Lezione X

APPROFONDIMENTI DI GEOMETRIA V2

Mauro Spera, Elena Zizioli

* **Teorema di Sylvester e sua interpretazione geometrica** (in dimensione 3)

Ricordiamo l'enunciato del teorema di Sylvester

ogni matrice $A = A^T \in M_n(\mathbb{R})$ è congruente ad una matrice diagonale $D = \begin{pmatrix} \beta_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \beta_n \end{pmatrix}$

$A \simeq B$

A congruente a B

$B = M^T A M$

$M \in GL(n, \mathbb{R})$

$\simeq$ è una relazione di equivalenza

I β_i possono essere scelti $= \pm 1$ oppure a 0 ; D acquista la forma a blocchi

$$D = \begin{pmatrix} I_p & & 0 \\ & -I_q & \\ 0 & & \underbrace{\begin{matrix} 0 & & \\ & \ddots & \\ & & 0 \end{matrix}}_{\nu} \end{pmatrix}$$

$I_p = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & \ddots \ 1 \end{pmatrix}$ ecc.

$p + q + \nu = n$

$p + q = r$

λ_i autovalori di A

con $p = \#\{\beta_i > 0\} = \#\{\lambda_i > 0\}$ $\qquad q = r - p$

$q = \#\{\beta_i < 0\} = \#\{\lambda_i < 0\}$ $\qquad r =$ rango di A

$n - r = \nu$: nullità di A

La coppia $\mathrm{sgn}(A) = (p, q)$ è detta segnatura di A e non dipende dalla base diagonalizzante (per congruenza) scelta (base di Sylvester) e costituisce un

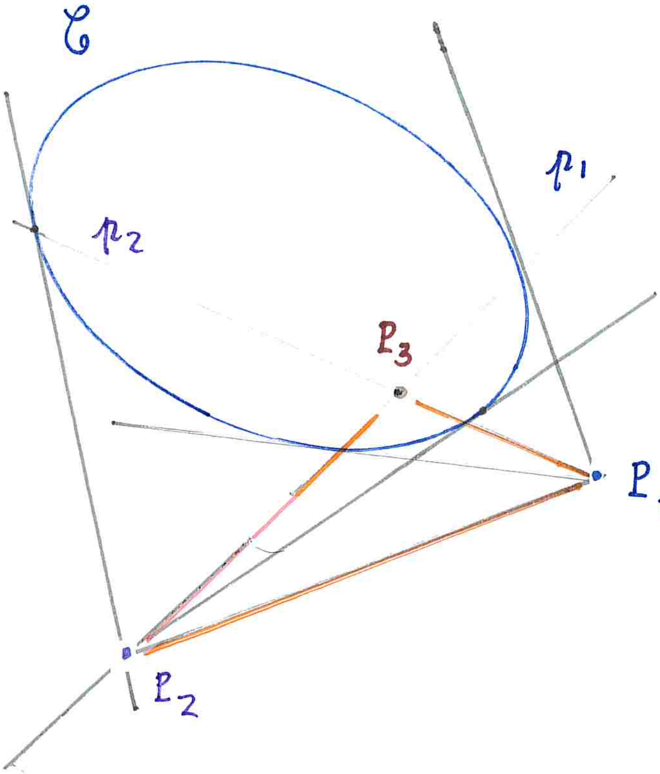
* invariante completo per congruenza ovvero

$A \simeq B \iff \mathrm{sgn}(A) = \mathrm{sgn}(B)$: $p_A = p_B$, $q_A = q_B$

** teorema di inerzia di Sylvester

Illustriamo il teorema per $n = 3$, fermandoci sul suo significato <u>geometrico</u> (conformemente alla sua origine storica).

Sia $\mathcal{C} : X^T A X = 0$ una conica generale e si costruisca un qualsiasi <u>triangolo autopolare</u> (in figura, $P_1 P_2 P_3$)
$P_i \notin \mathcal{C}$



$P_1 = [X_1]$

$$X_1 = \begin{pmatrix} x_0^{(1)} \\ x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \end{pmatrix} \neq \underline{0}$$

ecc.

Si ha $\boxed{X_i^T A X_j = \delta_{ij} \beta_j}$ (*) con $\beta_j := X_j^T A X_j \neq 0$ ($P_i \notin \mathcal{C}$ $\forall i$)

e $\boxed{X_j = M E_j}$ con (E_j: base canonica)

$$M = \begin{pmatrix} | & | & | \\ X_1 & X_2 & X_3 \\ | & | & | \end{pmatrix}$$

$\det M \neq 0$
(i P_i non sono allineati..)

La (*) diviene

$$(**) \quad \boxed{M^T A M = D} \qquad \text{se poniamo } D = \begin{pmatrix} \beta_1 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_2 & 0 \\ 0 & 0 & \beta_3 \end{pmatrix}$$

Pertanto $A \cong D$

Inoltre, dato che $[X_j] = [\underset{\neq 0}{\rho_j} X_j] = P_j$,

si può far sì che $\beta_j = \pm 1$

Notiamo altresì che, se $\mathscr{C}$ è a punti reali, i β_j non possono avere lo stesso segno

In caso contrario, $\underbrace{Y^T D Y}_{= \sum_i \beta_i y_i^2} \gtrless 0 \quad \forall\, Y \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\underline{0}\}$

Ma, da $Y^T D Y = Y^T M^T A M Y = \underset{\equiv X}{(MY)}^T A \underset{\equiv X}{(MY)}$

$= X^T A X \neq 0 \quad \forall\, X \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\underline{0}\}$ (M è invertibile)

ma ciò è assurdo, essendo $\mathscr{C}$ reale ($\mathscr{C} : X^T A X = 0$) per ipotesi.

