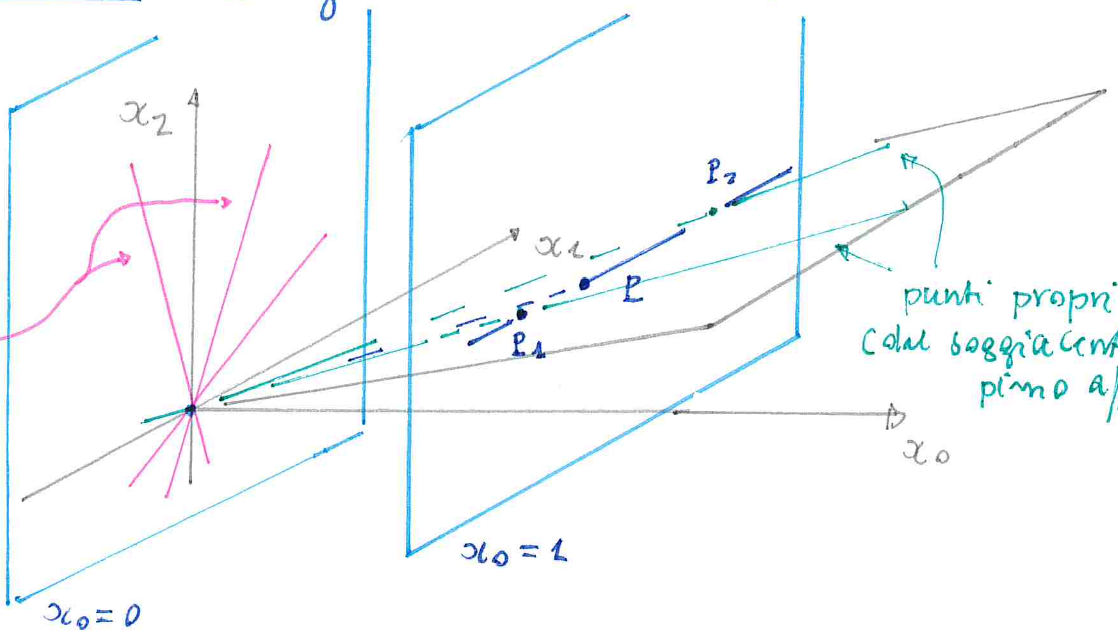
Lezione XI

APPROFONDIMENTI DI GEOMETRIA V2

Mauro Spera, Elena Zizioli

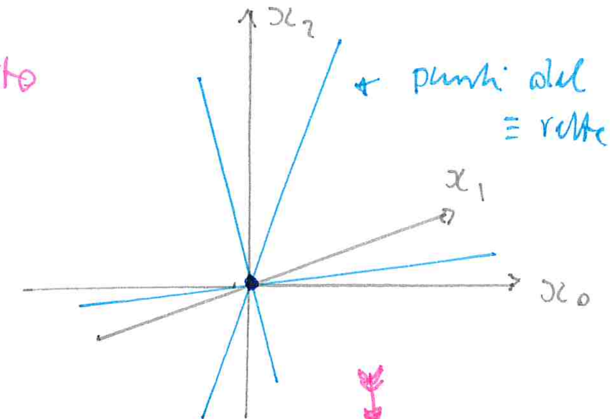
✱ <u>Richiami</u> sulla geometria di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ $\quad (\mathbb{P}^2(\mathbb{C}))$



punti impropri

giacciono su una retta, detta impropria o retta all'infinito

punti propri (del soggiacente piano affine)



✱ punti del piano proiettivo ≡ rette per l'origine

$$\mathbb{P}(V) = \{ \langle v \rangle \mid v \neq \underline{0} \} \qquad \langle v \rangle = \{ \lambda v \}_{\lambda \in K}$$

spazio proiettivo associato ad uno spazio vettoriale V (su un campo K)

$$\begin{array}{c} \| \! | \\ V \setminus \{0\} / \sim \end{array}$$

$v \sim w \iff v = \lambda w \,,\ \lambda \neq 0$

sottospazio vettoriale generato da $v \neq \underline{0}$

rette per l'origine di V, riguardato come spazio affine

notare

$$\mathbb{P}(\mathbb{R}^{n+1}) = \{ [x_0, x_1 \dots x_n] \mid (x_0 - x_n) \neq (0 - 0) \}$$

$$\begin{array}{c} \| \! | \\ \mathbb{P}^n(\mathbb{R}) \equiv \mathbb{P}^n \end{array}$$

o K...

