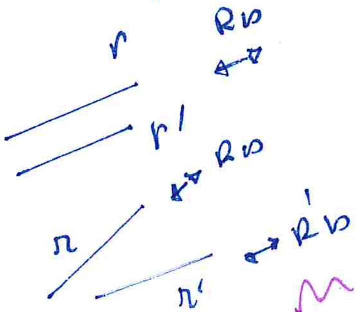
Lezione XII

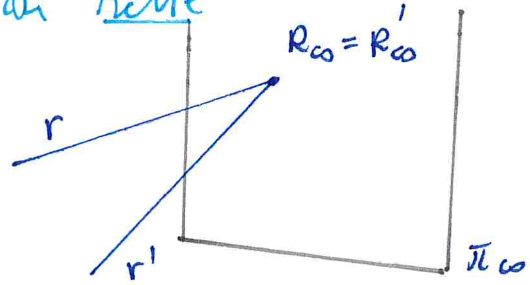
APPROFONDIMENTI DI GEOMETRIA V2

Mauro Spera, Elena Zizioli

* Interpretazione proiettiva di varie proprietà geometriche affini ed euclidee

- parallelismo di rette





$(l\ m\ n) \neq (0,0,0)$
$(l'\ m'\ n') \neq (0,0,0)$
parametri direttori

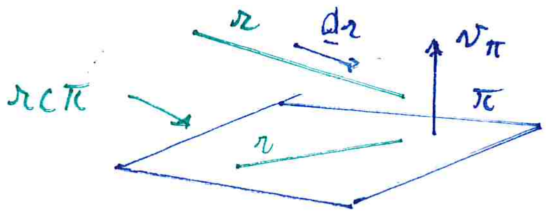
$$R'_\infty = [\,0,\ \underbrace{l',\ m',\ n'}_{\text{par. direttori}}\,] = [\,0,\ l,\ m,\ n\,] = R_\infty$$

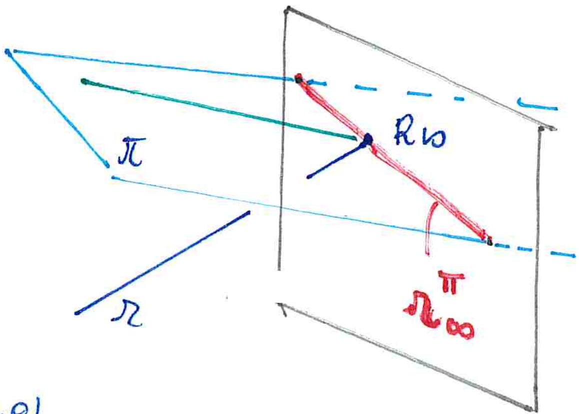
$$\begin{cases} l' = \rho l \\ m' = \rho m \\ n' = \rho n \end{cases} \qquad \rho \neq 0$$

$$\mathrm{rk}\begin{pmatrix} l & m & n \\ l' & m' & n' \end{pmatrix} = 1$$

rango

- parallelismo di rette e piani



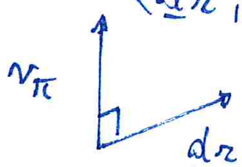


$d_r: (l, m, n) \neq (0,0,0)$

$\pi: \ ax + by + cz + d = 0$

$v_\pi: (a, b, c) \neq (0,0,0)$

(*) $\boxed{al + bm + cn = 0}$ $\qquad \langle d_r, v_\pi \rangle = 0$



interpretazione euclidea

$\{R_\infty \in r^\pi_\infty\}$

v. pagina successiva

interpretazione proiettiva di (✩): $al+bm+cn=0$

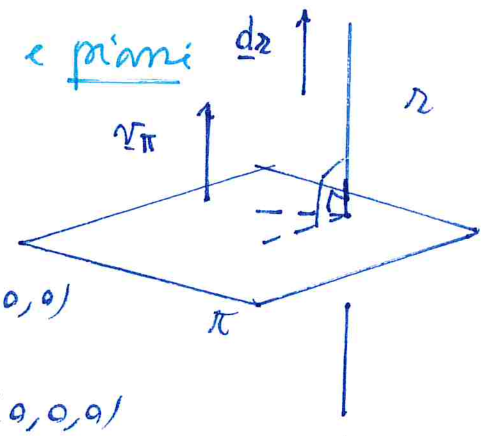
$$\boxed{R_\infty \in r_\infty^\pi}$$

Infatti: $r_\infty^\pi : \begin{cases} a x_1 + b x_2 + c x_3 = 0 \\ x_0 = 0 \end{cases}$

$R_\infty : [0, l, m, n]$

e $R_\infty \in r_\infty^\pi \iff$ vale (✩).

