Lezione VIII

APPROFONDIMENTI DI GEOMETRIA V2

Mauro Spera, Elena Zizioli

★ Data una forma bilineare simmetrica b, risulta sempre possibile determinarne una base b-ortogonale (o diagonalizzante) $e = (e_1, e_2, \dots e_n)$, ovvero tale che

$$b(e_i, e_j) = \beta_i \, \delta_{ij} \qquad (\beta_i = b(e_i, e_i))$$

ovvero, con matrice rappresentativa diagonale

$$A = \begin{pmatrix} \beta_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \beta_n \end{pmatrix}$$

{ I β_i possono ridursi a 1 o 0 nel caso complesso, a ± 1 o 0 nel caso reale }

⚠ Attenzione: gli e_i non sono in generale autovettori, né i β_i autovalori!

In termini matriciali, ogni matrice simmetrica (con coefficienti nel campo K) è congruente ad una matrice diagonale

Ricordiamo, prima di procedere oltre, che per rango di b, $r(b)$ si intende il rango di una sua qualsiasi matrice rappresentativa (da $A = M^t B M$ segue subito che $r(A) = r(B)$)

Determiniamo un invariante completo per congruenza per matrici simmetriche nei casi $K = \mathbb{C}$, $K = \mathbb{R}$

$K = \mathbb{C}$ Tale invariante è il rango:

infatti $A \simeq D$ $D = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & 0 & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$ ($r(A)$ uni, $n - r(A)$ zeri)

Dunque $\boxed{A \simeq B \iff r(A) = r(B)}$

la completezza si riferisce a "$\Leftarrow$"

$K = \mathbb{R}$ Nel caso reale, l'invariante completo è la segnatura $\operatorname{sgn}(A)$, in accordo col

* teorema di inerzia di Sylvester

vedi pagina successiva

Il significato geometrico di tale teorema sarà cruciale per gli sviluppi successivi.

* Teorema di Sylvester

ogni matrice $A = A^T \in M_n(\mathbb{R})$ è congruente ad una matrice diagonale $D = \begin{pmatrix} \beta_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \beta_n \end{pmatrix}$

$A \simeq B$

A congruente a B

$B = M^T A M$

$M \in GL(n, \mathbb{R})$

$\simeq$ è una relazione di equivalenza

I β_i possono essere scelti $= \pm 1$ oppure a 0; D acquista la forma a blocchi

$$\boxed{D = \begin{pmatrix} I_p & & 0 \\ & -I_q & \\ 0 & & \overbrace{\begin{matrix} 0 & & \\ & \ddots & \\ & & 0 \end{matrix}}^{\nu} \end{pmatrix}}$$

$I_p = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & \ddots & 1 \end{pmatrix}$ ecc.

$p + q + \nu = n$

$p + q = r$

λ_i autovalori di A

con $p = \#\{\beta_i > 0\} = \#\{\lambda_i > 0\}$ $\quad q = r - p$

$q = \#\{\beta_i < 0\} = \#\{\lambda_i < 0\}$ $\quad r =$ rango di A

$n - r = \nu$: nullità di A

La coppia $\mathrm{sgn}(A) = (p, q)$ è detta segnatura di A e non dipende dalla base diagonalizzante (per congruenza) scelta (base di Sylvester) e costituisce un

* invariante completo per congruenza ovvero

$$A \simeq B \iff \mathrm{sgn}(A) = \mathrm{sgn}(B) : \quad p_A = p_B, \; q_A = q_B$$

** teorema di inerzia di Sylvester

• Esempio in $\mathbb{R}^3$ sia data

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$
$$A = A^T$$

$$\boxed{q_A(X) = X^T A X = x^2 + 2xy + 2y^2 + 3z^2}$$

Si ha, successivamente

$$q_A(X) = \underbrace{x^2 + 2xy + y^2}_{(\underbrace{x+y}_{x'})^2} + \underbrace{y^2}_{(y')^2} + \underbrace{3z^2}_{(\underbrace{\sqrt{3}z}_{z'})^2}$$

sicché, effettuando la trasformazione lineare (invertibile)

$$\begin{cases} x' = x+y \\ y' = y \\ z' = \sqrt{3}z \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x = x' - y = x' - y' \\ y = y' \\ z = \frac{1}{\sqrt{3}} z' \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \overset{M}{\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}$$

$$\boxed{X = MX'}$$

base diagonalizzante (di Sylvester)

si trova

$$q_A(X) = x'^2 + y'^2 + z'^2$$

definita positiva (segnatura $(3,0)$)

$$e_1' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad e_2' = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad e_3' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

nulla a che fare con una base di autovettori...