Pertanto i β_i sono : due positivi e uno negativo o viceversa. Tale risultato non dipende dalla scelta del triangolo autopolare (ad esempio, per ragioni di continuità).

I due casi sono discriminati dal segno di $\det A$, in virtù di $\det A = \det M^{-T} D M^{-1} = \det(M^{-1})^2 \det D$

$$= \underbrace{(\det M)^{-2}}_{>0} \beta_1 \beta_2 \beta_3$$

controllo:

$$M^T A M = D$$

$$M^{-T} M^T A M M^{-1} = M^{-T} D M^{-1}$$

$$A = M^{-T} D M^{-1}$$

$$(M^T)^{-1} = (M^{-1})^T$$

In altre parole, la segnatura di A è $(2,1)$ oppure $(1,2)$

Dal punto di vista proiettivo, i due casi non sono distinguibili (si ha la stessa conica):

$\mathcal{C}_A \underset{P}{\simeq} \mathcal{C}_B$ se $A \simeq \rho B$, $\rho \neq 0$

coniche proiettivamente equivalenti

$A = A^T$, $B = B^T$

Nel caso in cui $\operatorname{sgn}(A) = (3,0)$ o $(0,3)$

q_A definita positiva

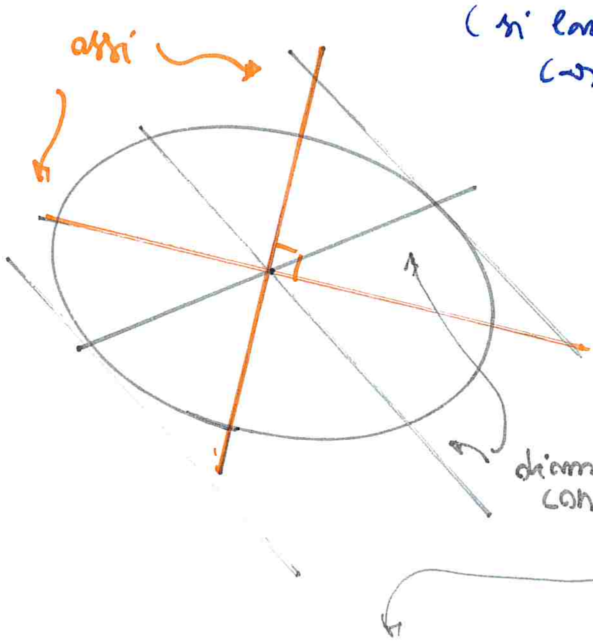
q_B definita negativa

$q_A(X) = X^T A X$

$\mathcal{C}$ è immaginaria. Se $r = 2$ o 1, $\mathcal{C}$ si spezza in due rette, distinte o coincidenti, rispettivamente.

* Sul teorema spettrale in dim 2
(interpretazione geometrica)

Data una conica a centro, cerchiamone i diametri coniugati ortogonali (assi)
(si lavora con un prefissato riferimento cartesiano)



$$A = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \qquad A_{00}$$

$\det A \neq 0$

diametri coniugati

$d \rightsquigarrow D_\infty : [0, l, m]$

$d' \rightsquigarrow D'_\infty : [0, l', m']$

$D_\infty^T A D'_\infty = D'^T_\infty A D_\infty = 0$

$$\underbrace{(l \;\; m)}_{X^T} \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}}_{A_{00}} \underbrace{\begin{pmatrix} l' \\ m' \end{pmatrix}}_{X'} = 0$$

$\rightsquigarrow a_{21} = a_{12}$

$X^T A_{00} X' = 0$

$$\boxed{\begin{cases} X_i^T A_{00} X_j = 0 \\ X_i^T X_j = 0 \end{cases}} \qquad \begin{array}{l} i,j = 1,2 \\ i \neq j \end{array}$$

ortogonalità $ll' + mm' = 0$

Le equazioni precedenti ci dicono che (siamo in $\mathbb{R}^2$) se $i \neq j$

$X_i \perp X_j$

$X_i \perp A_{00} X_j \Rightarrow X_j \,/\!/\, A_{00} X_j$

$$\Rightarrow \boxed{A_{00} X_j = \lambda_j X_j}$$

autovalore di A_{00}

!! ovvero .. le direzioni degli assi sono individuate dagli autospazi di A_{00} (vista come operatore simmetrico su $\mathbb{R}^2$ rispetto al prodotto scalare standard)

Se $\lambda_1 = \lambda_2$ si ha un cerchio e si hanno infinite coppie di assi

Mostriamo con un calcolo diretto che i λ_j sono necessariamente reali.

Sia $B = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$ $\quad (B = B^T)$

$$P_C^B(\lambda) = \begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ b & d-\lambda \end{vmatrix} = (a-\lambda)(d-\lambda) - b^2 =$$

$$= \lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad - b^2)$$

$$\Delta = (a+d)^2 - 4(ad-b^2)$$

$$= a^2 + 2ad + d^2 - 4ad + 4b^2$$

$$= \underbrace{a^2 - 2ad + d^2}_{(a-d)^2} + 4b^2 \geq 0$$

da cui l'asserto.