• perpendicolarità tra rette e piani



Nello spazio euclideo reale $\mathbb{E}^3$

$\pi: ax+by+cz+d=0$ $\quad (a,b,c)\neq(0,0,0)$

$r: \begin{cases} x = x_0 + tl \\ y = y_0 + tm \\ z = z_0 + tn \end{cases}$ $\quad (l,m,n)\neq(0,0,0)$

(✩) $\boxed{\pi \perp r} \iff \begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix} = \rho \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \quad \rho \neq 0$

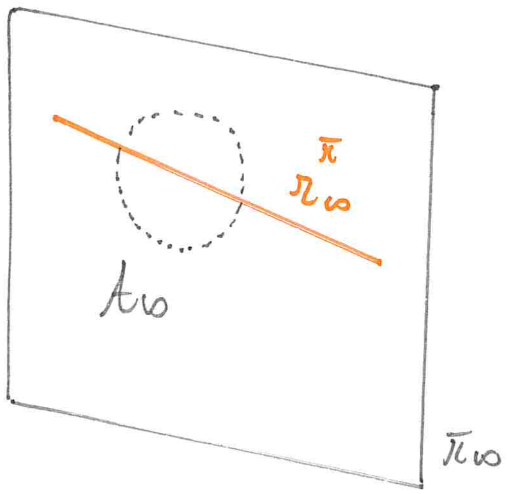
ie $\quad rk\begin{pmatrix} a & b & c \\ l & m & n \end{pmatrix} = 1 \qquad \boxed{d_r = \rho v_\pi}$

consideriamo ora, nel piano improprio $x_0=0$, descritto da coordinate omogenee x_1, x_2, x_3, la conica assoluta o, più brevemente, l'assoluto

A_∞ è una conica immaginaria

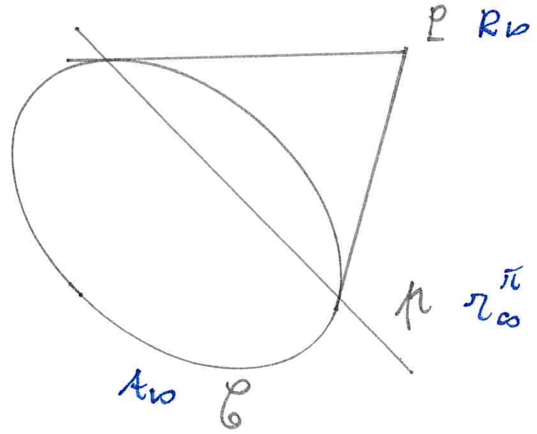
$$A_\infty : \begin{cases} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0 \\ x_0 = 0 \end{cases}$$

vedremo che si tratta di un cono (cono isotropo) di centro l'origine e generatrici immaginarie



π individua, su π_∞, la giacitura $r_\infty^\pi = \pi_\infty \cap \pi$

la direzione di r è fornita dal punto improprio R_∞. Qual è la relazione intercorrente tra R_∞ e r_∞^π?



R: Essi sono polo - polare rispetto all'assoluto

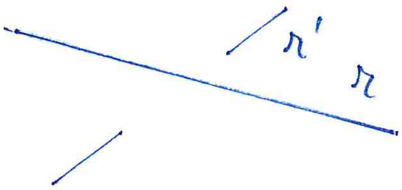
Infatti, sia $R_\infty : [0, l, m, n]$. Troviamone la polare rispetto all'assoluto A_∞:

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ l x_1 + m x_2 + n x_3 = 0 \end{cases}$$

ovvero $\begin{cases} x_0 = 0 \\ a x_1 + b x_2 + c x_3 = 0 \end{cases}$ cioè r_∞^π

in base a (*). Il ragionamento si può invertire e porge la conclusione desiderata. □

- perpendicolarità tra due rette nello spazio



$$\boxed{ll' + mm' + nn' = 0}$$

si interpreta così:

$\Rightarrow$ $\boxed{R'_\infty \in p^{A_\infty}_{R_\infty}}$

e viceversa, per il teorema di reciprocità

polare di R_∞ rispetto a A_∞

** in altre parole: le direzioni R_∞ e R'_∞ sono coniugate rispetto all'assoluto

Infatti:

