Lezione V

APPROFONDIMENTI DI GEOMETRIA V2

Mauro Spera, Elena Zizioli

* Dimostrazione del teorema spettrale
(per operatori hermitiani)

(i) $\sigma(T)$ non è vuoto grazie al teorema fondamentale dell'algebra:
p_c^T ammette almeno una radice in $\mathbb{C}$ e dunque ne ha n (contate con le loro molteplicità) in virtù del teorema di Ruffini.

Inoltre, da

$$Tv = \lambda v \qquad v \neq \underline{0} \text{ autovettore corrispondente all'autovalore } \lambda \in \sigma(T)$$

si ha subito:

$$\langle v, Tv \rangle = \langle v, \lambda v \rangle = \lambda \underbrace{\langle v, v \rangle}_{>0}$$

$$T = T^* \quad \|$$

$$\langle Tv, v \rangle = \langle \lambda v, v \rangle = \bar{\lambda} \langle v, v \rangle$$

$$\Rightarrow \boxed{\lambda = \bar{\lambda} \quad \text{ovvero} \quad \lambda \in \mathbb{R}}.$$

(ii) Siano $v \in V_\lambda \equiv V_\lambda^T$, $w \in V_\mu$

$Tv = \lambda v$ $\quad$ $Tw = \mu w$ $\quad$ $\lambda \neq \mu$

Si ha:

$$\begin{array}{rl} & \langle v, Tw \rangle = \langle v, \mu w \rangle = \mu \langle v, w \rangle \\ T=T^* & \quad \| \\ & \langle Tv, w \rangle = \langle \lambda v, w \rangle = \bar{\lambda} \langle v, w \rangle \overset{\text{per (i)}}{=} \lambda \langle v, w \rangle \end{array}$$

$\Rightarrow \quad (\lambda - \mu) \langle v, w \rangle = 0$

$\Rightarrow \quad \langle v, w \rangle = 0$ poiché $\lambda \neq \mu$.

(iii) Procediamo per induzione (completa) su $n = \dim_{\mathbb{C}} V$

Per $n = 1$ il teorema è banalmente vero.
Supponiamolo vero per $\underline{\dim V \leq n-1}$.
Dimostreremo che è vero per $\dim V = n$.

Sia V_λ un autospazio di T. $(\lambda \in \sigma(T))$

Si ha $\quad V = V_\lambda \oplus V_\lambda^\perp$ $\quad$ ($V_\lambda^\perp$: complemento ortogonale di V_λ in V) $\quad \dim V_\lambda^\perp \leq n-1$

Osserviamo ora che sia V_λ che $V_\lambda^\perp$ sono $\underline{T\text{-invarianti}}$ (equiv. $\underline{T\text{-stabili}}$), ossia

$T V_\lambda \subseteq V_\lambda$ $\quad$ ciò è chiaro: $Tv = \lambda v \quad \forall v \in V_\lambda$

$T V_\lambda^\perp \subseteq V_\lambda^\perp$

Dimostriamo che $T V_\lambda^\perp \subseteq V_\lambda^\perp$

Sia $w \in V_\lambda^\perp$; facciamo vedere che $Tw \in V_\lambda^\perp$

$\forall v \in V_\lambda$ si ha, per ipotesi $\langle w, v \rangle = 0$.

Ora, $\langle v, Tw \rangle = \langle Tv, w \rangle = \lambda \langle v, w \rangle = 0$,

da cui l'asserto.

L'operatore $T|_{V_\lambda^\perp} : V_\lambda^\perp \circlearrowleft$

risulta unitariamente diagonalizzabile in virtù dell'ipotesi induttiva ($\dim V_\lambda^\perp \leq n-1$)

Inoltre $T|_{V_\lambda} : V_\lambda \circlearrowleft$ è ovviamente

unitariamente diagonalizzabile (è già diagonale...)

Pertanto T sarà unitariamente diagonalizzabile.

Siano $V_\lambda = \langle e_1 \dots e_k \rangle$ base ortonormale di autovettori in V_λ : $k = m_g(\lambda)$

$V_\lambda^\perp = \langle f_1 \dots f_{n-k} \rangle$ base ortonormale diagonalizzante (fornita dall'ipotesi induttiva)

Si ha, posto

$$b = (e_1 \dots e_k, f_1 \dots f_{n-k})$$

base ortonormale adattata alla decomposizione $V = V_\lambda \oplus V_\lambda^\perp$

$$\boxed{m_{bb}(T) = \begin{array}{c c} & \overbrace{}^{k} \\ k\left\{\right. & \left(\begin{array}{cc|cc} \lambda & 0 & & \\ & \ddots & & 0 \\ 0 & \lambda & & \\ \hline & & \lambda_1 & 0 \\ & 0 & & \ddots \\ & & 0 & \lambda_{n-k} \end{array}\right) \left.\right\} n-k \\ & \qquad\qquad\qquad \underbrace{}_{n-k} \end{array}}$$

nel blocco inferiore compaiono i rimanenti autovalori, con le loro molteplicità

Ovviamente, in questo caso si ha $\forall \lambda \in \sigma(T)$

$$\boxed{\underbrace{m_a(\lambda)}_{\text{molteplicità algebrica}} = \underbrace{m_g(\lambda)}_{\text{molteplicità geometrica}}}$$

molteplicità algebrica (numero di volte col quale λ appare come radice di p_c^T)

molteplicità geometrica $(= \dim V_\lambda^T)$

$$\boxed{p_c^T(\lambda) = \prod_{\lambda_i \text{ distinti}} (\lambda_i - \lambda)^{m_g(\lambda_i)}}$$

