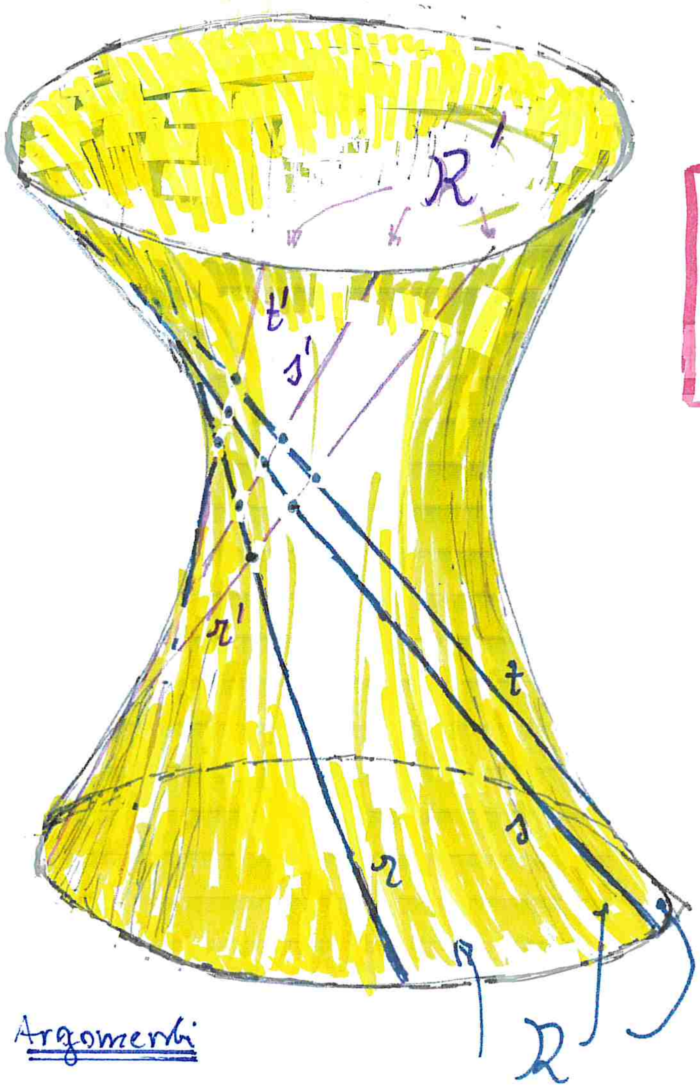


APPROFONDIMENTI DI GEOMETRIA

Mauro Spera
UCSC - Brescia
Elena Zizioli
UNIBS - Brescia

V2

Argomenti

- Parte prima

Richiami e complementi di algebra lineare. Teorema di Sylvester. Teorema spettrale. Richiami sulle coniche

- Parte seconda

Geometria dello spazio proiettivo. Superficie algebriche reali. Quadriche: classificazione proiettiva, affine e metrica. Generazione proiettiva. Sfere e circonferenze. Superficie di rotazione. Quadriche confocali

Bibliografia essenziale

1. M. Beltrametti & al: *Lezioni di geometria analitica e proiettiva*. Bollati - Boringhieri, Torino, 2002

2. G. Castelnuovo: *Lezioni di geometria analitica* 16ª ed Soc. Ed. Dante Alighieri, Milano, 1969

3. F. Enriques: *Lezioni di geometria proiettiva* 2ª ed Zanichelli, Bologna, 1904 (ristampa anastatica)

4. E. Martinelli: *Il metodo delle coordinate* Libreria Eredi V. Veschi, Roma, 1974

5. W.H. McCrea: *Analytical geometry of three dimensions*, Dover, New York, 2006

6. E. Sernesi: *Geometria I*, Bollati Boringhieri, Torino, 1989

7. M. Spera: Note dei corsi di
   Approfondimenti di geometria (VC) (UCSC)
   Elementi di geometria (Verona)
   Algebra lineare e geometria (Vicenza)

8. E. Rizzoli, S. Pianta *Approfondimenti di geometria* (UCSC)

Lezione I

APPROFONDIMENTI DI GEOMETRIA V2

Mauro Spera, Elena Zizioli

✱ Spazi hermitiani
(detti anche unitari)

Esaminiamo la versione complessa di spazio euclideo.

