Lezione IX

APPROFONDIMENTI DI GEOMETRIA V2

Marco Spera, Elena Zizioli

* Richiami sulle coniche

$\boxed{\mathcal{C}: \; X^T A X = 0}$ conica nel piano proiettivo reale, ma complessificato alla bisogna.

$A = A^T \in M_3(\mathbb{R})$

$\overset{\shortparallel}{(a_{ij})}$ $\qquad \sum_{i,j=0}^{2} a_{ij} x_i x_j = 0$

$P = [X] \quad (\equiv [P])$

$\cap$

$\mathbb{P}^2$

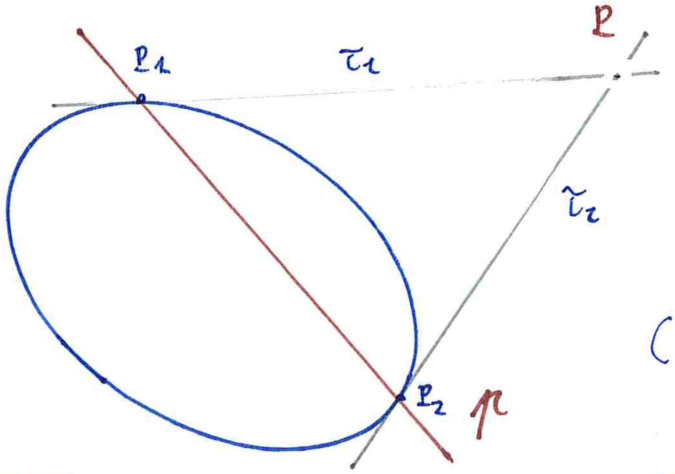
$$X = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Omega = \det A \neq 0$: conica generale
non degenere
irriducibile

• polarità rispetto a $\mathcal{C}$

Dato $P \in \mathbb{P}^2$, la polare p rispetto a $\mathcal{C}$

è la retta $\quad p: \quad X^T A P = 0 \quad (= P^T A X = 0)$



P: polo di p

($P \leftrightarrow p$ è biunivoca)

$\boxed{P \in \mathcal{C} \iff p = \tau_P \text{ (tangente a } \mathcal{C} \text{ in } P)}$

$X^T A P = 0$

** Teorema di reciprocità

$$P \in q \iff Q \in p$$

polare di Q

Segue subito da $\underbrace{0 = P^T A Q}_{P \in q} = (P^T A Q)^T = Q^T A^T P$
$= \underbrace{Q^T A P}_{Q \in p} = 0$

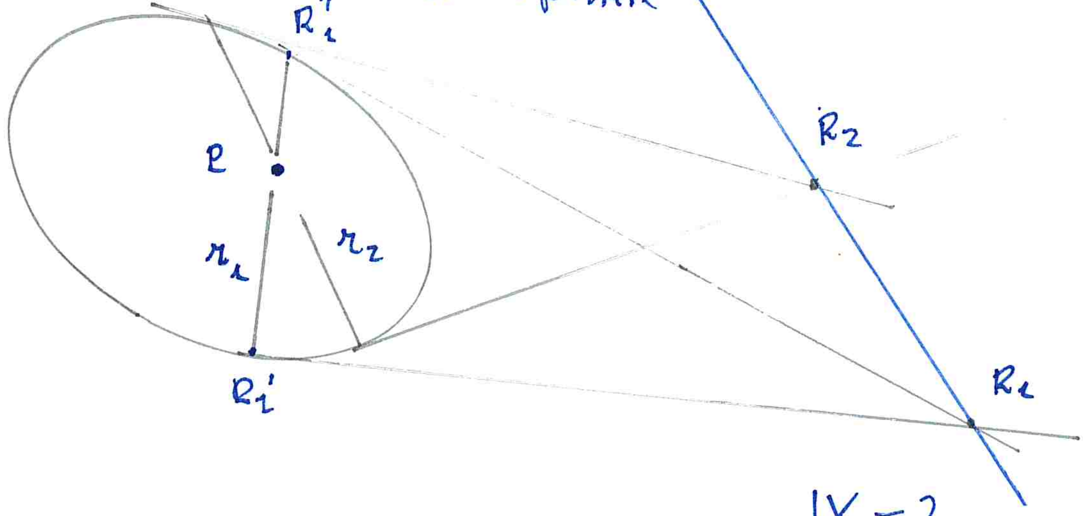
Conseguentemente, p è la retta congiungente P_1 e P_2, punti di contatto delle tangenti a $\mathcal{C}$ uscenti da P [se P è "interno" a $\mathcal{C}$, ovvero le tangenti emananti da esso sono complesse coniugate, la polare si ottiene tramite il teorema di reciprocità.(+)]