✱ coordinate <u>omogenee</u>

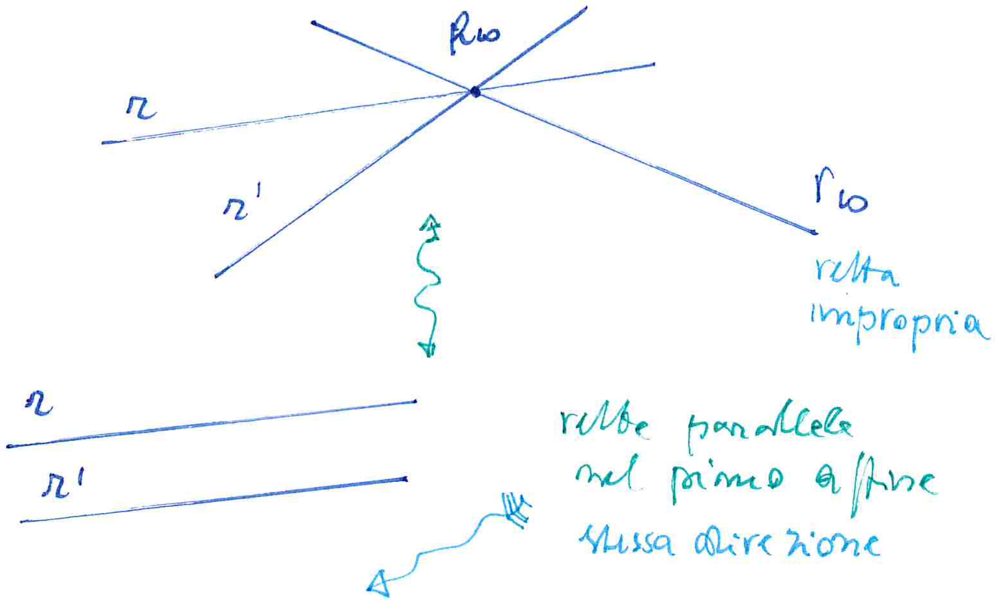
$[x_0 - x_n] = [x_0' - x_n']$ se $x_i' = \lambda x_i$

lo stesso λ $\forall i$

$\mathbb{P}^2$ emerge come completamento (o ampliamento proiettivo) del piano affine $\mathbb{A}^2$ tramite una retta aggiuntiva, la retta impropria.

Le direzioni delle rette ordinarie (parametri direttori $(l,m) \neq (0,0)$) divengono i punti della retta impropria $\boxed{r \rightsquigarrow R_\infty : [0,l,m]}$

i parametri direttori sono definiti a meno di un fattore di proporzionalità non nullo



rette parallele nel piano affine stessa direzione

$$\begin{array}{ll} r: & \left\{ \begin{array}{l} ax+by+c=0 \\ ax+by+c'=0 \end{array} \right. \\ r': & \end{array} \qquad \begin{array}{l} (a,b)\neq(0,0) \\ c\neq c' \end{array}$$

il sistema non ha soluzioni

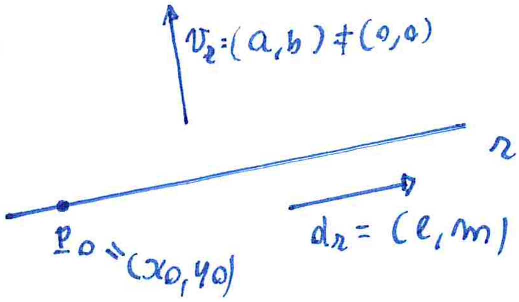
★ omogeneizzando: $x = \dfrac{x_1}{x_0}$ $\quad y = \dfrac{x_2}{x_0}$ $\quad x_0 \neq 0$ momentaneamente

$$\left\{ \begin{array}{l} a x_1 + b x_2 + c x_0 = 0 \\ a x_1 + b x_2 + c' x_0 = 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} a x_1 + b x_2 + c x_0 = 0 \\ \underbrace{(c-c')}_{\neq 0} x_0 = 0 \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{l} a x_1 + b x_2 + c x_0 = 0 \\ x_0 = 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} a x_1 + b x_2 = 0 \\ x_0 = 0 \end{array} \right.$$

