizioni di confine per $\xi = 0, 2\ell$. Nel caso $\xi = 0$ si ha $\dot{\xi} \geqslant 0$, quindi

$$\begin{cases} mg\cos\vartheta \leqslant 0 \\ -mg\ell\sin\vartheta + 4k\ell^2\sin\vartheta\cos\vartheta = 0. \end{cases}$$

Dalla seconda segue $\vartheta = 0, \pi$ oppure $\cos\vartheta = \lambda/4$. La prima è soddisfatta solo per $\vartheta = \pi$, quindi $(0, \pi)$ è posizione di equilibrio di confine per ogni valore di λ.

Nel caso $\xi = 2\ell$ si ha $\dot{\xi} \leqslant 0$, quindi

$$\begin{cases} mg\cos\vartheta - 2k\ell\cos^2\vartheta \geqslant 0 \\ -3mg\ell\sin\vartheta + 8k\ell^2\sin\vartheta\cos\vartheta = 0. \end{cases}$$

Dalla seconda segue $\vartheta = 0, \pi$ oppure $\cos\vartheta = 3\lambda/8$. Sostituendo nella prima: $\vartheta = 0$ dà $\lambda \geqslant 2$, $\vartheta = \pi$ non è accettabile mentre $\cos\vartheta = 3\lambda/8$ sì. Quindi $(2\ell, 0)$ è posizione di equilibrio di confine per $\lambda \geqslant 2$ e $(2\ell, \pm\arccos(3\lambda/8))$ è posizione di equilibrio di confine per $\lambda \leqslant 8/3$.

4. Per trovare l'energia cinetica usiamo il Teorema di König. L'asta ha l'estremo O fisso, quindi

$$K_{\text{asta}} = \frac{1}{2}\omega \cdot J_O\omega = \frac{1}{2}\frac{1}{3}m(2\ell)^2\dot{\vartheta}^2 = \frac{2}{3}m\ell^2\dot{\vartheta}^2.$$

Per il punto materiale calcoliamo

$$(P - O) = \xi\sin\vartheta\boldsymbol{e}_x - \xi\cos\vartheta\boldsymbol{e}_y \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{v}_P = (\dot{\xi}\sin\vartheta + \xi\dot{\vartheta}\cos\vartheta)\boldsymbol{e}_x - (\dot{\xi}\cos\vartheta - \xi\dot{\vartheta}\sin\vartheta)\boldsymbol{e}_y,$$

da cui $|\boldsymbol{v}_P|^2 = \dot{\xi}^2 + \xi^2\dot{\vartheta}^2$. Quindi

$$K_P = \frac{1}{2}m|\boldsymbol{v}_P|^2 = \frac{1}{2}m(\dot{\xi}^2 + \xi^2\dot{\vartheta}^2).$$

La lagrangiana si ottiene da $\mathcal{L} = K_{\text{lam}} + K_P + U$, quindi

$$\mathcal{L}(\xi, \vartheta, \dot{\xi}, \dot{\vartheta}) = \frac{2}{3}m\ell^2\dot{\vartheta}^2 + \frac{1}{2}m(\dot{\xi}^2 + \xi^2\dot{\vartheta}^2) + mg\ell\cos\vartheta + mg\xi\cos\vartheta - \frac{k}{2}\xi^2\cos^2\vartheta - 2k\ell^2\cos^2\vartheta.$$

II) Calcolando la parentesi di Poisson tra Q e P si ottiene

$$[Q, P] = 2q\frac{1}{2q} - k\left(-\frac{p}{2q^2}\right) = 1 + k\frac{p}{2q^2}$$

e quindi la trasformazione è canonica per $k = 0$. Quindi si ha

$$\begin{cases} Q(q,p) = 1 + q^2 \\ P(q,p) = \dfrac{p}{2q} - 1 \end{cases}$$

e per cercare una funzione generatrice del tipo $F_2(q, P)$ devo scrivere la trasformazione nella forma

$$\begin{cases} p = \dfrac{\partial F_2}{\partial q}(q, P) \\ Q = \dfrac{\partial F_2}{\partial P}(q, P) \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} p = 2q(P + 1) \\ Q = 1 + q^2. \end{cases}$$

Partendo dalla prima si ha

$$\frac{\partial F_2}{\partial q} = 2q(P + 1) \quad \Rightarrow \quad F_2(q, P) = q^2(1 + P) + g(P)$$

e sostituendo nella seconda

$$\frac{\partial F_2}{\partial P} = q^2 + g'(P) = 1 + q^2 \quad \Rightarrow \quad g'(P) = 1 \quad \Rightarrow \quad g(P) = P + \text{cost}.$$

Quindi si ha $F_2(q, P) = q^2(P + 1) + P + \text{cost}$.

Poiché la trasformazione non dipende dal tempo, per scrivere la nuova hamiltoniana basta applicare il cambio di variabili alla vecchia. Esplicitando

$$\begin{cases} q = \pm\sqrt{Q - 1} \\ p = 2q(P + 1) = \pm 2(P + 1)\sqrt{Q - 1} \end{cases}$$

si ottiene

$$\widetilde{\mathcal{H}}(Q, P) = 2(P + 1)^2 + Q - 1 = 2P^2 + 4P + Q + \text{cost}.$$