APPROFONDIMENTI DI GEOMETRIA V2

Mauro Spera, Elena Zizioli

* Digressione: Operatori di proiezione

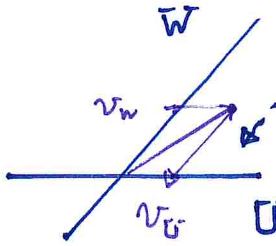
Sia V uno spazio vettoriale (reale o complesso, per fissare le idee), di dimensione finita, e sia

$$\boxed{V = \underbrace{U \oplus W}_{\text{somma diretta}}}$$

. L'operatore "proiezione su U lungo W", denotato con p_U^W, è definito come segue:

dato $v = v_U + v_W$ (*) (componenti di v rispetto a U e W, rispettivamente)

$$v_U \in U, \quad v_W \in W$$



p_U^W si pone:

$$\boxed{p_U^W v := v_U}$$

(essendo la decomposizione (*) unica, p_U^W è ben definito)

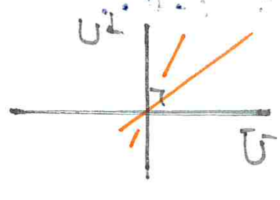
Si osservi che $(p_U^W)^2 = p_U^W \cdot p_U^W = p_U^W$

(p_U^W è idempotente) e che

$$\mathrm{Ker}\, p_U^W = W, \quad \mathrm{Im}\, p_U^W = U$$

In particolare, se V è uno spazio hermitiano o euclideo e $U \leq V$, è $V = U \oplus U^\perp$ ← complemento ortogonale "ortogonale di U"

risulta definito l'operatore di proiezione ortogonale su U, $P_U := p_U^{U^\perp}$



<u>Esercizio</u> Dato $p \in End(\bar{V})$, $p^2 = p$ (p idempotente), dimostrare che esso è un <u>operatore</u> di <u>proiezione</u>: $p = p_U^W$ per opportuni sottospazi $\bar{V} = U \oplus \bar{W}$, univocamente determinati

<u>Sugg</u> $U := Im\, p$ $\quad \bar{W} := \ker p$

✱ Operatori di proiezione ortogonale

Determiniamo un'espressione esplicita per

$P_U^{U^\perp} \equiv P_U$, operatore di proiezione ortogonale su $U \leq V$ (V spazio euclideo o hermitiano)

Siano $(u_1, \dots u_k)$ una base ortonormale di

$U \leq V$ $(\dim U = k)$ e

$(u_1^\perp, u_2^\perp \dots u_{n-k}^\perp)$ una base ortonormale

di $U^\perp = \{ w \in V \mid \langle w, u \rangle = 0 \ \forall u \in U \}$

complemento ortogonale di U rispetto a $\langle , \rangle$

Tali basi si possono costruire tramite Gram-Schmidt

La base $b := (u_1 \dots u_k, u_1^\perp, u_2^\perp \dots u_{n-k}^\perp)$ è una base ortonormale di V

Si ha, di conseguenza, $\forall v \in V$

$$v = \underbrace{\sum_{i=1}^{k} \langle u_i, v \rangle u_i}_{\in U} + \underbrace{\sum_{j=1}^{n-k} \langle u_j^\perp, v \rangle u_j^\perp}_{\in U^\perp}$$

da cui

$$v_U = \sum_{i=1}^{k} \langle u_i, v \rangle u_i \quad \text{e} \quad \boxed{P_U v = \sum_{i=1}^{k} \langle u_i, v \rangle u_i}$$

Si noti che P_U è un operatore simmetrico (o hermitiano), poiché è subito visto, ad esempio, che

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{ortonormale}}}{m_{bb}}(P_U) = \left(\begin{array}{c|c} I_k & 0 \\ \hline 0 & 0_{n-k} \end{array}\right)$$

(che è simmetrica (hermitiana)

ovviamente $m_{bb}(P_U)^2 = m_{bb}(P_U)$.

Questa osservazione è importante per il seguito.

* Richiamo: il metodo di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt

Questo metodo consente, dato $U \leq \bar{V}$ ($\bar{V}$ euclideo o hermitiano) di determinarne una base ortonormale (ciò varrà in particolare per $\bar{V}$)

Sia $U = \langle u_1, u_2 .. u_k \rangle$. Supponiamo che

$(u_1 \dots u_k)$ sia una base di $\bar{U}$ (sicché $\dim \bar{U} = k$).