Sia $K = \mathbb{C}$ e $(V, \mathbb{C})$ spazio vettoriale, $\dim_{\mathbb{C}} V = n$ $(n \geq 1)$. Un prodotto scalare hermitiano su V è un'applicazione $\langle , \rangle : V \times V \to \mathbb{C}$ che gode delle proprietà seguenti $(\forall \alpha_i, \beta_i, v_i, w_i \dots)$

(i) $\langle , \rangle$ è sesquilineare: (sesqui.. $= \frac{3}{2}$ in latino)

$$\langle \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2, w \rangle = \bar{\alpha}_1 \langle v_1, w \rangle + \bar{\alpha}_2 \langle v_2, w \rangle$$

notare

$$\langle v, \beta_1 w_1 + \beta_2 w_2 \rangle = \beta_1 \langle v, w_1 \rangle + \beta_2 \langle v, w_2 \rangle$$

ovvero: $\langle , \rangle$ è antilineare nella prima variabile e lineare nella seconda (è anche possibile usare la convenzione opposta)

(ii) Vale la simmetria hermitiana

$$\langle w, v \rangle = \overline{\langle v, w \rangle}$$

(iii) $\langle , \rangle$ è definita positiva

$\langle v, v \rangle \geq 0$ e l'uguaglianza sussiste $\iff v = \underline{0}$

Si noti che (iii) ha senso; infatti, da (ii) segue $\langle v, v \rangle = \overline{\langle v, v \rangle}$ $\forall v \in \bar{V}$ ossia $\langle v, v \rangle$ è reale, sicché si può richiedere la sua non-negatività.

★ La coppia $(\underbrace{\bar{V}}_{\text{spazio vettoriale complesso}}, \underbrace{\langle , \rangle}_{\text{prodotto scalare hermitiano}})$ è detta spazio hermitiano

o anche spazio unitario

o prehilbertiano

Nel caso finito-dimensionale ciò equivale a dire hilbertiano poiché $\bar{V}$, come spazio metrico con la distanza indotta da $\langle , \rangle$ (v. anche oltre) è completo.

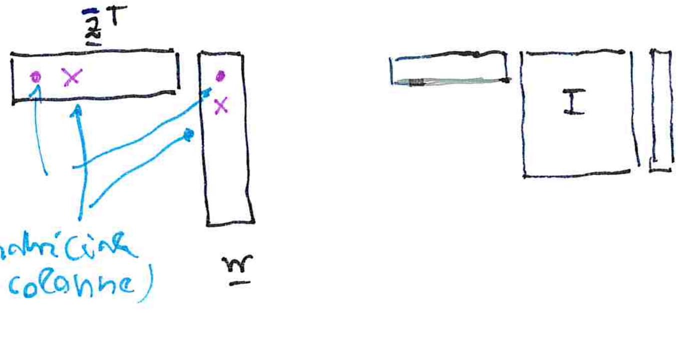
Esempio: $(\mathbb{C}^n, \langle , \rangle_{\text{standard}})$

con $\langle , \rangle_{\text{standard}}$ così definito:

$$\left\langle \underset{\underline{z}}{\begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}}, \underset{\underline{w}}{\begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}} \right\rangle =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \overline{z}_i w_i \equiv \overline{\underline{z}}^T \underline{w} = \overline{\underline{z}}^T \cdot I \cdot \underline{w} \qquad I_n : \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

notare



Su uno spazio hermitiano possono introdursi, con lievi varianti (imposte dalla sesquilinearità), le stesse nozioni del caso euclideo.

★ Sia V, spazio hermitiano, $\dim_{\mathbb{C}} V = n$

Sia $(e_1, \dots, e_n)$ una sua base ortonormale:
[basi siffatte esistono in virtù del procedimento di Gram-Schmidt, v. anche oltre per ulteriori approfondimenti]

$$\boxed{\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}}$$

(delta di Kronecker $\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$)

