Lezione IV

APPROFONDIMENTI DI GEOMETRIA V2

Mauro Spera, Elena Zizioli

✱ Richiami: polinomio caratteristico, spettro, autospazi

Sia V uno spazio vettoriale su un campo K (per noi $K = \mathbb{C}$ o $\mathbb{R}$), di dimensione finita $n \geq 1$

Sia $T \in End(V)$ un operatore lineare su V.

Si definisce lo spettro di T, $\sigma(T)$ come segue:

$$\boxed{\sigma(T) = \{ \lambda \in K \mid \overbrace{T - \lambda I \text{ non è invertibile}}^{(\bullet)} \}}$$

[Questa è la definizione più generale, necessaria per le estensioni del teorema spettrale (v. oltre) in dimensione infinita, nel contesto dell'analisi funzionale]

Nel nostro caso $(\bullet)$ equivale a

$$(+) \quad \underbrace{\det(T - \lambda I)}_{\substack{\parallel \\ p_C^T(\lambda)}} = 0$$

ovvero, $\lambda \in \sigma(T)$ se

$$p_C^T(\lambda) = 0$$

✱✱ equazione caratteristica, o secolare

ovvero, λ è un autovalore di T

p_C^T: polinomio caratteristico di T

In dimensione finita:

$\sigma(T) = \{\text{autovalori di } T\}$ IV – 1

(†) Si osservi che $\det T$, $T \in \mathrm{End}(V)$ è definito come $\det m_{ee}(T)$,

$m_{ee}(T)$ matrice rappresentativa di T rispetto ad una base qualsiasi $e = (e_1, \dots, e_n)$ di V.

La definizione è ben posta poiché, da

$$\boxed{m_{e'e'}(T) = \underbrace{m_{e'e}(I)}_{S}\, m_{ee}(T)\, \underbrace{m_{ee'}(I)}_{S^{-1}}}$$

cambiamento di base

[i.e. $m_{e'e'}(T)$ e $m_{ee}(T)$ sono simili]

si ha (Binet) $\det m_{e'e'}(T) = \det m_{ee}(T)$

Si ha poi $\det(T - \lambda I) = 0 \iff \mathrm{Ker}(T - \lambda I)$

$\equiv V_\lambda^T \leq V$ è non banale, ossia

sottospazio vettoriale di V

$$\boxed{m_g(\lambda) := \dim V_\lambda^T \geq 1}$$

Se $\lambda \notin \sigma(T)$ ("λ è nel risolvente di T") $V_\lambda^T = \{0\}$

molteplicità geometrica di $\lambda \in \sigma(T)$

$\|$

$\dim V_\lambda^T$

vale a dire, $\exists\, \underline{v} \neq \underline{0}$ tale che $\boxed{T\underline{v} = \lambda \underline{v}}$ un tale $\underline{v} \neq 0$ è detto autovettore di T relativo all'autovalore λ

V_λ^T: autospazio relativo a λ

⚠ V_λ^T contiene, in aggiunta agli autovettori, il vettore nullo $\underline{0}$

$V_\lambda^T \leq V$

*** Teorema spettrale (I)

Sia $(V, \langle\,\rangle)$ uno spazio hermitiano

Sia $T = T^* \in \mathrm{End}(V)$ un operatore hermitiano.

Valgono allora i seguenti fatti:

(i) $\phi \neq \sigma(T) \subset \mathbb{R}$

(ii) Siano $\lambda, \mu \in \sigma(T)$, $\lambda \neq \mu$

Allora $V^T_\lambda \perp V^T_\mu$

ortogonale, perpendicolare

(iii) T è unitariamente diagonalizzabile, vale a dire: esiste una base ortonormale $e = (e_1 \dots e_n)$ di V costituita da autovettori di T:

$$T e_i = \lambda_i e_i \qquad i = 1..n$$

$$\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$$

(i λ_i sono eventualmente ripetuti)

Equivalentemente

$$V = \bigoplus_{\lambda_k \text{ distinti}} V^T_{\lambda_k}$$

somma diretta ortogonale

dunque

$$m_{ee}(T) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

è diagonale. Ma cosa vuol dire "unitariamente"?

$$m_{ee}(T) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Dunque, data una qualsiasi matrice

$m_{ff}(T)$, con $f = (f_1 \ldots f_n)$ ortonormale

(sicché $m_{ff}(T)^* = m_{ff}(T)$)

esiste $U \in \underbrace{U(n)}_{\text{gruppo unitario}}$ tale che

$$U^{-1}\, m_{ff}(T)\, U = m_{ee}(T) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Come U può prendersi $m_{fe}(I)$

$$\overbrace{m_{ef}(I)}^{U^{-1}}\, m_{ff}(T)\, \overbrace{m_{fe}(I)}^{U} = m_{ee}(T)$$

Ciò spiega la locuzione "unitariamente diagonalizzabile"

* Conseguenze del teorema spettrale.

- Per operatori hermitiani, il polinomio caratteristico risulta essere un invariante completo per similitudine ovvero $T_1 \sim T_2 \iff P_C^{T_1} = P_C^{T_2}$.
- Il teorema spettrale si estende agli operatori normali, ossia gli operatori N che commutano col proprio aggiunto: $NN^* = N^*N$; in particolare, vale per gli operatori unitari (il cui spettro cade in $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$)

★ Teorema spettrale (II)

versione matriciale

una matrice hermitiana $A = A^* \in M_n(\mathbb{C})$ ha tutti gli autovalori reali e risulta unitariamente diagonalizzabile, ovvero esiste $U \in U(n)$ tale che

$$\underset{\overset{\shortparallel}{U^*}}{U^{-1}} \; A \; U = D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

[Di nuovo, autospazi corrispondenti ad autovalori distinti sono ortogonali]

Questa versione del teorema segue subito dall'altra interpretando $A = A^*$ come endomorfismo hermitiano in $\mathbb{C}^n$, munito del prodotto scalare standard (rispetto al quale la base canonica risulta ortonormale)

In seguito esamineremo anche una terza versione del teorema, in termini di proiettori spettrali (che risulta cruciale per le estensioni del teorema in ambito analitico-funzionale dovute a von Neumann).

11 Teorema spettrale (versione euclidea)

Sia $T = T^t \in End(V)$ $(V, \langle , \rangle)$ spazio euclideo.
T operatore simmetrico
Allora esso ha tutti gli autovalori reali e risulta ortogonalmente diagonalizzabile, ovvero possiede una base ortonormale di autovettori $e = (e_1, \dots e_n)$

$$T e_i = \lambda_i e_i \qquad \langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$$

A livello matriciale, previa interpretazione di $A = A^t \in M_n(\mathbb{R})$ come operatore simmetrico nello spazio euclideo $(\mathbb{R}^n, \langle , \rangle_{st})$ [in cui la base canonica risulta ortonormale], si ha che una matrice simmetrica ha tutti gli autovalori reali e risulta ortogonalmente diagonalizzabile:

$\exists \quad O \in O(n) \quad (O O^T = O^T O = I)$ tale che

$$\underset{\displaystyle \overset{\|}{O^T}}{O^{-1}} A O = D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

A è ortogonalmente simile ad una matrice diagonale.

[simile tramite una matrice ortogonale, equiv. simile e nel contempo congruente]

La dimostrazione si otterrà adattando opportunamente quella del teorema spettrale nel caso hermitiano.