$\Rightarrow \quad R_\infty = [0, l, m] \quad x_1 \propto l \quad x_2 \propto m \quad (l,m) \neq (0,0)$

★ interpretazione euclidea



$$\boxed{\begin{cases} x = x_0 + t l \\ y = y_0 + t \cdot m \end{cases}}$$

$ax + by + c = 0 \quad (a,b) \neq (0,0)$

$$\boxed{a l + b m = 0}$$

prodotto scalare

$\langle d_r, v_r \rangle = 0$

$$\boxed{a x_0 + b y_0 + c = 0}$$

$(P_0 \in r)$

proprio

★ retta nel piano proiettivo

equazione proiettiva : $r: \boxed{a_0 x_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 = 0}$

$(a_0 - a_2) \neq (0 - 0)$

★ direzione R_∞ : $\begin{cases} a_1 x_1 + a_2 x_2 = 0 \\ x_0 = 0 \end{cases} \leftarrow r_\infty$

che si aggiunge ai punti affini

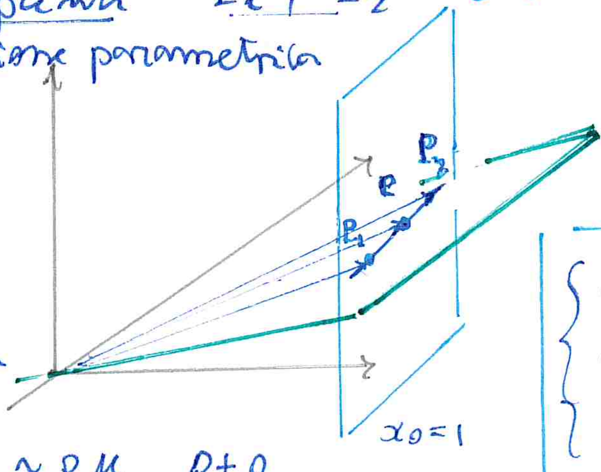
[equazione affine : da $x_0 \neq 0$ si arriva a
$ax + by + c = 0$, $a_0 = c$, $a_1 = a$, $a_2 = b$]

★ retta per due punti P_1, P_2 (distinti) : equazione parametrica [cf. figure]

$$\boxed{P = \lambda P_1 + \mu P_2} \quad (\lambda, \mu) \neq (0,0)$$

(è definita a meno di un fattore di proporzionalità non nullo)

$\lambda \sim \rho \lambda \quad \mu \sim \rho \mu \quad \rho \neq 0$



$$\begin{cases} x_0 = \lambda x_0^{(1)} + \mu x_0^{(2)} \\ x_1 = \lambda x_1^{(1)} + \mu x_1^{(2)} \\ x_2 = \lambda x_2^{(1)} + \mu x_2^{(2)} \end{cases}$$

[come vettori P, P_1, P_2 sono l. d.]

$$\boxed{x_i = \lambda x_i^{(1)} + \mu x_i^{(2)} \quad i = 0,1,2}$$

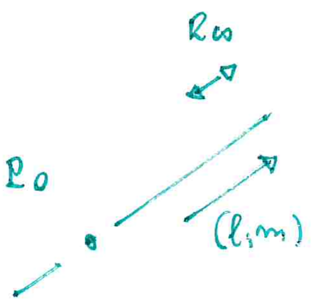
retta per due punti distinti P_1, P_2
("equazione "cartesiana") P, P_1, P_2 l.d.

$$(\bigstar)\qquad \boxed{\begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ x_0^{(1)} & x_1^{(1)} & x_2^{(1)} \\ x_0^{(2)} & x_1^{(2)} & x_2^{(2)} \end{vmatrix} = 0}$$

$| \quad | =$ def

$$\begin{vmatrix} - P - \\ - P_1 - \\ - P_2 - \end{vmatrix} = 0$$

Esempio: r, retta per P_0 di direzione individuata dai parametri direttori $(l, m) \neq (0,0)$ $\equiv$ retta per P_0 e $R_\infty : [0, l, m]$



$$\begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ x_0^{(0)} & x_1^{(0)} & x_2^{(0)} \\ 0 & l & m \end{vmatrix} = 0$$

