APPROFONDIMENTI DI GEOMETRIA V2

Mauro Spera, Elena Zizioli

* Rappresentazione matriciale di prodotti scalari hermitiani

(e, mutatis mutandis, euclidei)

Sia $(V, \langle\ \rangle)$ uno spazio hermitiano ($\dim_{\mathbb{C}} V = n < \infty$). Data una base qualsiasi $e = (e_1, e_2, \dots e_n)$, posto

$$h_{ij} := \langle e_i, e_j \rangle \qquad i,j = 1, \dots n$$

si trova, da $\langle e_j, e_i \rangle = \overline{\langle e_i, e_j \rangle}$

$$h_{ij} = \overline{h}_{ji} \qquad \text{i.e., la matrice}$$

$$H = (h_{ij}) \quad \text{è hermitiana}$$

Lezione VI

Posto poi $v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$, si ha

$$\left[\langle v, v \rangle = \sum_{i,j} \overline{\alpha}_i \alpha_j \underbrace{\langle e_i, e_j \rangle}_{h_{ij}} = \sum_{i,j} h_{ij} \overline{\alpha}_i \alpha_j \right.$$

$$\left. \equiv \tilde{v}^* H \tilde{v} \right] \quad \text{con} \quad \tilde{v} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}, \quad \tilde{v}^* = (\overline{\alpha}_1 \dots \overline{\alpha}_n)$$

$$H = (h_{ij})$$

Essendo $\langle\ ,\ \rangle$ definita positiva ($\langle v, v \rangle \geq 0$ e $= 0 \Leftrightarrow v = \underline{0}$), deve esserlo anche la matrice H

Ora, in virtù del teorema spettrale in $(\mathbb{C}^n, \langle\ \rangle_{st})$

H può essere unitariamente diagonalizzata, cioè

$$H = U^* D U \quad , \quad D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \quad , \quad U \in U(n)$$

autovalori di H
$\lambda_i \in \sigma(H)$

si ha pertanto:

$$\langle v, v \rangle = \tilde{v}^* H \tilde{v} = \tilde{v}^* U^* D U \tilde{v} = = (U \tilde{v})^* D (U v) = \sum_{i=1}^n \lambda_i |\beta_i|^2$$

(con $U\tilde{v} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}$), sicché $\langle\ ,\ \rangle$ è definita positiva (equiv. H è definita positiva) precisamente quando $\lambda_i > 0 \quad \forall i$.

Viceversa, presa $H = H^*$ definita positiva ($\lambda_i > 0$), dato uno spazio vettoriale complesso V ($\dim_{\mathbb{C}} V = n$) in cui sia fissata una base qualsiasi $e = (e_1 \ldots e_n)$, la posizione

$$\boxed{\langle e_i, e_j \rangle := h_{ij}}$$

dà vita (estendendo per sesquilinearità) ad un prodotto scalare hermitiano:

$$v = \sum \alpha_i e_i \qquad w = \sum \beta_j e_j$$

$$\langle v, w \rangle = \sum_{i,j} \bar{\alpha}_i \beta_j \underbrace{\langle e_i, e_j \rangle}_{h_{ij}} = \sum_{i,j} h_{ij} \bar{\alpha}_i \beta_j$$

Più in generale, dato $(V, \langle\,\rangle)$ e $T = T^* \in End(V)$, la posizione

$$\boxed{q_T(v) = \langle v, Tv \rangle}$$

definisce una forma quadratica (che si polarizza ad una forma sesquilineare

$$b(v, w) = \langle v, Tw \rangle .$$

Viceversa, data una matrice hermitiana $Z = (z_{ij})$ e fissata una <u>base</u> <u>ortonormale</u> $e = (e_1 \dots e_n)$, la posizione $\langle e_i, Te_j \rangle := z_{ij}$ definisce un operatore hermitiano T:

$$\boxed{Te_j = \sum_{i=1}^{n} z_{ij} e_i} \qquad j = 1..n$$

controllo $\quad Te_j = \sum \underbrace{\langle e_i, Te_j \rangle}_{z_{ij}} e_i$

Esercizio. Sia data la matrice

$$\boxed{H = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ \beta & 1 \end{pmatrix}} \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{C}$$

Si determinino α e β in modo che H corrisponda ad un prodotto scalare hermitiano

Soluzione. H deve essere hermitiana e definita positiva.