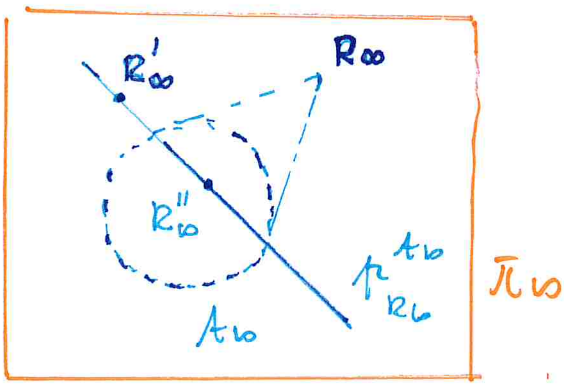
$$(x_1, x_2, x_3)\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}l\\ m\\ n\end{pmatrix} = 0$$

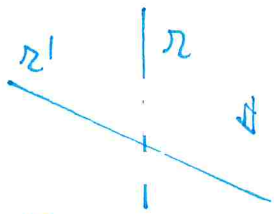
fornisce

$$\boxed{l\cdot x_1 + m\cdot x_2 + n\cdot x_3 = 0}$$

Si pensa il tutto complessificato

R_∞ e $p^{A_\infty}_{R_\infty}$ sono comunque reali





ecc.

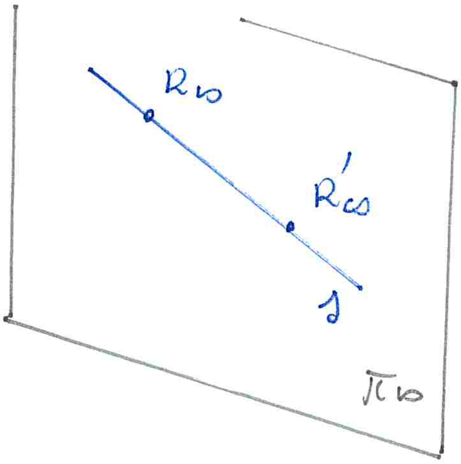
osservazione: nel piano si ha la stessa interpretazione, qualora per assoluto si intenda la coppia dei punti ciclici

$$A_\infty : \begin{cases} x_0 = 0 \\ x_1^2 + x_2^2 = 0 \end{cases}$$

$A_\infty = \{ I, \bar{I} \}$ $\quad I, \bar{I} : [0, 1, \pm i]$

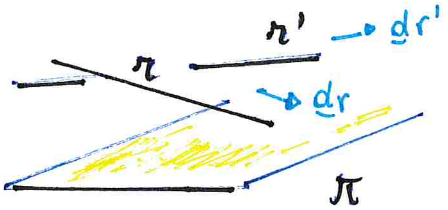
*** In sintesi, le proprietà metriche possono interpretarsi proiettivamente previa introduzione dell'assoluto (Cayley)

Esempio: interpretiamo la seguente situazione sul piano improprio



$R_\infty \neq R'_\infty$

R: $s \equiv s_\infty^\pi$ è la giacitura di un piano π (e dei piani ad esso paralleli); le rette r e r' (non univocamente determinate!) di direzione R_∞ e R'_∞ sono parallele a π e possono risultare sia incidenti sia sghembe (ma non parallele, altrimenti $R'_\infty = R_\infty$)



Si ricordi a tale proposito che due rette sghembe individuano una giacitura, che si può facilmente individuare

$$\pi: \langle \underline{d}_r \times \underline{d}_{r'}, \underline{r} - \underline{r}_0 \rangle = 0$$

arbitrario

★ Complanarità di due rette nello spazio (affine o proiettivo)

$$r: \begin{cases} a_0 x_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0 & \equiv a^T x \\ b_0 x_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 = 0 & \equiv b^T x \end{cases}$$

