Lezione XIV

APPROFONDIMENTI DI GEOMETRIA V2

Mauro Spera, Elena Zizioli

★ Superficie algebriche reali

Un **polinomio** $F = F(x_0, x_1, x_2, x_3)$ di **grado** $n \geq 1$ (notazione : $\deg F$) – a coefficienti **reali** (ma ciò non è restrittivo) si dice **omogeneo** se, $\forall \lambda \in \mathbb{C}$, risulta

$$\boxed{F(\lambda x_0, \lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3) = \lambda^n F(x_0, x_1, x_2, x_3)}$$

Si noti, in particolare, che $F(0,0,0,0) = 0$

★★ Una **superficie algebrica reale** Σ è il luogo dei punti di $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ individuato dalle **autosoluzioni** di

$$F(x_0, x_1, x_2, x_3) = 0$$

può non risultare reale

(ovvero, si richiede $(x_0, x_1, x_2, x_3) \neq (0,0,0,0)$: quest'ultima quaterna non individua un punto di $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$)

dove F è un polinomio a coefficienti reali, **omogeneo** e **non costante** ($\deg F \geq 1$). $\deg F$ è l'**ordine** di Σ.

Tale nozione è ben posta grazie all'omogeneità di F

$$F(\lambda x_0 - \lambda x_3) = \lambda^n F(x_0 - x_3) = 0$$

⋙ Scriviamo $\Sigma : F = 0$ e, talvolta, più succintamente, $\Sigma = 0$

Notiamo che F e ξF $(\xi \in \mathbb{R}, \xi \neq 0)$ individuano la stessa superficie Σ.

Una superficie algebrica reale è detta riducibile se

$$\boxed{F(x_0 - x_3) = \prod_{j=1}^{\ell} \{F_j(x_0 - x_3)\}^{m_j}}$$

polinomi omogenei a coefficienti reali

$\deg F_j \geq 1$

$$\boxed{\sum_{j=1}^{\ell} m_j \underbrace{\deg F_j}_{\text{ordine di } \Sigma_j} = n = \underbrace{\deg F}_{\text{ordine di } \Sigma}}$$

Le superficie algebriche $\Sigma_j : F_j = 0$ sono dette componenti di Σ e vanno contate con molteplicità m_j (≥ 1) [dal punto di vista meramente insiemistico $\Sigma = \bigcup_j \Sigma_j$]

In caso contrario, Σ è detta irriducibile

Esempi: • se $n = 1$ si hanno i piani (reali)

$$\sum_{i=0}^{3} a_i x_i = 0 \qquad (a_0 - a_3) \neq (0 - 0)$$

(automaticamente irriducibili)

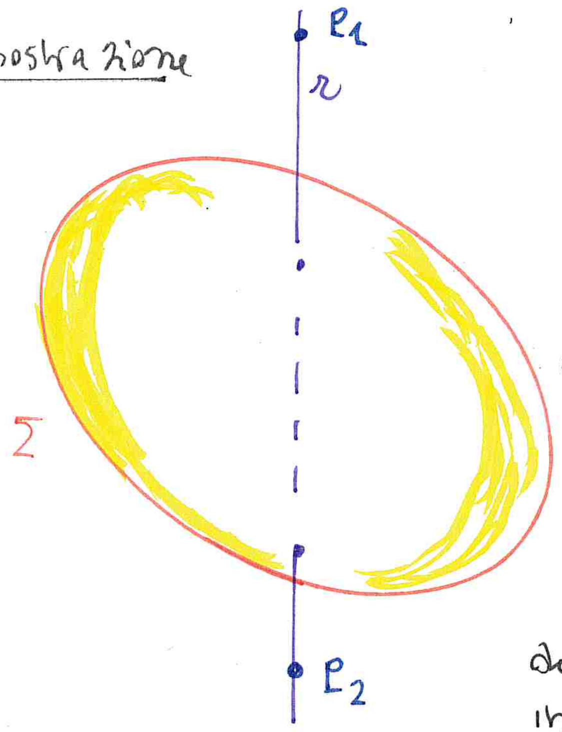
• per $n = 2$ si hanno le quadriche (reali)

una quadrica è riducibile qualora si spezzi in due piani, distinti o coincidenti.

I° teorema sull'ordine

L'ordine di una superficie algebrica reale $\Sigma : F=0$ — $n = \deg F$ — eguaglia il numero delle intersezioni di una retta <u>generica</u> con Σ, contate con le loro <u>molteplicità</u>

<u>Dimostrazione</u>



Sia r una retta non contenuta in Σ (i.e. generica)
Essa sarà descritta da un'equazione parametrica

$$(\diamond) \quad \boxed{r: \quad x_i = \lambda x_i^{(1)} + \mu x_i^{(2)}}$$

$i = 0, 1, 2, 3 \qquad (\lambda, \mu) \neq (0,0)$

con $(x_i^{(1)})$, $(x_i^{(2)})$ coordinate (omogenee) di due punti P_1 e P_2 che la individuino (v. figura)

Sostituendo $(\diamond)$ in $F=0$ si trova un'<u>equazione</u> <u>polinomiale</u>

$$F(\lambda, \mu) = 0 \qquad \text{[abuso di notazione]}$$

con F ancora <u>omogeneo</u> <u>di grado n</u> in λ, μ.