Non si perde in generalità. La procedura che diamo per introdurre produrrà il vettore nullo se applicata a generatori in eccesso

Partiamo da u_1 ($\neq \underline{0}$); poniamo $e_1 = \dfrac{u_1}{\|u_1\|}$

(sicché $\|e_1\| = 1$). Consideriamo u_2 ($\notin \langle u_1 \rangle$)

Poniamo

$$e_2 := \frac{u_2 - \langle e_1, u_2 \rangle e_1}{\underbrace{\| u_2 - \langle e_1, u_2 \rangle e_1 \|}_{\neq 0}} \qquad \|e_2\| = 1$$

Si ha subito $\langle e_1, e_2 \rangle = 0$.

Induttivamente, costruito e_j, definiamo

$$\boxed{e_{j+1} := \frac{u_{j+1} - \sum_{h=1}^{j} \langle e_h, u_{j+1} \rangle e_h}{\| u_{j+1} - \sum_{h=1}^{j} \langle e_h, u_{j+1} \rangle e_h \|}} \qquad \|e_{j+1}\| = 1$$

$\langle e_{j+1}, e_h \rangle = 0 \quad , \quad h = 1, 2, \dots j$

In definitiva, si ottiene una base ortonormale

$(e_1, \dots e_n)$ e $\langle e_1 \dots e_j \rangle = \langle x_1 \dots x_j \rangle \quad \forall j = 1, 2 \dots n$

In sintesi, osservato che $\boxed{\sum_{h=1}^{j} \langle e_h, x_{j+1} \rangle e_h = P_{\langle e_1 \dots e_j \rangle} x_{j+1}}$

si trova che

e_{j+1} si costruisce rimuovendo da x_{j+1} la proiezione ortogonale sul sottospazio generato dai vettori precedenti e normalizzando.

★ **Complemento**

Definizione (i) La distanza tra due vettori u, v di uno spazio euclideo o hermitiano è data da

$$d(u,v) := \|u - v\|$$

(ii) La distanza di $v \in V$ da $U \le V$ (sottospazio di V) è

$$d(v, U) := \inf_{u \in U} \|v - u\|$$

Si ha l'importantissimo

★ **Teorema della proiezione ortogonale**

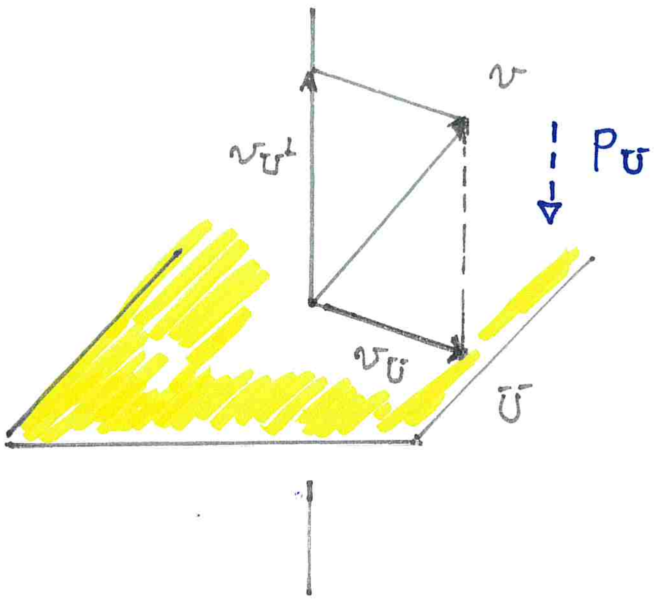
Sia $(V, \langle , \rangle)$ uno spazio euclideo o hermitiano. Dati $v \in V$, $U \le V$, si ha

$$d(v, U) = \underbrace{\| v - v_U \|}_{\|v_{U^\perp}\|} \quad (= \|v_{U^\perp}\|)$$

ovvero: esiste, ed è univocamente determinato, il vettore di U a distanza minima da v ed è fornito da v_U, proiezione ortogonale di v su U. In altre parole, la funzione

$$d : U \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$u \longmapsto \|v - u\|$$

ha esattamente un minimo in v_U.



<u>Dimostrazione</u> Sia dato $u \in \bar U$. Si trova, successivamente

$$\|v-u\|^2 = \|v_U + v_{\bar U^\perp} - u\|^2 = \|\underbrace{v_{\bar U} - u}_{= (v-u)_{\bar U}} + v_{\bar U^\perp}\|^2$$

"Pitagora"

$$= \|(v-u)_{\bar U}\|^2 + \|v_{\bar U^\perp}\|^2$$

poichè $u_{\bar U} = u$, $u_{U^\perp} = 0$

e tale espressione è minima, al variare di $u \in \bar U$, precisamente quando $u = v_{\bar U}$, da cui la conclusione.