Lezione II

APPROFONDIMENTI DI GEOMETRIA V2

Mauro Spera, Elena Pizzoli

* Il gruppo unitario

Sia $(V, \langle , \rangle)$ uno spazio hermitiano. Il gruppo unitario associato a $(V, \langle , \rangle)$, denotato con $U(V)$ è, per definizione

$$\boxed{U(V) := \{ U \in \mathrm{End}(V) \mid \langle Uv, Uw \rangle = \langle v, w \rangle \ \forall v, w \in V \}}$$

ovvero, è costituito dagli endomorfismi di V che conservano i prodotti scalari.

Si noti, in particolare che $U \in U(V)$ è isometrico ovvero conserva le lunghezze $\left(\|w\| = \langle w, w \rangle^{\frac{1}{2}} \right)$

$$\boxed{\|Uv\| = \sqrt{\langle Uv, Uv \rangle} = \sqrt{\langle v, v \rangle} = \|v\|}$$

Pertanto $U \in Gl(V)$ gruppo lineare generale associato a V

$\qquad\qquad\ \ \ \mathrm{Aut}(V)$ automorfismi di V

Da $\langle Uv, Uw \rangle = \langle v, w \rangle \quad \forall v, w \in V$

ricaviamo successivamente

$$\langle Uv, Uw \rangle = \langle v, U^*Uw \rangle = \langle v, I \cdot w \rangle$$

da cui segue facilmente

$$\boxed{U^*U = UU^* = I_n}$$

ossia $\boxed{U^{-1} = U^*}$

Verifichiamo esplicitamente che $U(V)$ è un gruppo (sottogruppo di $Gl(V)$) $U_i \in U(V)$ $i=1,2$

$$\langle (U_1 U_2) v, (U_1 U_2) w \rangle = \langle U_1 (U_2 v), U_1 (U_2 w) \rangle =$$

U_1 è unitario

$$= \langle U_2 v, U_2 w \rangle \overset{U_2 \text{ è unitario}}{=} \langle v, w \rangle$$

Parimenti, se U è unitario lo è pure U^{-1}.

Nel caso euclideo si ritrova il gruppo ortogonale $O(V)$
$(V, \langle\ \rangle)$ spazio euclideo

$$O(V) = \{ O \in End(V) \mid \langle Ov, Ow \rangle = \langle v, w \rangle \ \forall v, w \in V \}$$

$\boxed{O^{-1} = O^t}$ ↖ endomorfismo trasposto

L'analogo matriciale di $U(V)$ è

$$\boxed{U(n) := \{ U \in M_n(\mathbb{C}) \mid U^* U = U U^* = I \}}$$

ovvero $U(n) = U(V)$ con $(V, \langle , \rangle) = (\mathbb{C}^n, \langle\ \rangle_{standard})$

$$U^* = \overline{U}^t = \overline{U^t}$$

★ Osserviamo che $U \in U(V) \iff$ invia basi ortonormali in basi ortonormali

[Si confronti con l'affermazione $M \in Gl(V) \iff M$ invia basi in basi]

A livello matriciale (operando su $\mathbb{C}^n, \langle\ \rangle_{st}$) si ha allora che

$$U = (u_{ij}) \in U(n)$$

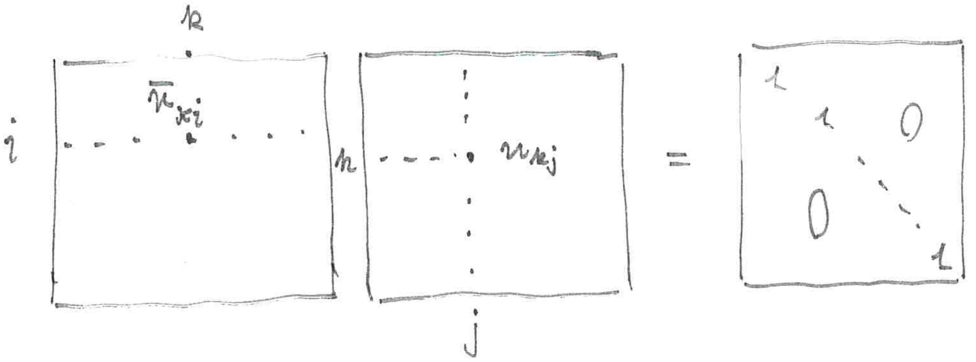
$\iff$ le colonne (o righe) di U costituiscono una base ortonormale

Lo stesso vale per $m_{ee}(U)$, matrice rappresentativa di $U \in U(V)$ rispetto ad una base ortonormale $e = (e_1, \ldots e_n)$

A titolo di esercizio, verifichiamolo esplicitamente

$$U = (u_{ij})$$
$$U^* = (u^*_{ij} = \bar{u}_{ji})$$

$U^*U = I$ diventa



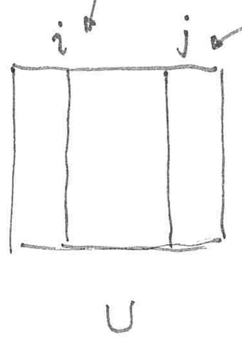
$$\delta_{ij} = \sum_{k=1}^{n} u^*_{ik}\, u_{kj} = \sum_{k=1}^{n} \bar{u}_{ki}\, u_{kj}$$

Ma $\begin{pmatrix} u_{1i} \\ u_{2i} \\ \vdots \\ u_{ni} \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} u_{1j} \\ u_{2j} \\ \vdots \\ u_{nj} \end{pmatrix}$ rappresentano rispettivamente

i-esima e la

j-esima colonna

di U



Esempio: in $\mathbb{C}^2$, la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ non è unitaria, la matrice $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{-i}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ sì

$\|\cdot\| = 1$ $\quad$ $\|\cdot\| = 1$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}} \cdot \left(-\frac{i}{\sqrt{2}}\right) =$$

$$\frac{1}{2} + \frac{i^2}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$$