Lezione XIII

APPROFONDIMENTI DI GEOMETRIA V2

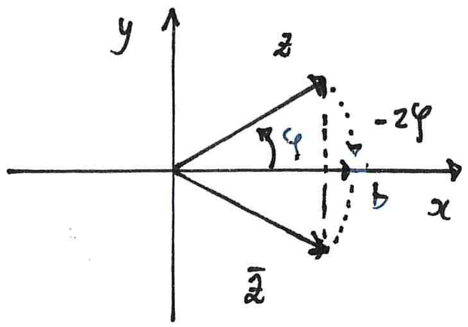
Mauro Spera, Elena Zizioli

★ Rette e piani complessi

Operiamo in $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$. Sia $P : [x_0, x_1, x_2, x_3]$

$\bar{P} : [\bar{x}_0, \bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3]$: punto coniugato di P

La nozione è ben posta poiché $\overline{\lambda z} = \bar{\lambda}\,\bar{z}$



Osserviamo che da $|z| = |\bar{z}|$ segue che

$$\bar{z} = \underbrace{e^{-2\varphi i}}_{\alpha,\ |\alpha|=1} z$$

Si osservi che $b := e^{-i\varphi} z$ è reale

★ P è detto **reale** se $P = \bar{P}$. Ciò equivale a dire che le sue coordinate omogenee si possono scegliere **reali**: $P = \bar{P}$ significa

$x_i = \alpha\, \bar{x}_i$ con α indipendente da $i = 0, \ldots, 3$ ($|\alpha| = 1$)

altrimenti $P \neq \bar{P}$ è detto **immaginario**

Esempio: $P : [i, 2i, 0, -i] = [1, 2, 0, -1]$ è reale

si moltiplica per $-i$ $\qquad i^2 = -1$

Sia dato un piano $\pi : \sum_{i=0}^{3} a_i x_i$ $\quad (a_i) \neq (0-0)$

* il piano coniugato $\bar{\pi}$ è : $\sum_{i=0}^{3} \bar{a}_i x_i = 0$

È chiaro che $P \in \pi \iff \bar{P} \in \bar{\pi}$.

* π è detto reale se i coefficienti di π (definiti a meno di un fattore di proporzionalità non nullo) possono essere scelti reali.

Le considerazioni precedenti consentono di concludere che

$$\boxed{\pi \text{ è reale} \iff \pi = \bar{\pi}}$$

* Data una retta $r : \begin{cases} \sum_{i=0}^{3} a_i x_i = 0 & \pi \\ \sum_{i=0}^{3} a'_i x_i = 0 & \pi' \end{cases}$

$(a_i) \neq (0-0)$

$(a'_i) \neq (0,0)$ $\qquad r = \pi \cap \pi'$

(a_i), (a'_i) non proporzionali (i.e. l.i.) $\qquad$ la retta $\bar{r} = \bar{\pi} \cap \bar{\pi}'$,

$$\bar{r} : \begin{cases} \sum_{i=0}^{3} \bar{a}_i x_i = 0 \\ \sum_{i=0}^{3} \bar{a}_i' x_i = 0 \end{cases}$$

è detta retta coniugata di r

r è detta reale se π, π' possono essere scelti reali

È subito visto che $\boxed{r \text{ è reale} \iff r = \bar{r}}$

Inoltre $\boxed{r \text{ è \underline{reale}} \iff \text{possiede almeno \underline{due} punti reali}}$

($\Rightarrow$) è chiara; quanto a ($\Leftarrow$), scritta l'equazione parametrica di r $\quad P = \lambda P_1 + \mu P_2$, $\quad$ con λ, μ reali

la loro eliminazione conduce a $r = \pi \cap \pi'$ con π, π' reali.

<u>Osservazione</u>: una retta reale contiene sempre punti <u>immaginari</u> (ovvio, $P \neq \bar{P}$)

* Una <u>retta immaginaria</u> possiede <u>al più</u> un <u>punto reale</u>. Infatti:

- se $r \neq \bar{r}$, e <u>se r e $\bar{r}$ sono complanari</u>, allora $P = r \cap \bar{r}$ è necessariamente reale:

$$\bar{P} = \bar{r} \cap \bar{\bar{r}} = \bar{r} \cap r = P.$$

Non ce ne può essere un secondo, altrimenti r sarebbe reale. In questo caso r è detta di <u>prima specie</u>

- se $r \neq \bar{r}$ e se r e $\bar{r}$ sono sghembe, allora non hanno punti in comune.

Rette siffatte esistono (v. oltre per un esempio) e sono dette di <u>seconda specie</u>.

Dato P immaginario $(P \neq \bar{P})$,

la retta $r = P\bar{P}$ è reale. Infatti

$$\bar{r} = \bar{P}\bar{\bar{P}} = \bar{P}P = r .$$

Osserviamo che i punti $P+\bar{P}$ e $P-\bar{P}$ $(\in r)$

sono reali

$$P+\bar{P} = [\, x_i^{(P)} + \bar{x}_i^{(P)} = 2\,\mathrm{Re}\, x_i^{(P)}] = [\, \underbrace{\mathrm{Re}\, x_i^{(P)}}_{\cap\, \mathbb{R}}]$$

$$P-\bar{P} = [\, x_j^{(P)} - \bar{x}_j^{(P)} = 2i\,\mathrm{Im}\, x_j^{(P)}] = [\, \underbrace{\mathrm{Im}\, x_j^{(P)}}_{\cap\, \mathbb{R}}]$$

$z = x + iy$
$\bar{z} = x - iy$
$z + \bar{z} = 2x = 2\,\mathrm{Re}\, z$
$z - \bar{z} = 2iy = 2i\,\mathrm{Im}\, z$

Dunque, per P immaginario passa una e una sola retta reale, la $P\bar{P} =: r = \bar{r}$

Se ve ne fosse un'altra, $s = \bar{s}$, $s \neq r$, $P = r \cap s$ e

$\bar{P} = \bar{r} \cap \bar{s} = r \cap s = P$, contro l'ipotesi.