$P_0 = [x_0^{(0)}, x_1^{(0)}, x_2^{(0)}] = [1, x, y]$ se P_0 è proprio

$$\Updownarrow$$

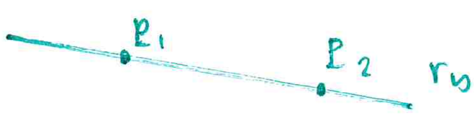
$$\begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_0 & y_0 \\ 0 & l & m \end{vmatrix} = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 0 & x-x_0 & y-y_0 \\ 0 & l & m \end{vmatrix} = 0 \iff \boxed{l(x-x_0) + m(y-y_0) = 0}$$

Laplace

Se P_1 e P_2 (distinti) sono entrambi impropri si ha subito $x_0 = 0$ (retta impropria)



* Geometria nello spazio proiettivo $\mathbb{P}^3$

(completamento dello spazio affine ordinario

ulteriore piano (piano all'infinito, piano improprio)

$\mathbb{P}^3 \ni P : [x_0, x_1, x_2, x_3]$, $(x_0 - x_3) \neq (0 - 0)$ coordinate omogenee

* equazione di un piano generico:

$$\boxed{a_0 x_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0}$$

$$(a_0 - a_3) \neq (0 - 0)$$

piano improprio π_∞: $x_0 = 0$

* rette nello spazio proiettivo: intersezioni di due piani distinti

$$\begin{cases} \alpha: & a_0 x_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0 \\ \beta: & b_0 x_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 = 0 \end{cases}$$

$(a_0 - a_3) \neq (0 - 0)$ $(b_0 - b_3) \neq (0 - 0)$

rango

$$rk \begin{pmatrix} a_0 & - & a_3 \\ b_0 & - & b_3 \end{pmatrix} = 2$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} -a- \\ -b- \end{pmatrix}}_{2\times 4} \cdot \underbrace{X}_{4\times 1} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{2\times 1}$$

sistema lineare omogeneo

Il teorema di Rouché-Capelli fornisce ∞^2 soluzioni

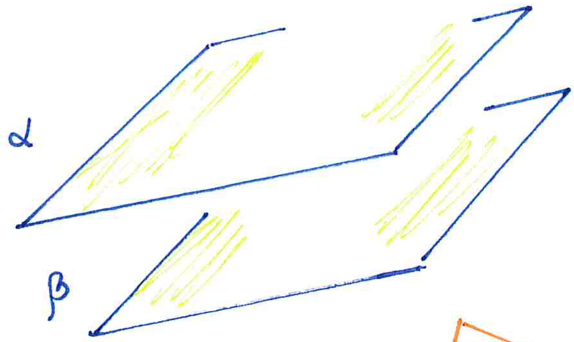
$\underset{\text{nullità}}{\nu} = 4 - \underset{\text{rango}}{rk}$ ← N+R teorema della nullità + rango

$2 = 4 - 2$

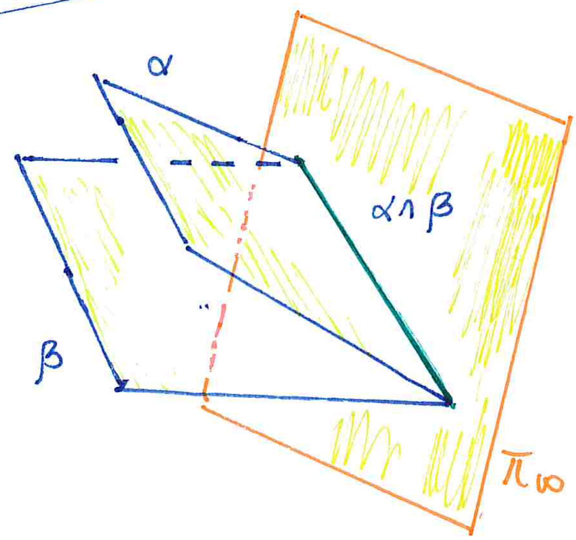
=> dal pto di vista proiettivo abbiamo un solo parametro effettivo

