

# UNIVERSITÀ CATTOLICA DEL SACRO CUORE

## Prova scritta di Sistemi Dinamici

17 gennaio 2025

1. Data la famiglia di equazioni differenziali

$$\dot{x} = (x^2 - \mu - 1)(x^2 + \mu - 1)(x - 1)$$

si chiede di studiarne la stabilità delle posizioni di equilibrio al variare del parametro  $\mu \in \mathbb{R}$  e di tracciarne il diagramma di biforcazione.

2. Si discuta la stabilità del sistema lineare

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + ky \\ \dot{y} = x - y \end{cases}$$

per  $k \in \mathbb{R}$ , evidenziandone fuochi, nodi, selle, centri.

Nel caso  $k = 0$  se ne trovi la soluzione esplicita al variare delle condizioni iniziali  $(x_0, y_0)$ .

3. Si studino i punti di equilibrio e la loro stabilità al variare di  $k \in \mathbb{R}$  del sistema dinamico discreto dato da

$$x_{h+1} = x_h + \frac{kx_h}{1 + x_h^2}$$

discutendo anche il caso  $k = 0$ .

Si verifichi che nel caso  $k = -4$  esiste il 2-ciclo dato da  $\{-1; 1\}$ .

4. Discutere la stabilità delle posizioni di equilibrio del sistema differenziale

$$\begin{cases} \dot{x} = ky \\ \dot{y} = -y + y^3 - x^5 \end{cases}$$

al variare del parametro  $k \neq 0$ .