Infatti, da $P \in r_i = p_{P_i}$ si ha $P_i \in p$

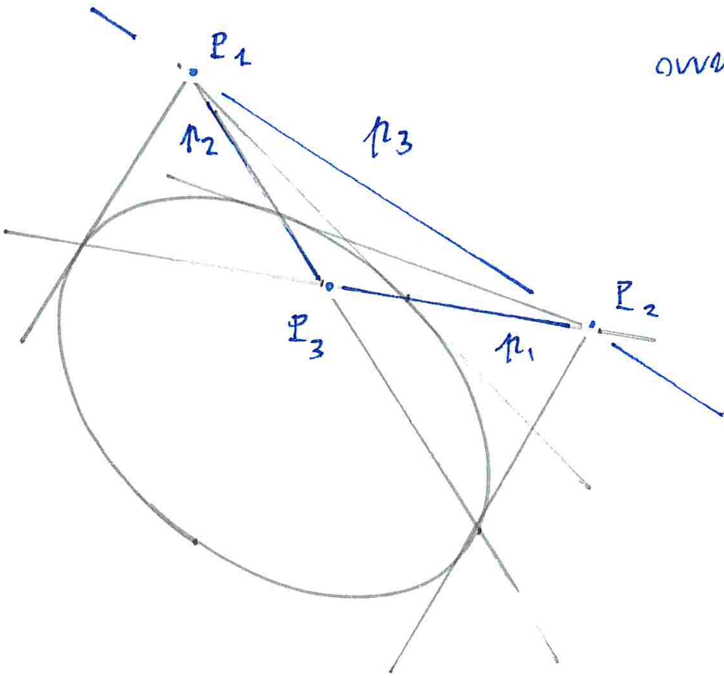
$P_i \in \mathcal{C}$ $\qquad i = 1,2$

sicché $p = P_1 P_2$ $\square$

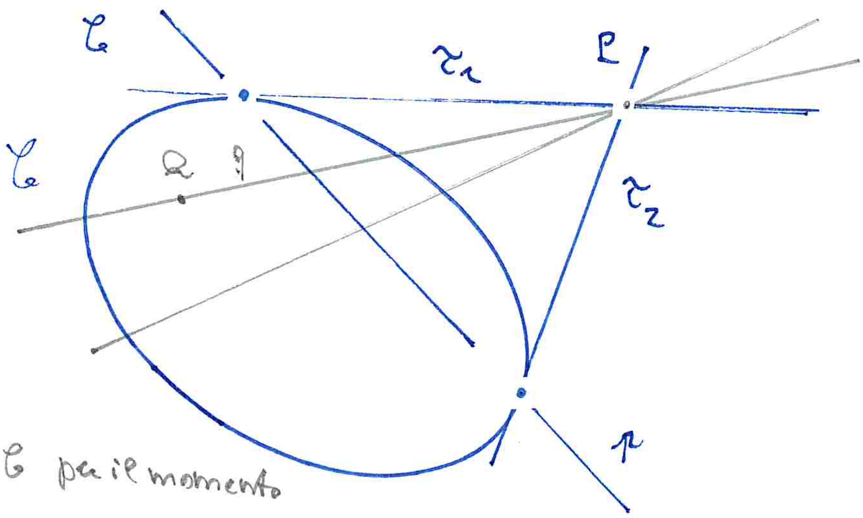
(+) Costruzione di p, polare di P "interno". Tracciata una retta r_1 per P, si determini R_1, intersezione delle tangenti condotte dai punti di intersezione R_1' e R_1'' di r_1 con $\mathcal{C}$. Si faccia lo stesso a partire da una nuova retta r_2. La retta $R_1 R_2$ è la polare p cercata.



* <u>Triangolo autopolare</u> $P_1 P_2 P_3$: ogni vertice è polo del lato opposto ovvero ogni lato è polare del vertice opposto.