α e β risultano paralleli dal punto di vista affine se e solo se $\alpha \cap \beta$ è una retta impropria (ovvero, giace su π_∞)

piani paralleli nello spazio affine



incidenti, nello spazio proiettivo, in una retta impropria

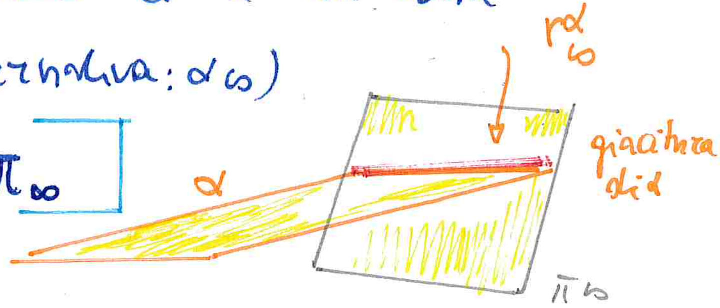


In ambito proiettivo, la giacitura di un piano α è la retta r_∞^α (notazione alternativa: α_∞)

Pertanto, ad un piano affine si aggiungono quelli della sua giacitura

$$\boxed{r_\infty^\alpha := \alpha \cap \pi_\infty}$$

o retta all'infinito del piano α



Pertanto due piani affini sono paralleli se e soltanto, letti proiettivamente, hanno la stessa giacitura r_∞

Analiticamente (cf la discussione relativa al piano proiettivo)

$$\begin{cases} ax+by+cz+d=0 \\ ax+by+cz+d'=0 \end{cases}$$

piani paralleli distinti
$(a,b,c) \neq (0,0,0)$
$d \neq d'$

Omogeneizzando e manipolando opportunamente si arriva a

$$\begin{cases} ax_1+bx_2+cx_3=0 \\ x_0=0 \end{cases}$$

← giacitura comune ai due piani
+ una retta sul piano improprio, descritta da coordinate omogenee x_1, x_2, x_3

← π_∞

★ <u>Retta</u> nello spazio <u>passante per</u>

$P_1 : [x_0^{(1)}, x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, x_3^{(1)}]$ e $P_2 : [x_0^{(2)}, x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, x_3^{(2)}]$

Equazione parametrica

$$r: \quad \boxed{P = \lambda P_1 + \mu P_2} \qquad (\lambda,\mu) \neq (0,0)$$

e definita a meno di un fattore di proporzionalità non nullo

$$(*) \quad \boxed{r: \begin{cases} x_0 = \lambda x_0^{(1)} + \mu x_0^{(2)} \\ x_1 = \lambda x_1^{(1)} + \mu x_1^{(2)} \\ x_2 = \lambda x_2^{(1)} + \mu x_2^{(2)} \\ x_3 = \lambda x_3^{(1)} + \mu x_3^{(2)} \end{cases}}$$

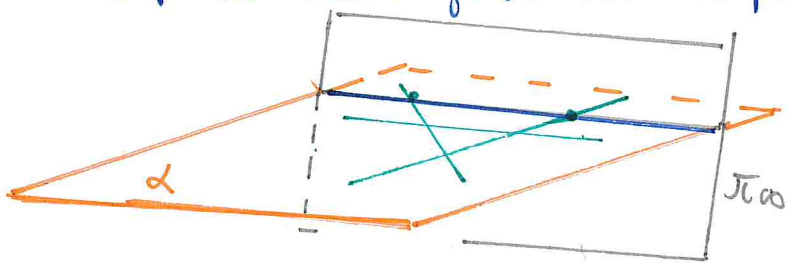
(†) $R_\infty = r \cap \pi_\infty$. Pertanto

★ <u>direzione</u>: si impone $x_0 = 0$ e si determinano perciò λ e μ (a meno di un fattore di proporzionalità non nullo), e con ciò il punto R_∞ che ne rappresenta la direzione

$$R_\infty = [0, \underbrace{l, m, n}_{\text{parametri direttori}}] \qquad (l,m,n) \neq (0,0,0)$$

(†) Se P_1 e P_2 sono <u>entrambi impropri</u>, la prima equazione delle (★) è un'identità $(0=0)$. Le successive equazioni forniscono l'equazione della retta cercata, che giace sul piano improprio, di coordinate omogenee x_1, x_2, x_3.

Le direzioni delle rette proprie su un dato piano costituiscono i punti della giacitura del piano



★ **Richiamo:** come si passa, nello spazio euclideo,

da $r : \begin{cases} ax+by+cz+d=0 & \pi \quad (a,b,c)\neq(0,0,0) \\ a'x+b'y+c'z+d'=0 & \pi' \quad (a',b',c')\neq(0,0,0) \end{cases}$

$\left\{ \underline{v}_{\pi} = (a,b,c) \text{ e } \underline{v}_{\pi'} = (a',b',c') \text{ non proporzionali (i.e. linearmente indipendenti)} \right\}$

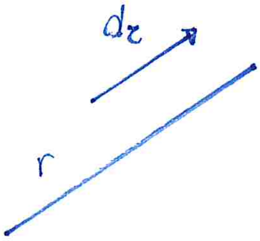
ad un'equazione parametrica.