$$q_A(X) \quad X^T A X = (MX')^T A\, MX' =$$
$$= X'^T \underbrace{M^T A M}_{D} X' = X'^T \underset{I}{D} X' = q_D(X')$$

calcolando poi $p_c^A(\lambda)$ si trova

$$p_c^A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = [(1-\lambda)(2-\lambda)-1](3-\lambda) = [\lambda^2-3\lambda+1](3-\lambda)$$

$$\lambda^2-3\lambda+1=0$$

$$\lambda_\pm = \frac{3\pm\sqrt{9-4}}{2} = \frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$$

autovalori di A:

$\lambda=3$, $\lambda_\pm = \frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$

entrambi positivi

come dev'essere

$(\mathrm{sgn}(A) = (3,0))$

• esempio $\boxed{q(X) = x^2+2xy+2xz+3yz}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \frac{3}{2} \\ 1 & \frac{3}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Raggruppiamo così:

$$\boxed{q(X)} = (x+y+z)^2 - y^2 - z^2 + yz$$
$$= (x+y+z)^2 - y^2 - z^2 + 2\,y\cdot\frac{z}{2}$$
$$= (x+y+z)^2 - \left(y-\frac{z}{2}\right)^2 + \frac{z^2}{4} - z^2 =$$
$$= \underbrace{(x+y+z)}_{x'}{}^2 - \underbrace{\left(y-\frac{z}{2}\right)}_{y'}{}^2 + \underbrace{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}z\right)}_{z'}{}^2$$
$$= \boxed{x'^2 - y'^2 + z'^2} \Rightarrow \boxed{\mathrm{sgn}(q) = (2,1)}$$

come prima, se ne può individuare una base di Sylvester...

• <u>esempio</u> In $\mathbb{R}^2$, sia data $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$$q(X) = xy$$

non c'è modo di completare un quadrato...

Poniamo perciò $\begin{aligned} x &= x' + y' \\ y &= x' - y' \end{aligned}$ $\quad X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$

e $$q = q(X') = (x'+y')(x'-y') = x'^2 - y'^2$$

$\leadsto \operatorname{sgn}(q) = (1,1)$ indefinita

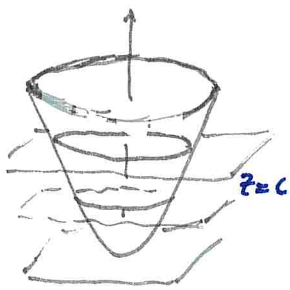
◆ ◆ ◆

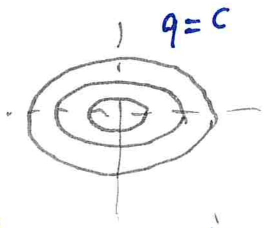
richiamo rapido

In $\mathbb{R}^2$

• $q(v) = x^2 + y^2$, $v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ def. positiva $(2,0)$

"paraboloide ellittico"





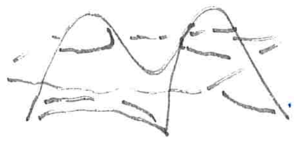
curve di livello: ellissi

$q(v) = -x^2 - y^2$ def. neg. $(0,2)$

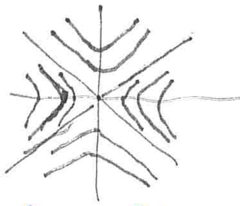
sezioni con piani verticali: parabole (per l'asse z)

• $q(v) = x^2 - y^2$ indefinita $(1,1)$

"paraboloide" iperbolico



sezioni con piani verticali: parabole



curve di livello: due fam. di iperboli

• $q(v) = x^2$ $(1,0)$

cilindro a direttrice parabolica