- H hermitiana : $H^* = \begin{pmatrix} 1 & \bar\beta \\ \bar\alpha & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ \beta & 1 \end{pmatrix}$

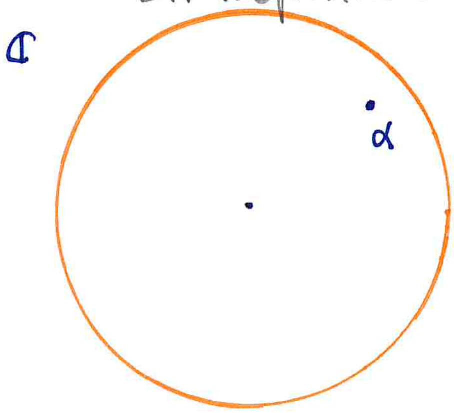
$$\Rightarrow \quad \beta = \bar\alpha \quad \Rightarrow \quad H = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ \bar\alpha & 1 \end{pmatrix}$$

- H definita positiva : $\det H = 1 - |\alpha|^2 > 0$

$(\det H = \lambda_1 \lambda_2 > 0) \quad \Rightarrow \quad |\alpha| < 1 \quad (\lambda_i \text{ concordi})$

ma $\operatorname{Tr} H = \lambda_1 + \lambda_2 = 2 \quad \Rightarrow \quad \lambda_i > 0 \quad , i = 1, 2.$

In definitiva, H è definita positiva per $|\alpha| < 1$.



gli autovalori di $H = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ \bar\alpha & 1 \end{pmatrix}$ possono essere calcolati facilmente : $\alpha\bar\alpha = |\alpha|^2$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & \alpha \\ \bar\alpha & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad (1-\lambda)^2 - |\alpha|^2 = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$(1 - \lambda + |\alpha|)(1 - \lambda - |\alpha|) = 0$$

$\Rightarrow \quad \lambda = 1 \pm |\alpha|$ e i due valori (reali, come è giusto che sia) sono entrambi positivi $\Leftrightarrow \quad |\alpha| < 1$ come già trovato.

- <u>Esercizio</u>

In $\mathbb{R}^3$, determinare, se esiste, un operatore simmetrico T tale che $V_2^T = \{x+y+z=0\}$, $3 \in \sigma(T)$. È unico?

R. Deve essere $V_3^T = (V_2^T)^\perp = \left\langle \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \right\rangle$. T è unico ed è dato da

$$T = 2 P_{V_2^T} + 3 P_{V_3^T}$$

operatori di proiezione ortogonale.

Si ha poi, ovviamente $P_{V_2^T} = I - P_{V_3^T}$

sicché

$$T = 2(I - P_{V_3^T}) + 3 P_{V_3^T}$$

$$= 2I + P_{V_3^T}$$

$$\boxed{T = 2I + P_{V_3^T}}$$

Determiniamo $P_{V_3^T}$. Si ha subito:

$$P_{V_3^\perp} : \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \longmapsto \left\langle \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

base orton. di $V_3^\perp$

$$= \frac{1}{3}(a+b+c)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Sicché, ponendo $a=1,\ b=0,\ c=0$ etc. si trova, per $m_{ee}(P_{V_3^\perp})$

base canonica

$$\begin{array}{ccc} & & \\ \left(\begin{array}{c|c|c} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right) \\ P_{V_3^\perp}e_1 \quad P_{V_3^\perp}e_2 \quad P_{V_3^\perp}e_3 \end{array}$$

(verificare che $P^2 = P$, $P = P^t$)

Pertanto, $m_{ee}(T)$ è $\quad (T = 2I + P_{V_3^\perp})$

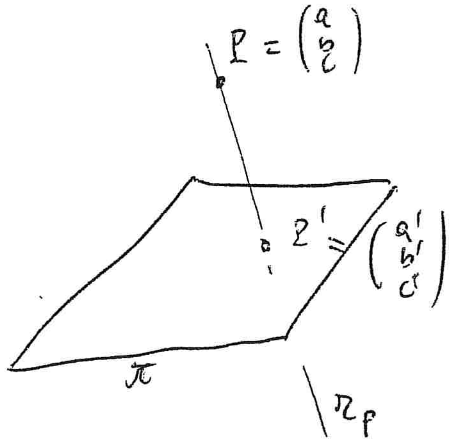
$$\boxed{m_{ee}(T) = \begin{pmatrix} \frac{7}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{7}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{7}{3} \end{pmatrix}}$$

$$2 + \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$$

Variante

troviamo direttamente $P_{V_2^T}$. O si trova una base ortonormale di V_2^T (basta trovarne una base qualsiasi e poi applicare G-S)

Oppure possiamo procedere così: l'equazione della retta r_P per P e $\perp \pi$ è



$$\begin{cases} x = a + t \\ y = b + t \\ z = c + t \end{cases}$$

Essa interseca π in P', corrispondente a t t.c.

$$\underbrace{(a+t)}_{x} + \underbrace{(b+t)}_{y} + \underbrace{(c+t)}_{z} = 0$$

ovvero
$$a+b+c+3t = 0$$

$$t = -\frac{a+b+c}{3}$$

$$\Rightarrow P' = \begin{pmatrix} a - \frac{a+b+c}{3} = \frac{2a-b-c}{3} \\ b - \frac{a+b+c}{3} = \frac{2b-a-c}{3} \\ c - \frac{a+b+c}{3} = \frac{2c-a-b}{3} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$$

cioè

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} \frac{2a-b-c}{3} \\ \frac{2b-a-c}{3} \\ \frac{2c-a-b}{3} \end{pmatrix}$$

$$P \longmapsto P'$$

sicché

$$M_{ee}(P_{V_2^T}) = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

(e si ritrova il risultato del primo metodo).