* Tangenti condotte da P a $\mathcal{C}$



Sia $P \notin \mathcal{C}$ per il momento

Sia $X = \lambda P + \mu Q$ l'equazione di una retta q generica per P $(Q \neq P)$. Imponiamo un'intersezione doppia con $\mathcal{C}$. Da $X^T A X = 0$ troviamo (da $A^T = A$)

$$\lambda^2 P^T A P + 2\lambda\mu P^T A Q + \mu^2 Q^T A Q = 0 .$$

In $(\lambda, \mu) \neq (0,0)$ poniamo $\lambda = 1$ e cambiamo Q in X

L'equazione in μ

$$P^TAP + 2\mu P^TAX + \mu^2 X^TAX = 0$$

ha una radice doppia precisamente quando

$$\frac{\Delta}{4} = \boxed{(P^TAX)^2 - (X^TAX)(P^TAP) = 0} \quad (\ast)$$

che fornisce l'equazione delle tangenti $\tau_1\tau_2 = 0$

Alla $(\ast)$ si arriva anche osservando che $\mathscr{C}$, $\tau_1\tau_2$ e p^2 (polare contata due volte) appartengono allo stesso fascio di coniche (bitangenti in due punti fissati a due rette date)

$$\tau_1\tau_2 = X^TAX - \lambda(X^TAP)^2 = 0$$

se $X = P$ è (dato che $P^TAP \neq 0$),

$$\lambda = \frac{1}{P^TAP},$$ ovvero, si ha ancora la $(\ast)$.

Se $P \in \mathscr{C}$ si trova $\tau_1\tau_2 = \tau_P^2 = 0$, ovvero la tangente in P a $\mathscr{C}$ contata due volte.

* Geometria affine delle coniche

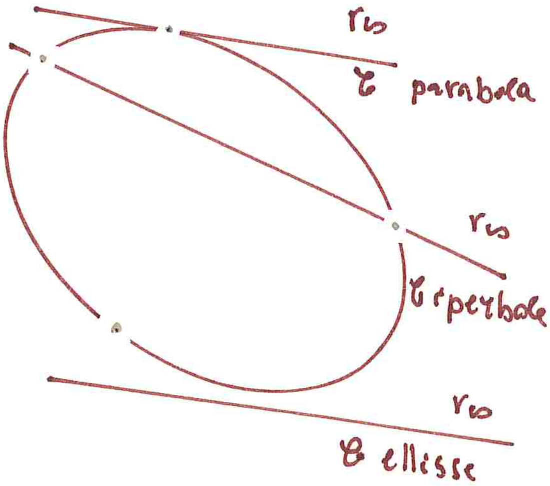
Sia $\mathcal{C}$ una conica generale in $\mathbb{P}^2$.

Selezionata una retta r_∞, dichiarandola impropria e introdotto un opportuno riferimento affine ($x = \frac{x_1}{x_0}$, $y = \frac{x_2}{x_0}$; $r_\infty : x_0 = 0$)

Consideriamo le intersezioni di $\mathcal{C}$ con r_∞

$$(*) \quad \boxed{\begin{array}{ll} \mathcal{C} & \left\{ \begin{array}{l} X^T A X = 0 \qquad (X \neq 0) \\ x_0 = 0 \end{array} \right. \\ r_\infty & \end{array}}$$

$A = A^T$



Si hanno tre possibilità

punti reali e distinti : iperbole

" reali e coincidenti : parabola

complessi coniugati : ellisse

La $(*)$ fornisce (se $x_1 = x$, $x_2 = y$)

$$A = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$(x \quad y) \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}}_{A_{00}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$$

$\Omega = \det A \neq 0$

$A = A^T$

$a_{ij} = a_{ji}$

ossia $\quad a_{11} x^2 + 2 a_{12} xy + a_{22} y^2 = 0$

se poi $\quad y = mx$, $x \neq 0$ si ha pure

$$\boxed{a_{11} m^2 + 2 a_{12} m + a_{22} = 0} \qquad (**)$$

equazione di secondo grado in m.