$I = (\delta_{ij})$ "δ_{ji}"
identità

Dato $\boxed{v = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i} \in V$,

le sue componenti x_i sono date da

$$x_i = \langle e_i, v \rangle$$

↖ in quest'ordine

Infatti

$$\langle e_i, v \rangle = \langle e_i, \sum_{k=1}^{n} x_k e_k \rangle =$$

linearità nel secondo argomento di $\langle \, , \rangle$

k indice "muto"

$$= \sum_{k=1}^{n} x_k \underbrace{\langle e_i, e_k \rangle}_{\delta_{ik}} = \sum_{k=1}^{n} x_k \delta_{ik} = x_i$$

Inoltre

$$\boxed{\|v\|^2} = \sum_{k=1}^{n} |\langle e_k, v \rangle|^2$$

← attenzione al modulo

ossia vale il

★ "Teorema di Pitagora"

Ciò è immediato da

$$\boxed{\|v\|^2 = \langle v, v\rangle = \Big\langle \underline{\sum_{k=1}^{n} \langle e_k, v\rangle e_k}, \sum_{i=1}^{n} \langle e_i, v\rangle e_i \Big\rangle = \sum_{k,i=1}^{n} \langle e_k, v\rangle \langle e_i, v\rangle \underbrace{\langle e_k, e_i\rangle}_{\delta_{ki}} = \sum_{k=1}^{n} |\langle e_k, v\rangle|^2}$$

Δ

$(z\bar{z} = |z|^2)$

Più in generale, osservato che un insieme ortogonale $\{v_1 .. v_k\}$ di vettori non nulli (i.e. $\langle v_i, v_j\rangle = 0$ per $i \neq j$) è costituito da vettori linearmente indipendenti (+)

si trova facilmente la disuguaglianza di Bessel:

siano $e_1, e_2 .. e_k$ $\quad k \leq n$ $\quad \langle e_i, e_j\rangle = \delta_{ij}$, allora

(insieme ortonormale)

$$\boxed{\sum_{i=1}^{k} |\langle e_i, v\rangle|^2 \leq \|v\|^2}$$

(+) Sia $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i = \underline{0}$. Si trova, successivamente,

$$0 = \langle v_h, \sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i\rangle = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \underbrace{\langle v_h, v_i\rangle}_{\|v_h\|^2 \delta_{ij}} = \lambda_h \underbrace{\|v_h\|^2}_{\neq 0}$$

h fissato

$$\Rightarrow \lambda_h = 0 \quad \forall h$$

★ **Operatori hermitiani**

Sia $(V, \langle , \rangle)$ uno spazio hermitiano $(\dim V = n)$

e sia dato $T \in End(V)$

T: operatore lineare, omomorfismo
endomorfismo (se $V = W$)
trasformazione lineare ...
$T \in Hom(V, W)$

Definiamo T^* : coniugato hermitiano
o aggiunto di T

fornendone gli "elementi di matrice" rispetto al prodotto scalare hermitiano, ovvero, chiediamo che

$$(*) \qquad \boxed{\langle v, T^* w \rangle = \langle Tv, w \rangle} \quad \left(= \overline{\langle w, Tv \rangle} \right)$$

$\forall\, v, w \in V$

Rendiamo il tutto più esplicito.

Si scelga una base ortonormale $e = (e_1, e_2, \dots, e_n)$

e poniamo $\boxed{a_{ij} := \langle e_i, Te_j \rangle}$

$A = (a_{ij})$ è allora la matrice di T rispetto alla base e (sia nel dominio sia nel codominio)

$$A = m_{ee}(T)$$

Infatti, dalla teoria generale (v. inserto accanto)

$a_{ij} = \langle e_i, Te_j \rangle$ è proprio la componente i-esima di Te_j rispetto alla base $e = (e_1 \dots e_n)$
ovvero $m_{ee}(T)_{ij}$

$T \in Hom(V, W)$ $\quad T : V \to W$
$(e_1 \dots e_n)$ base di V
$(f_1 \dots f_m)$ base di W
$m_{fe}(T)$: matrice di T rispetto alle basi date
finale iniziale

$$\begin{array}{cc} i \to & \left(\begin{array}{ccccc} \vdots & \vdots & \boxed{\bullet}\; t_{ij} & \vdots & \vdots \end{array}\right) \\ & Te_j \end{array}$$

$$Te_j = \sum_{i=1}^{m} t_{ij} f_i$$

t_{ij}: i-esima componente di Te_j rispetto a $f = (f_1 \dots f_m)$

Si trova, di conseguenza

$$\langle e_i, T^* e_j \rangle := \langle Te_i, e_j \rangle = \overline{\langle e_j, Te_i \rangle} = \bar{a}_{ji}$$

ovvero $\longrightarrow$

$$m_{ee}(T^*) = \overline{m_{ee}(T)^t} = \overline{m_{ee}(T)}^{\,t} = \bar{A}^t = \overline{A^t}$$

posto

$$\boxed{A^* := \overline{A^t} = \bar{A}^t}$$

matrice aggiunta di A

"A coniugato, A "star" "