★ Per una retta immaginaria ($r \neq \bar{r}$)
passa al più un piano reale :

Se $\alpha = \bar{\alpha} \supset r$, è pure $\alpha \supset \bar{r}$
piano reale

$\Rightarrow$ r e $\bar{r}$ devono risultare complanari , e
r è di prima specie, con un sol punto reale
α è necessariamente il piano che le contiene . Se
r e $\bar{r}$ sono sghembe , nessun piano può contenerle.
r è di seconda specie

★ Un piano immaginario $\alpha \neq \bar{\alpha}$
ammette un'unica retta reale :

Se $r \subset \alpha$, è pure $\bar{r} \subset \bar{\alpha}$. Se
r è reale , $r = \bar{r}$ e quindi, necessariamente,
$r = \alpha \cap \bar{\alpha}$. Se $\alpha \supset s = \bar{s}$,
$\bar{\alpha} \supset s$ e $s = \alpha \cap \bar{\alpha} = r$.

Esempi

① $r: \begin{cases} i x_0 + x_1 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$

$\bar{r}: \begin{cases} -i x_0 + x_1 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$

$r \neq \bar{r}$, e r e $\bar{r}$ sono complanari

r è di prima specie

Determiniamone l'intersezione $P = r \cap \bar{r}$

$$\begin{cases} 2x_1 = 0 \\ 2i x_0 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_0 = 0 \\ x_1 = 0 \\ x_2 = x_3 \end{cases} \Rightarrow P: [0, 0, 1, 1]$$

(l'unico punto reale di entrambe)

② $r: \begin{cases} i x_0 + x_1 = 0 \\ x_2 + i x_3 = 0 \end{cases}$

$\bar{r}: \begin{cases} -i x_0 + x_1 = 0 \\ x_2 - i x_3 = 0 \end{cases}$

Risolvendo il sistema direttamente si vede subito che $x_0 = x_1 = x_2 = x_3 = 0$, che non è accettabile

Controlliamo la condizione di complanarità $| \quad | = 0$

$$\begin{vmatrix} i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & i \\ -i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -i \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} i & 1 & 0 & 0 \\ -i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & i \\ 0 & 0 & 1 & -i \end{vmatrix} = (-2i)(-2i) =$$

$$= 4i^2 = -4 \neq 0$$

$\Rightarrow$ r e $\bar{r}$ sono sghembe

(r è di seconda specie)

③ Sia $\alpha: (1+i)x_0 + x_1 + x_2 + i x_3 = 0$

$(\alpha \neq \bar{\alpha})$. Determiniamo l'unica retta reale di α:

deve essere $r = \alpha \cap \bar{\alpha}$

$$r: \begin{cases} (1+i)x_0 + x_1 + x_2 + i x_3 = 0 \\ (1-i)x_0 + x_1 + x_2 - i x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \cancel{2}x_0 + \cancel{2}x_1 + \cancel{2}x_2 = 0 \\ \cancel{2i}x_0 + \cancel{2i}x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow r: \begin{cases} x_0 + x_1 + x_2 = 0 \\ x_0 + x_3 = 0 \end{cases}$$

(e, come è giusto che sia, r è stata espressa come intersezione di due piani reali)

Variante:

$$\alpha: \quad x_0 + x_1 + x_2 + i(x_0 + x_3)$$

$$\alpha \in \mathcal{F}: \quad \underbrace{x_0 + x_1 + x_2}_{\pi_1} + \underset{\lambda \in \mathbb{C}}{\lambda} (\underbrace{x_0 + x_3}_{\pi_2})$$

fascio di piani generato da π_1 e π_2 (reali)

descrizione affine

La retta cercata è allora l'asse di $\mathcal{F}$

$$r: \begin{cases} x_0 + x_1 + x_2 = 0 \\ x_0 + x_3 = 0 \end{cases}$$

④ Determiniamo $r = PQ$, con

$P: [0, i, 1, 0]$

$Q: [0, 2+i, 0, 1]$

<u>Soluzione</u> $r \in \pi_\infty$, pertanto possiamo leggerla come intersezione di π_∞ con il piano

$\pi: OPQ$ [o un generico piano del fascio da questa individuato]

per semplicità

(†) r è di <u>prima</u> <u>specie</u> poiché è complanare con $\bar{r}$ (entrambe giacciono sul piano improprio. Si trova facilmente $R = r \cap \bar{r} = [0, 2, -1, 1]$

$$\pi: \begin{array}{c} \\ O \to \\ P \to \\ Q \to \end{array} \begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 1 & 0 \\ 0 & 2+i & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\|$$

$$(-1)\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ i & 1 & 0 \\ 2+i & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ i & 1 & 0 \\ 2+i & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Proseguendo:

$$x_1 \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}}_{1} - x_2 \underbrace{\begin{vmatrix} i & 0 \\ 2+i & 1 \end{vmatrix}}_{i} + x_3 \underbrace{\begin{vmatrix} i & 1 \\ 2+i & 0 \end{vmatrix}}_{-(2+i)} = 0$$

$$\Rightarrow \quad r: \begin{cases} x_1 - i x_2 - (2+i) x_3 = 0 \\ x_0 = 0 \end{cases}$$

r è di prima o seconda specie?
v. (†)