Da $\quad \dfrac{\Delta}{4} = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = -(a_{11}a_{22} - a_{12}^2)$

$$= -\underset{\substack{\parallel \\ \Omega_{00}}}{\det A_{00}}$$

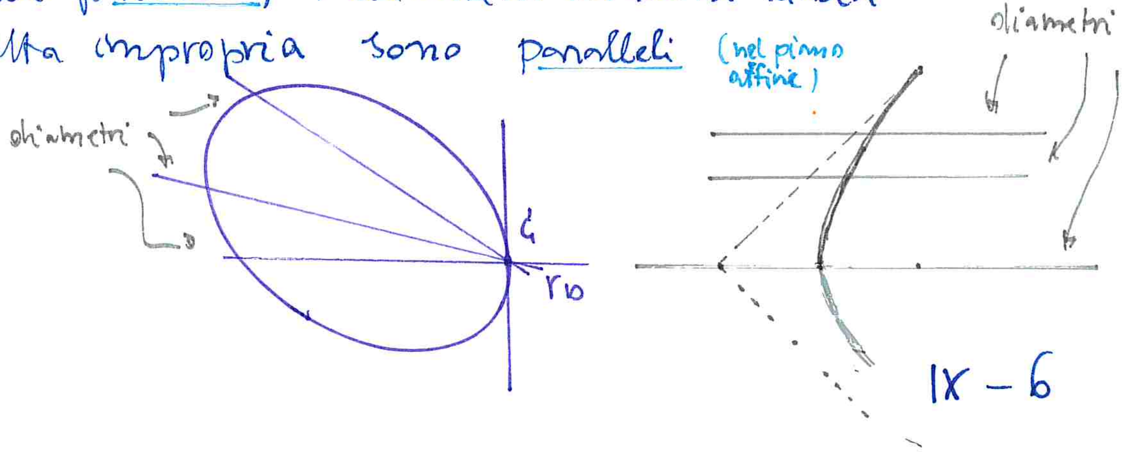
Si trova che

$$\boxed{\Omega_{00} \quad \begin{matrix} > \\ = \\ < \end{matrix} \quad 0 \quad \begin{matrix} \to \text{ellisse} \\ \to \text{parabola} \\ \to \text{iperbole} \end{matrix}}$$

★ Centro di una conica generale $\mathcal{C}$
polo di r_∞

Se il centro è proprio, $\mathcal{C}$ è detta conica a centro: in tal caso si hanno le ellissi e le iperboli. La parabola ha centro improprio (ed è il punto di tangenza con r_∞)

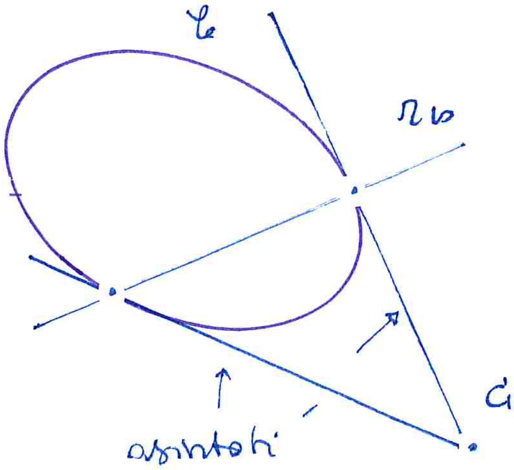
★ diametro: è una retta per il centro.
Per il teorema di reciprocità, i diametri sono le polari dei punti impropri. Nel caso della parabola, i diametri distinti dalla retta impropria sono paralleli (nel piano affine)



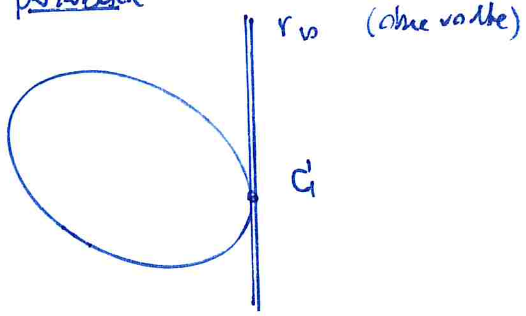
★ **Asintoti**: tangenti a $\mathcal{C}$ condotte dal centro
(i pti di contatto, reali o complessi coniugati, si trovano su r_∞)

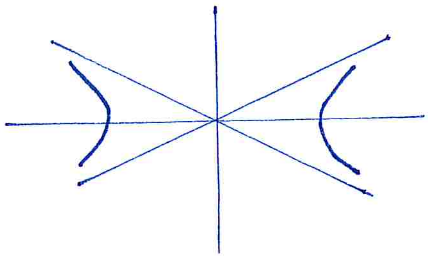
L'ellisse non ha asintoti reali, nella parabola sono dati dalla retta impropria contata due volte.

