Lezione VII

APPROFONDIMENTI DI GEOMETRIA V2

Mauro Spera, Elena Rizzoli

1 Richiami sulle forme bilineari e relative forme quadratiche

Sia V uno spazio vettoriale (di dimensione finita $= n \geq 1$) su un campo K ($\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, per fissare le idee)

Una forma bilineare su V è un'applicazione

$$\boxed{\begin{aligned} b : V \times V &\to K \\ (v, w) &\mapsto b(v,w) \end{aligned}}$$

lineare in entrambi gli argomenti:

$$b(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2, w) = \alpha_1 b(v_1, w) + \alpha_2 b(v_2, w)$$

$$b(v, \beta_1 w_1 + \beta_2 w_2) = \beta_1 b(v, w_1) + \beta_2 b(v, w_2)$$

$\forall\, v, v_i, w, w_i \in V$, $\alpha_i, \beta_i \in K$

[Esempio banale: $b = 0$: $0(v,w) = 0$ la forma nulla]

L'insieme delle forme bilineari acquista in modo naturale una struttura di spazio vettoriale su K (not: $T^2(V^*)$) qualora si definisca, $\forall\, b_1, b_2$, e con $\beta_i \in K$, $i=1,2$

$$\boxed{(\beta_1 \cdot b_1 + \beta_2 \cdot b_2)(v,w) := \beta_1 \cdot b_1(v,w) + \beta_2 \cdot b_2(v,w)}$$

da definirsi

specificazione su $v, w \in V$, arbitrari

operazioni su K

b è detta **simmetrica** se vale inoltre

$$\boxed{b(w,v) = b(v,w)} \qquad \forall v, w \in V$$

antisimmetrica se $\quad b(w,v) = -b(v,w)$

Si ottengono così due sottospazi naturali di $T^2(V^*)$

$S^2(V^*)$ forme bilineari simmetriche

$\Lambda^2(V^*)$ forme bilineari antisimmetriche

Fissata una base $e = (e_1 \dots e_n)$ di V, è chiaro che b è determinata dai valori $b(e_i, e_j)$, $i,j = 1 \dots n$. Posto infatti

$$v = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \qquad w = \sum_{j=1}^{n} y_j e_j,$$

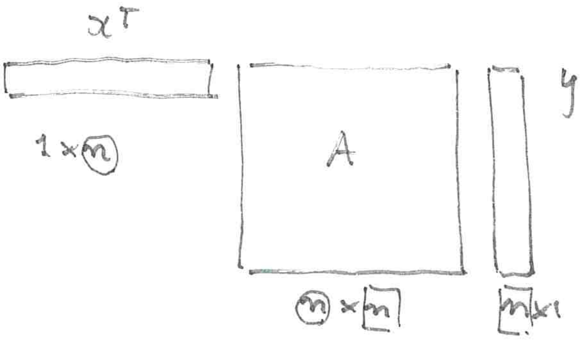
si ha, grazie alla bilinearità

$$b(v,w) = b\Big(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \sum_{j=1}^{n} y_j e_j\Big) = \sum_{i,j=1}^{n} x_i y_j \, b(e_i, e_j)$$

Si introduca $A = (a_{ij}) \in M_n(K)$

$a_{ij} := b(e_i, e_j)$. Si trova allora

$$\boxed{b(v,w) = x^T A y} \qquad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$



$A = \left(a_{ij} := b(e_i, e_j) \right) \in M_n(K)$ è

detta matrice rappresentativa di b rispetto alla base $e = (e_1 \dots e_n)$

Viceversa, data $A \in M_n(K)$ e fissata una base $e = (e_1 \dots e_n)$ in V, si può costruire in modo ovvio una forma bilineare b che ammetta A come matrice rappresentativa rispetto ad e, basta infatti porre $b(e_i, e_j) := a_{ij}$

ed estendere per bilinearità.

Ovviamente b è simmetrica $\Leftrightarrow$ A lo è ($A = A^T$) e b è antisimmetrica $\Leftrightarrow$ A lo è ($A^T = -A$)

[ciò è vero per una qualsiasi matrice rappresentativa]

Osserviamo esplicitamente che, data $A \in M_n(K)$, essa può interpretarsi direttamente come forma bilineare $b \equiv b_A$ rispetto alla base canonica di K^n (di cui è, ovviamente, la matrice corrispondente).

* Forme bilineari simmetriche e forme quadratiche

Data una forma bilineare simmetrica, consideriamo la funzione ad essa associata data da

$$q : \begin{cases} V \longrightarrow K \\ v \longmapsto q(v) := b(v,v) \end{cases}$$

q è detta **forma quadratica** associata a b (altra notazione: q_b).