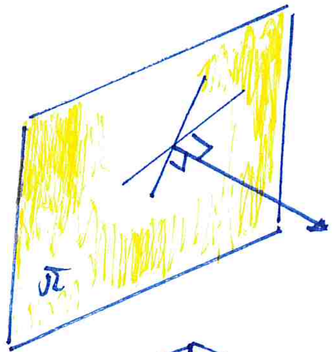
La direzione di r è individuata da

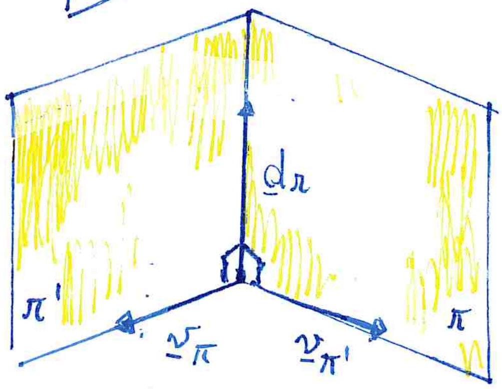
$$\boxed{\underline{d}_r \propto \underline{v}_{\pi} \times \underline{v}_{\pi'}}$$

$\underline{d}_r \parallel (l, m, n)$

$\left\{ \underline{v}_{\pi} \times \underline{v}_{\pi'} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ a & b & c \\ a' & b' & c' \end{vmatrix} = \underline{i}\begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix} - \underline{j}\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix} + \underline{k}\begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix} \right\}$







$$\boxed{\begin{aligned} l &\propto \begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix} \\ m &\propto \begin{vmatrix} c & a \\ c' & a' \end{vmatrix} \\ n &\propto \begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix} \end{aligned}}$$

L'equazione parametrica si ottiene facilmente.

Viceversa,
dall'equazione parametrica di

$r : \quad P = P_0 + t\,\underline{d}_r$ si trova,

eliminando t, r come intersezione di piani

Esempio Consideriamo la retta r passante per $P_0: (a, b, c)$ e direzione $d_r = (l, m, n) \neq (0,0,0)$

$$r: \begin{cases} x = a + tl \\ y = b + tm \\ z = c + tn \end{cases}$$

e scriviamo successivamente

$$\begin{cases} 1 = 1 \\ x = a + tl \\ y = b + tm \\ z = c + tn \end{cases} \qquad \underset{P}{\begin{bmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix}} = \underset{P_0}{\begin{bmatrix} 1 \\ a \\ b \\ c \end{bmatrix}} + t \underset{R_\infty}{\begin{bmatrix} 0 \\ l \\ m \\ n \end{bmatrix}}$$

vediamo subito che $r = P_0 R_\infty$, con l'aggiunta di R_∞ stesso.

★ Determiniamo il piano π tra punti distinti e non allineati P_1, P_2, P_3.

È chiaro che $P \in \pi$ se e solo se, [come vettori in $\mathbb{R}^4$]

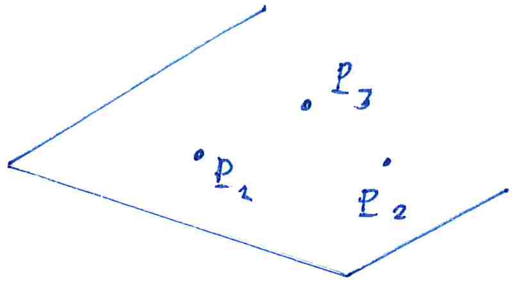
$$\boxed{P = \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \lambda_3 P_3}$$