iperbole



parabola

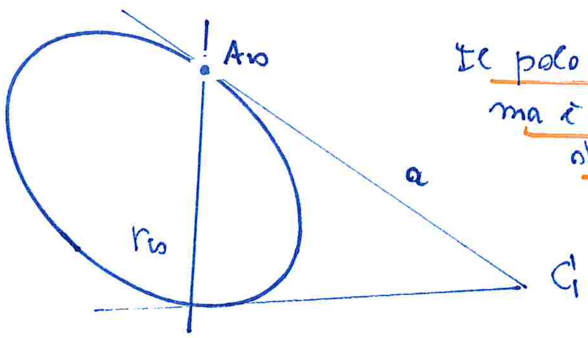




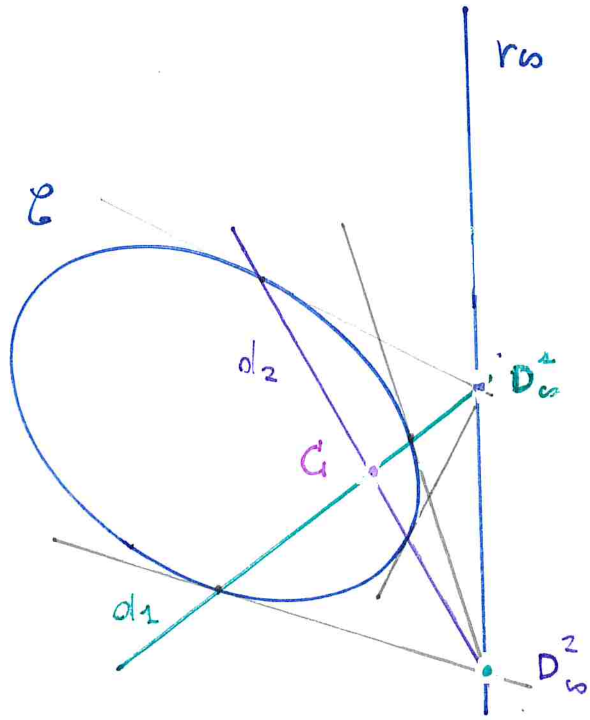
Equivalentemente, gli asintoti sono le tangenti a $\mathcal{C}$ nei suoi punti impropri.

★ Due diametri di una conica a centro $\mathcal{C}$ si dicono coniugati se il polo dell'uno (che si trova necessariamente su r_∞) è la direzione dell'altro

Gli asintoti di una conica a centro costituiscono diametri autoconiugati



Il polo di a è A_∞, ma è anche la sua direzione ellisse



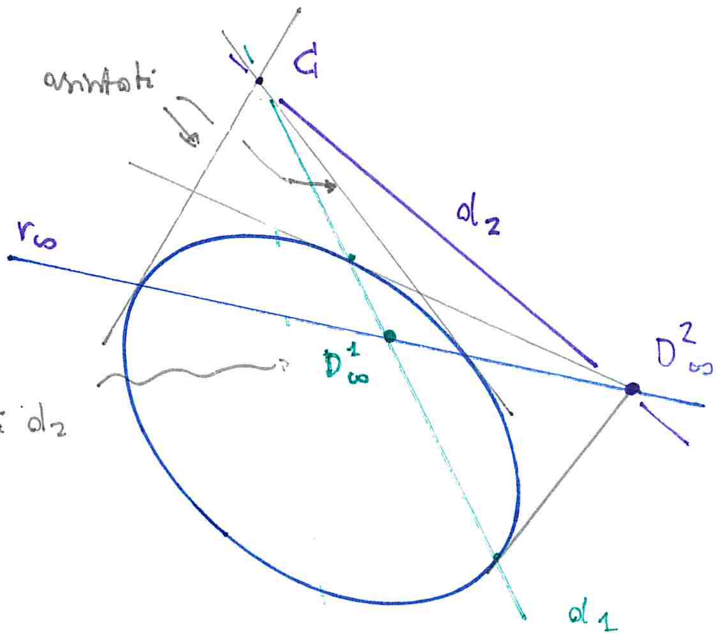
D^1_∞ : la direzione di d_1 è il polo di d_2