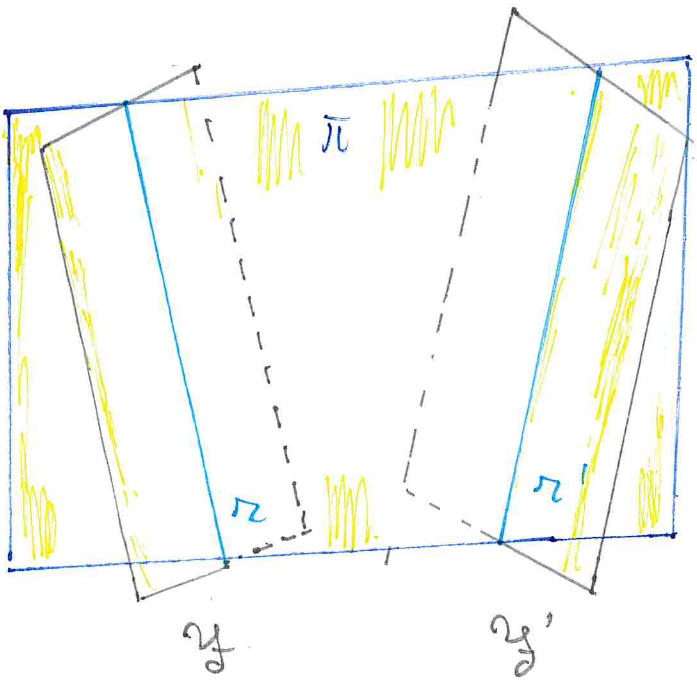
$$r': \begin{cases} a'_0 x_0 + a'_1 x_1 + a'_2 x_2 + a'_3 x_3 = 0 \equiv a'^T x \\ b'_0 x_0 + b'_1 x_1 + b'_2 x_2 + b'_3 x_3 = 0 \equiv b'^T x \end{cases}$$

a^T x

$$x = \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_3 \end{pmatrix} \qquad a = \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_3 \end{pmatrix}$$

$x \neq \underline{0}$ $\quad a \neq \underline{0}$

$\underline{a}, \underline{b}$ l.i.



r e r' risultano complanari se e solo se esiste un piano π comune ai due fasci di piani $\mathcal{Y}$ e $\mathcal{Y}'$ che hanno come sostegno le due rette date. Ciò conduce subito a

$$(\diamond) \quad \boxed{\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ a'_0 & a'_1 & a'_2 & a'_3 \\ b'_0 & b'_1 & b'_2 & b'_3 \end{vmatrix} = 0}$$

Infatti:

$$\boxed{\begin{array}{lll} \mathcal{Y}_r: & (\lambda a^T + \mu b^T)X = 0 & (\lambda, \mu) \neq (0,0) \\ \mathcal{Y}_{r'}: & (\lambda' a'^T + \mu' b'^T)X = 0 & (\lambda', \mu') \neq (0,0) \end{array}}$$

r e r' sono complanari se e solo se, per un'opportuna quaterna $(\lambda, \mu, -\lambda', -\mu') \neq (0 \text{—} 0)$ si ha:

$$\lambda a^T + \mu b^T = \lambda' a'^T + \mu' b'^T \quad , \text{ ovvero}$$

$$\boxed{\begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ a_0' & a_1' & a_2' & a_3' \\ b_0' & b_1' & b_2' & b_3' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda \\ \mu \\ -\lambda' \\ -\mu' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}$$

e ciò accade se e solo se vale $(\diamond)$

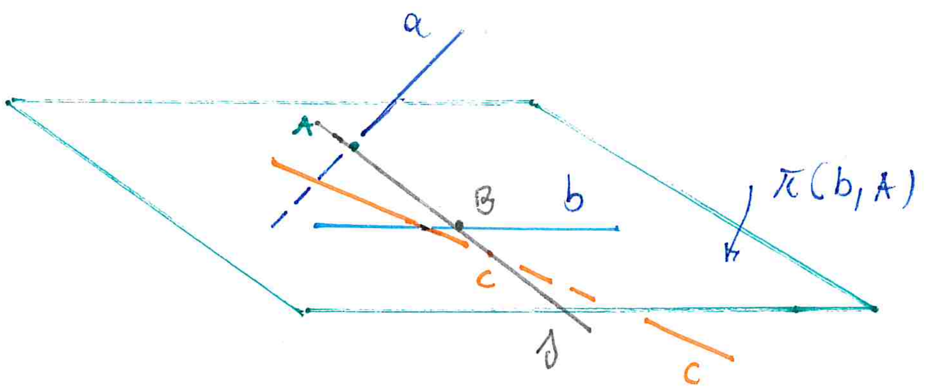
$\square$

Siano date tre rette a, b, c a due a due sghembe e sia $A \in a$. Esiste allora una e una sola retta r per A che si appoggia alle ... tre rette date (ossia le interseca).

<u>Dimostrazione</u>. Sia $\pi(b, A)$ il piano del fascio di asse b contenente A ($A \notin b$ altrimenti a e b risulterebbero incidenti). Il piano π inciderà c in un punto C.

La retta $s = AC$ è complanare con b e pertanto deve intersecarla in un punto B.

s è pertanto la retta cercata.



<u>Anticipazione</u>: al variare di $a \in A$, le rette trovate danno vita ad una quadrica generale a punti iperbolici [è una superficie rigata]