$(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \neq (0,0,0)$ e definiti a meno di un fattore di proporzionalità $\neq 0$

ovvero, se e solo se

P, P_1, P_2, P_3 sono <u>linearmente</u> <u>dipendenti</u>

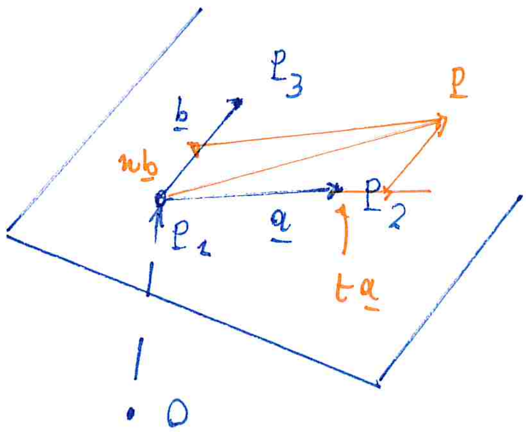
e pertanto



$$\pi : \begin{vmatrix} — P — \\ — P_1 — \\ — P_2 — \\ — P_3 — \end{vmatrix} = 0$$

per esteso:

$$\pi : \begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ x_0^{(1)} & x_1^{(1)} & x_2^{(1)} & x_3^{(1)} \\ x_0^{(2)} & x_1^{(2)} & x_2^{(2)} & x_3^{(2)} \\ x_0^{(3)} & x_1^{(3)} & x_2^{(3)} & x_3^{(3)} \end{vmatrix} = 0$$



Sia π descritto, affinemente da

$$\boxed{\pi : \underset{\substack{\uparrow \\ \text{per fissare} \\ \text{le idee}}}{P_1} + t \underset{\substack{\| \\ \overrightarrow{P_1P_2}}}{\underline{a}} + u \underset{\substack{\| \\ \overrightarrow{P_1P_3}}}{\underline{b}}} \quad t, u \in \mathbb{R}$$

$\equiv P_1 + W$

$W = \langle \underline{a}, \underline{b} \rangle$ sottospazio dello spazio vettoriale geometrico ($\cong \mathbb{R}^3$) generato da $\underline{a}$ e $\underline{b}$ $\equiv$ <u>giacitura</u> di π, in senso <u>affine</u>

$\underline{a} = (l, m, n) \neq (0,0,0)$

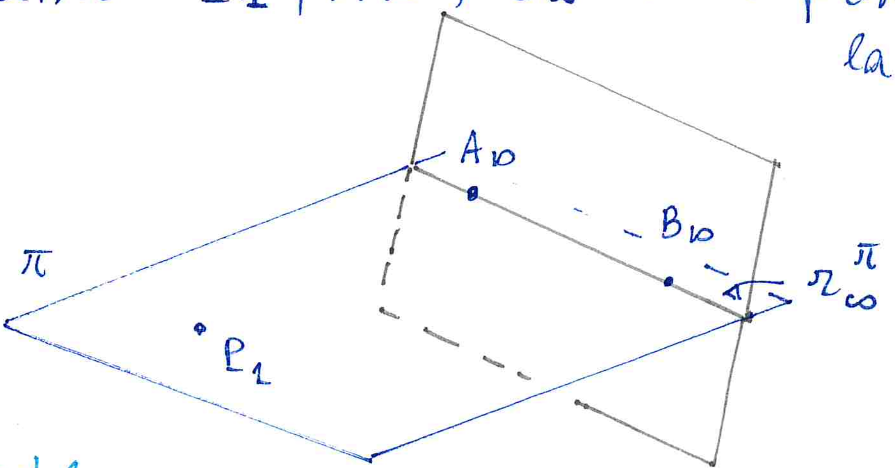
$\underline{b} = (l', m', n') \neq (0,0,0)$

linearmente indipendenti

$$
\begin{array}{ll}
 & 1 = 1 + t \cdot 0 + u \cdot 0 \\
\pi : & \begin{cases} x = x_1 + t \cdot l + u \cdot l' \\ y = y_2 + t \cdot m + u \cdot m' \\ z = z_1 + t \cdot n + u \cdot n' \end{cases}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccccccc}
P & & P_1 & & A_\infty & & B_\infty \\
\begin{bmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} 1 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} & + t & \begin{bmatrix} 0 \\ l \\ m \\ n \end{bmatrix} & + u & \begin{bmatrix} 0 \\ l' \\ m' \\ n' \end{bmatrix}
\end{array}
$$

che mostra come π sia la parte affine del piano proiettivo(+) passante per i punti P_1, A_∞, B_∞ : a questa si aggiunge la retta r^π_∞ che rappresenta la sua giacitura in senso proiettivo



(+) denotato allo stesso modo