Esplicitamente:

$$\sum a_j \lambda^{n-j} \mu^j = 0 \qquad (\star)$$

Se la $(\star)$ è identicamente soddisfatta, $r \subset \Sigma$, il che è stato escluso.

- Sia $a_0 \neq 0$. In questo caso $(\lambda, 0)$, $\lambda \neq 0$ non è soluzione di (*) e pertanto si può dividere per μ^n $(\neq 0)$ e scrivere l'equazione nella forma

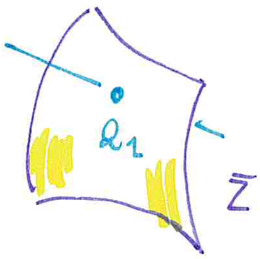
$$\boxed{\sum_{j=0}^{n} a_j \Big(\underbrace{\frac{\lambda}{\mu}}_{\equiv\, \xi}\Big)^{n-j} = 0} \qquad \boxed{\sum_{j=0}^{n} a_j \xi^{n-j} = 0}$$

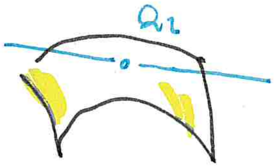
In virtù del teorema fondamentale dell'algebra (TFA) (unito al teorema di Ruffini), si ha

$$0 = \sum_{j=0}^{n} a_j \xi^{n-j} = \underset{\neq 0}{a_0} \prod_k (\xi - \xi_k)^{m_k}, \quad \sum_k m_k = n$$

radici complesse, contate con la loro molteplicità

Sia allora $Q_1 = (\xi_1 x_i^{(1)} + x_i^{(2)}) \in r \cap \Sigma$:





esso va contato con molteplicità m_1; lo stesso dicasi per gli altri. In definitiva, otteniamo n punti di intersezione (contati con le loro molteplicità).

- Sia ora, in generale, $0 = a_0 = a_1 = \dots = a_{k-1} = 0$, $a_k \neq 0$

L'equazione precedente diventa

$$\sum_{j=k}^{n} a_j \lambda^{n-j} \mu^{j} = \mu^k \cdot \sum_{j=k}^{n} a_j \lambda^{n-j} \mu^{j-k} = 0$$

Ciò significa che il punto P_1, corrispondente a $\mu = 0$, appartiene a $\Sigma \cap r$ con molteplicità k, ciò che non accadeva nel caso precedente ($P_1 \notin \Sigma$)

Rimane successivamente l'equazione

$$a_k \lambda^{n-k} + \dots + a_n \mu^{n-k} = 0$$

dove $a_k \neq 0$, alla quale possiamo pertanto applicare il ragionamento precedente, e che ci fornisce $n-k$ intersezioni ulteriori. In totale, abbiamo di nuovo n intersezioni.

Il teorema è così interamente dimostrato. $\square$

Dunque, il concetto di ordine di Σ, definito per via algebrica, acquista un significato geometrico.

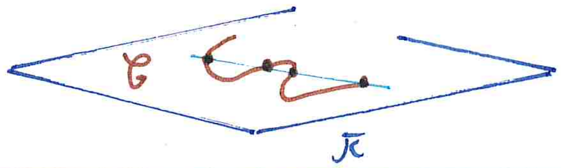
★ una curva algebrica reale $\mathscr{C}$ in $\mathbb{R}^3(\mathbb{C})$ è l'intersezione (contata con molteplicità) di due superficie algebriche reali Σ_1 e Σ_2 distinte e non contenute l'una nell'altra

Rinunciamo, in virtù del carattere elementare del presente corso, ad un approccio più elevato

Una retta reale è una curva algebrica reale (infatti si può ottenere come intersezione di due piani reali)

Se $\mathscr{C} \subset \pi$ (π piano), è detta curva piana

★ L'ordine di una curva algebrica piana $\mathscr{C}$ è definito come il numero di intersezioni di $\mathscr{C}$ con una retta generica del piano che la contiene, contate, al solito, con la loro molteplicità.



Sussiste il

II° teorema sull'ordine

Data una superficie algebrica reale Σ di ordine n e un piano α che non sia componente di Σ, la curva piana $\mathscr{C} = \Sigma \cap \alpha$ ha ordine n.

<u>Dimostrazione</u>. Siano Σ: $F=0$, α: $\sum_{i=0}^{3} a_i x_i = 0$

$(a_i) \neq (0-0)$

$$\mathcal{C}: \begin{cases} F=0 \\ \sum_{i=0}^{3} a_i x_i = 0 \end{cases}$$

Sia ora $r \subset \alpha$ (retta ind.) generica

$$r: \begin{cases} a_0 x_0 + \dots + a_3 x_3 = 0 \\ b_0 x_0 + \dots b_3 x_3 = 0 \end{cases}$$

$(b_i) \neq (0-0)$

con $\operatorname{rk}\begin{pmatrix} a_0 & - a_3 \\ b_0 & - b_3 \end{pmatrix} = 2$

$$\mathcal{C} \cap r = \begin{cases} F=0 \\ \sum_i a_i x_i = 0 \\ \sum_i b_i x_i = 0 \end{cases} = \Sigma \cap r$$

Scrivendo r in forma parametrica, ci si riconduce al I° teorema sull'ordine.

Pertanto r interseca $\mathcal{C}$ in n punti, contati con la loro molteplicità, ossia, $\mathcal{C}$ ha ordine n.

$\square$