$p_c^T \Rightarrow \mathbb{R}$, $\quad m_a(\lambda_i) = m_g(\lambda_i)$

* proiettori spettrali

Abbiamo già osservato che l'operatore di proiezione ortogonale $P_U : V \to V$ dato da $v \mapsto v_U$ (componente di v in U)

è hermitiano (simmetrico nel caso euclideo)

Posto $e = (\underbrace{u_1 \dots u_k}_{\text{base ortonormale di } U}, \underbrace{u_1^\perp \dots u_{n-k}^\perp}_{\text{base ortonormale di } U^\perp})$

autovettori di $P_U \rightsquigarrow \lambda = 1$ $\qquad$ $\lambda = 0 \rightsquigarrow$ autovettori di P_U

si ha

$$m_{ee}(P_U) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & 0 & \\ & & 1 & & & \\ \hline & & & 0 & & \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} I_k & 0 \\ \hline 0 & 0_{n-k} \end{array}\right)$$

Il teorema spettrale può essere riformulato per mezzo dei proiettori spettrali $P_{V^T_{\lambda_i}}$

(operatori di proiezione ortogonale sui vari autospazi)

Si hanno le relazioni:

$$\boxed{\begin{gathered} P_{V^T_{\lambda_i}} P_{V^T_{\lambda_j}} = P_{V^T_{\lambda_j}} P_{V^T_{\lambda_i}} = P_{V^T_{\lambda_j}} \delta_{ij} , \\ \sum_{\lambda_j \text{ distinti}} P_{V_{\lambda_j}} = I \end{gathered}} \qquad (*)$$

e allora

$$\boxed{T = \sum_{\lambda_i \text{ distinti}} \lambda_i \, P_{V^T_{\lambda_i}}}$$

Il teorema spettrale diviene un teorema di esistenza di una famiglia di proiettori spettrali soggetti alle (*)

$$e = \overbrace{\left(\underbrace{\cdot\,\cdot\,\cdot\,\cdot}_{\substack{\text{base ortonormale} \\ \text{di } V_{\lambda_1}}} \;,\; \cdot\,\cdot\,\cdot\,\cdot\,\cdot \;,\; \underbrace{\cdot\,\cdot\,\cdot\,\cdot\,\cdot}_{\substack{\text{base ortonormale} \\ \text{di } V_{\lambda_r}}} \right)}^{\text{base ortonormale di autovettori di } T}$$

$\lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_r$ distinti

$$m_{ee}\left(P_{V^T_{\lambda_i}}\right) = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{matrix}} & & 0 \\ & \boxed{\begin{matrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & 1 \end{matrix}} & \\ 0 & & \boxed{\begin{matrix} 0 & \\ & 0 \end{matrix}} \end{pmatrix}$$

$I_{m_g(\lambda_i)}$

$$m_{ee}(T) = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_1 \end{matrix}} & & & 0 \\ & \boxed{\begin{matrix} \lambda_2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_2 \end{matrix}} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \boxed{\begin{matrix} \lambda_r & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_r \end{matrix}} \end{pmatrix}$$

$$= \sum_{\lambda_i \text{ distinti}} \lambda_i \, m_{ee}\left(P_{V^T_{\lambda_i}}\right)$$

Esempio

$\lambda_1 \neq \lambda_2$

$$m_{ee}(T) = \left(\begin{array}{cc|c} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \lambda_2 \end{array}\right) =$$

$$= \lambda_1 \underbrace{\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right)}_{m_{ee}(P^T_{V_{\lambda_1}})} + \lambda_2 \underbrace{\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right)}_{m_{ee}(P^T_{V_{\lambda_2}})}$$

★ Cenno al calcolo funzionale per operatori

Sia $D \in M_n(\mathbb{C})$ una matrice diagonale

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \quad \text{Si ha subito} \quad D^2 = \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^2 \end{pmatrix}$$

$$D^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^k \end{pmatrix} \quad \text{e, in generale}$$

Se $D = \left(\begin{array}{c|c} 1_1 & 0 \\ \hline 0 & 0_0 \end{array}\right)$

$D^2 = D$ (idempotente)

e $D^k = D$ . .

$$p(D) = \begin{pmatrix} p(\lambda_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & p(\lambda_n) \end{pmatrix}$$

polinomio

★ Ciò suggerisce di definire, $\forall f$

(in una data categoria, continua, liscia, analitica, misurabile ...)

$$f(D) := \begin{pmatrix} f(\lambda_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & f(\lambda_n) \end{pmatrix}$$

Se A è diagonalizzabile,

$$A = S^{-1} D S \qquad S \in GL_n(\mathbb{C})$$

e $$A^2 = S^{-1} D \underbrace{S \cdot S^{-1}}_{I} D S = S^{-1} D^2 S$$

$$A^k = (S^{-1} D \underbrace{S) \cdot (S^{-1}}_{I} D S) \ldots (S^{-1} D S) = \ldots S^{-1} D^k S$$

e, ancora

$$p(A) = \dots = S^{-1} p(D) S$$

Definiamo allora, $\forall f$

$$f(A) := S^{-1} f(D) S$$

" calcolo funzionale "

Nel caso di un operatore hermitiano, da

$$T = \sum_{\lambda_i \text{ distinti}} \lambda_i \, P_{V^T_{\lambda_i}}$$

★ riformulazione di von Neumann

sorge spontaneo porre

$$\boxed{f(T) := \sum_{\lambda_i \text{ distinti}} f(\lambda_i) \, P_{V^T_{\lambda_i}}}$$

★ Si introducono pertanto il calcolo funzionale continuo, olomorfo, boreliano... [divengono teoremi] ma questa è un'altra storia...