C_1: centro

D^2_∞ : la direzione di d_2 è il polo di d_1

d_1 e d_2 sono diametri coniugati

iperbole

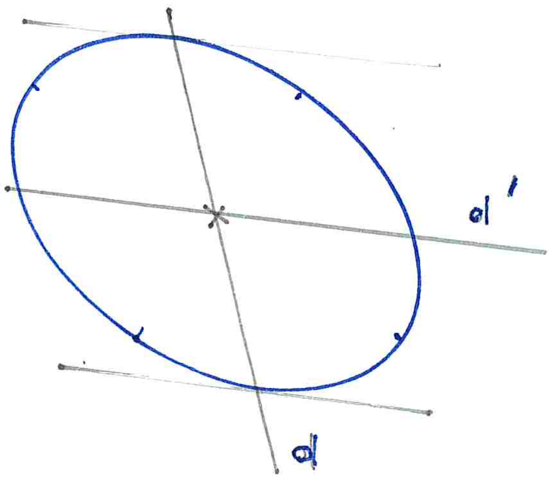


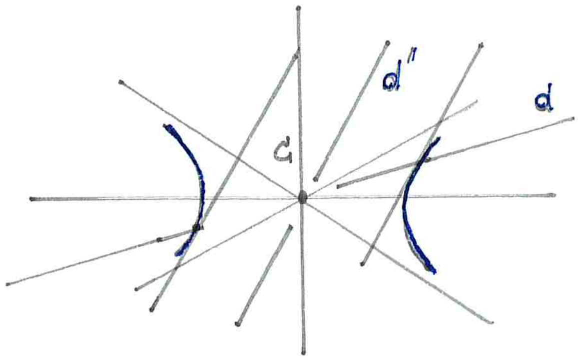
direzione di d_1 = polo di d_2

D^2_∞ : direzione di d_2 = polo di d_1

Interpretazione affine:

data una conica a centro $\mathcal{C}$ e dato un suo diametro d, il diametro d' ad esso coniugato ha la direzione delle tangenti (parallele) nei punti di intersezione di d con $\mathcal{C}$





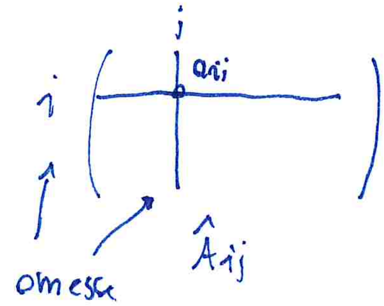
Dettagli analitici

• Il centro di una conica (a centro) viene individuato dall'intersezione di due polari corrispondenti a due punti distinti sulla retta impropria. Se tali punti sono $X_\infty : [0,1,0]$ e $Y_\infty : [0,0,1]$ si trova facilmente (Cramer)

$$\begin{cases} x_C = \dfrac{\alpha_{01}}{\alpha_{00}} \\[2mm] y_C = \dfrac{\alpha_{02}}{\alpha_{00}} \end{cases}$$

α_{ij} : complemento algebrico di a_{ij}

$= (-1)^{i+j} \det \hat{A}_{ij}$



• diametro coniugato d' ad un diametro dato d

$$d \to D_\infty : [0, l, m] \qquad \overbrace{(l,m)}^{\ell} \neq (0,0)$$

$$d' \to D'_\infty : [0, l', m'] \qquad \underbrace{(l',m')}_{\ell'} \neq (0,0)$$

$$D'^{T}_\infty A D_\infty = D_\infty^T A D'_\infty = 0 \qquad \boxed{\ell^T A_{00} \ell' = 0}$$

$$(\diamond) \quad \boxed{a_{11}\, l l' + a_{12}(l'm + l m') + a_{22}\, m m' = 0}$$

• asintoti (reali, nel caso dell'iperbole)

⇝ si trovano i diametri autoconiugati

nell'espressione $(\diamond)$ si pone $l \equiv l'$ $m \equiv m'$ (o semplicemente $l = l'$, $m = m'$) e si ha

$$\boxed{a_{11} l^2 + 2 a_{12} l m + a_{22} m^2 = 0}$$

che mostra come le direzioni degli asintoti sono costituite, come è giusto che sia, dalle intersezioni di $\mathcal{C}$ con la retta impropria

Per determinarli effettivamente, basta individuare il centro oppure scrivere l'equazione della tangente in tali punti impropri