Si vede che, concretamente, la matrice di T^* rispetto ad $e = (e_1, \dots e_n)$ è uguale ad A^*

Definizione. Dato uno spazio hermitiano $(V, \langle , \rangle)$, $T \in End(V)$ è detto <u>hermitiano</u> (o <u>autoaggiunto</u>) se $\boxed{T = T^*}$

ovvero, T coincide con il proprio aggiunto

Ciò è equivalente ad affermare che, rispetto ad <u>una base ortonormale</u> (e quindi in tutte, v. anche oltre) risulta $A^* = A$

Una tale matrice si dice <u>hermitiana</u> (o <u>autoaggiunta</u>)

In modo "intrinseco", $T = T^*$ significa

$$\boxed{\langle v, Tw \rangle = \langle Tv, w \rangle} \quad \forall\, v, w \in V$$

★ Operatori simmetrici in spazi euclidei

La discussione precedente ha senso, mutatis mutandis, in uno spazio euclideo $(V, \langle , \rangle)$

V: spazio vettoriale reale $(K = \mathbb{R})$

$\langle , \rangle$ prodotto scalare (o interno) $\langle , \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ applicazione

$\langle , \rangle$ bilineare, simmetrica, definita positiva

T^* diviene T^t ("T trasposto")

$$\boxed{\langle v, T^t w \rangle = \langle Tv, w \rangle = \langle w, Tv \rangle}.$$

A livello matriciale, se $A = m_{ee}(T) = (a_{ij})$ ← base ortonormale

$m_{ee}(T^t) = A^t = (a_{ji})$ (trasposta di A)

$T \in \mathrm{End}(V)$ è detto simmetrico se $T^t = T$

ovvero se in una base ortonormale (e quindi in tutte), risulta $A = A^t$, ovvero A è simmetrica

⟶ È importante notare che un operatore in uno spazio euclideo, (o hermitiano), può avere una matrice simmetrica (hermitiana) rispetto ad una certa base senza che per questo risulti simmetrico (hermitiano) come operatore. È quello che accade se la base data non è ortonormale

- Esempio

Sia dato $(\mathbb{R}^2, \langle , \rangle)$ con $\langle , \rangle$ il prodotto scalare standard $\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

Si consideri $e' = (e_1', e_2')$ $\quad e_1' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; e_2' = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$T: \begin{array}{l} e_1' \longmapsto e_1' - e_2' = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ (ed esteso per linearità)} \\ e_2' \longmapsto -e_1' + e_2' = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Si ha allora $\quad m_{e'e'}(T) = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ Te_1' \quad Te_2' \end{array}$ (simmetrica)

troviamo $m_{ee}(T)$ $\quad e = (e_1, e_2)$ base canonica (ortonormale)

Un modo rapido per farlo è il seguente (algoritmo di Gauss)

$$\begin{array}{c} (-1)\cdot \\ \end{array} \left(\begin{array}{cc|cc} \multicolumn{2}{c|}{e_1'} & \multicolumn{2}{c}{Te_1'} \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ \multicolumn{2}{c|}{e_2'} & \multicolumn{2}{c}{Te_2'} \end{array} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|cc} \multicolumn{2}{c|}{e_1} & & \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ \multicolumn{2}{c|}{e_2} & & \end{array} \right)$$

$$\Rightarrow \quad m_{ee}(T) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{non simmetrica}$$

Pertanto T non è simmetrico come operatore.

- Osservazione banale ma importante: ogni matrice simmetrica (hermitiana) può essere interpretata come operatore simmetrico (hermitiano) su $\mathbb{R}^n$ ($\mathbb{C}^n$) dotato del prodotto scalare standard (su $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{C}^n$, rispettivamente)