In concreto, se A è la matrice rappresentativa di b rispetto ad $e = (e_1 \dots e_n)$ $(A = A^T)$, si ha

$$\underbrace{q(x)}_{v = \sum x_i e_i} = x^T A x = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$$

b può essere ricostruita da q per mezzo dell'identità di polarizzazione ⟿ terminologia di origine geometrica, come vedremo

$$\boxed{b(v,w) = \frac{1}{2}\left[q(v+w) - q(v) - q(w) \right]}$$

Verifica diretta: $q(v+w) = b(v+w, v+w) =$

$$= \underbrace{b(v,v)}_{q(v)} + \underbrace{b(w,w)}_{q(w)} + b(v,w) + b(w,v) = q(v) + q(w) + 2\,b(w,v)$$

Concretamente, data una forma quadratica su K^n, i.e. un polinomio omogeneo di secondo grado nelle variabili $x_1 \dots x_n$ $\quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

$$q(x) = \sum_{i,j=1}^{n} a'_{ij} x_i x_j$$

Si può sempre fare in modo che

$$q(x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j = x^T A x$$

con A simmetrica $(A = A^T)$

ponendo $\quad a_{ij} := \frac{1}{2}(a'_{ij} + a'_{ji})$ $\quad$ è chiaro che è sufficiente far ciò per $i \neq j$

Esempio $\quad q(x) = a'_{11} x_1^2 + a'_{12} x_1 x_2 + a'_{21} x_2 x_1 + a'_{22} x_2^2$

$$= a'_{11} x_1^2 + (a'_{12} + a'_{21}) x_1 x_2 + a'_{22} x_2^2 =$$

$$= a'_{11} x_1^2 + 2 a_{12} x_1 x_2 + a'_{22} x_2^2 =$$

$$= a_{11} x_1^2 + a_{12} x_1 x_2 + a_{12} x_2 x_1 + a_{22} x_2^2$$

$$= (x_1, x_2) \overbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}}^{A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x^T A x$$

$a_{21} = a_{12}$

$A = (a_{ij})$

$A = A^T$

$a_{ij} = a_{ji}$

Pertanto, dalla forma quadratica

$$q(v) = x^T A x \qquad A = A^T$$

si risale alla forma bilineare corrispondente

$$b(v, w) = x^T A y \qquad \text{(polarizzazione)}$$

Nel seguito passeremo indifferentemente da b a q

$$\begin{tikzcd} b \arrow[r, bend left, "v=w"] & q \arrow[l, bend left, "\text{polarizzazione}"] \end{tikzcd}$$

Esaminiamo l'effetto di un cambiamento di base su una forma bilineare (quadratica) simmetrica

Posto $\boxed{x = M x'}$ $\quad M \in GL(V)$

gruppo lineare generale
automorfismi di V
(endomorfismi invertibili)

Si ha

$$b(v, w) = x^t A\, y = (M x')^t A\, M y' =$$
$$= x'^t \underbrace{M^t A M}_{B}\, y' = x'^t B\, y'$$

con

$$(\ast) \quad \boxed{B = M^t A M} \qquad M \in GL(V)$$

Definizione Due matrici quadrate A e B (simmetriche) legate dalla $(\ast)$ si dicono *congruenti* e si scrive

$$\boxed{A \simeq B}$$

"A congruente a B"

Notiamo che se A è simmetrica, B definita da $(\ast)$ è pure simmetrica
$B^T = (M^T A M)^T = M^T A^T M = M^T A M$
$= B$

La relazione di congruenza è di *equivalenza*:

$A \simeq A$: basta prendere in $(\ast)$ $M = I$ $\quad \{\simeq$ *riflessiva*$\}$

$A \simeq B \Rightarrow B \simeq A$

Se $B = M^t A M$, è $(M^t)^{-1} B M^{-1} = A$

ovvero $A = (M^{-1})^t B M^{-1}$ e $M^{-1} \in Gl(V)$

$\approx$ è simmetrica

Se poi $A \approx B$, $B \approx C$, è $A \approx C$ $\quad$ $\approx$ è transitiva

Da $B = M^T A M$, $C = N^T B N$, $M, N \in Gl(V)$

segue $C = N^T M^T A M N = (MN)^T A (MN)$

Si osservi poi che la (◆) può rappresentarsi nella forma $B = M' A M'^T$, ponendo $M = M'^T$ e osservando che $(M'^T)^T = M'$

In definitiva $A \approx B \iff$ corrispondono ad una stessa forma bilineare b rispetto a basi diverse. Il concetto di congruenza può definirsi anche ad un livello più astratto:

data b, definiamo b_M così:

$$b_M(v, w) = b(Mv, Mw) \qquad M \in Gl(V)$$

Allora $b_1 \approx b_2$ se $\exists\, M \in Gl(V)$ "M agisce su $T^2(V^*)$"

tale che $(b_1)_M = b_2$

["b_1 e b_2 si trovano nella stessa orbita rispetto all'azione di $Gl(V)$"