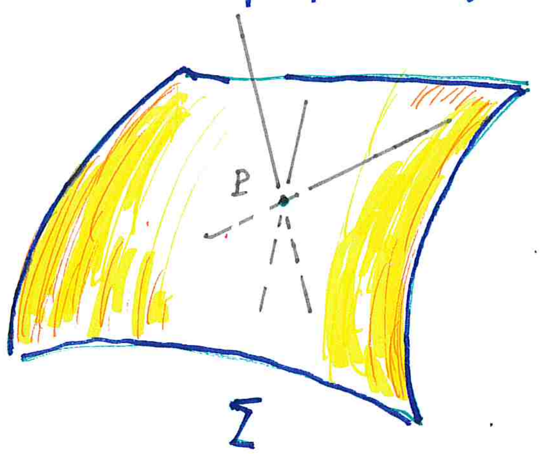
APPROFONDIMENTI DI GEOMETRIA V2

Mauro Spera, Elena Zizioli

★ Punti semplici e singolari delle superficie algebriche reali



Σ

Σ : superficie algebrica reale

$P \in \mathbb{P}^3(\mathbb{C})$

Definiamo molteplicità di Σ in P, $m_P(\Sigma)$ nel modo seguente

Consideriamo la stella delle rette per P, $\mathcal{S}_P$

Si escludano da questa le rette $r \subset \Sigma$.

Si intersechi r con Σ, e si determini il minimo della molteplicità di intersezione, in P, al variare di r in $\mathcal{S}_P$ (escludendo le ulteriori intersezioni di r con Σ)

Dunque

$$\boxed{m_P(\Sigma) = \min_{\substack{r \in \mathcal{S}_P \\ r \not\subset \Sigma}} \overset{\text{cardinalità}}{\#}\underbrace{(r,\Sigma)_P}_{\text{il punto } P \text{ viene contato con la propria molteplicità}}}$$

$m_P(\Sigma) = 0$ se e solo se $P \notin \Sigma$

$m_P(\Sigma) \geq 1$ se e solo se $P \in \Sigma$ e ovviamente $m_P(\Sigma) \leq n$.

- P semplice : $m_P(\Sigma) = 1$
- P singolare $m_P(\Sigma) > 1$

$m_P(\Sigma) = 2$: punto doppio

$m_P(\Sigma) = 3$: punto triplo

ecc.

Inciso

Sia $f \in \mathbb{C}[z]$ un polinomio complesso, di variabile complessa, di grado $n \geq 1$

★ f coincide col suo sviluppo di Taylor centrato in un qualsiasi $\alpha \in \mathbb{C}$:

$$\boxed{f(z) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(\alpha)}{k!} (z-\alpha)^k}$$

Si vede dunque subito che

α è una radice di f [ossia $f(\alpha)=0$] di molteplicità $h \geq 1$ se e solo se

$$f(\alpha) = f'(\alpha) = \dots f^{(h-1)}(\alpha) = 0, \quad f^{(h)}(\alpha) \neq 0$$

$' = \frac{d}{dz}$

Nota: la derivata di un polinomio $p(x)$ (x indeterminata qualsiasi) può essere introdotta in modo formale a partire da $x' = 1$ e imponendo la linearità e la regola di Leibniz: $(fg)' = f'g + fg'$ sicché $(x^n)' = n x^{n-1}$ ecc.

In particolare, α è semplice se e solo se $f(\alpha) = 0$, $f'(\alpha) \neq 0$, è doppio se e solo se $f(\alpha) = f'(\alpha) = 0$ ma $f''(\alpha) \neq 0$

Questo risultato è di importanza cruciale: il suo mancato utilizzo imporrebbe applicazioni successive del teorema di Ruffini

$f(\alpha) = 0 \Rightarrow f(z) = (z-\alpha)\, g(z)$; se $g(\alpha) = 0$, $g(z) = (z-\alpha)\, h(z)$ ecc...

Teorema Sia $\Sigma : F = F(x_0, x_1, x_2, x_3) = 0$ una superficie algebrica reale e sia $P \in \Sigma$

Allora ① P è semplice $\iff$
$$\left(\frac{\partial F}{\partial x_0}(P) - \frac{\partial F}{\partial x_3}(P) \right) \neq (0 - 0)$$

Equivalentemente

② P è singolare $\iff$ $\left(\frac{\partial F}{\partial x_0}(P) - \frac{\partial F}{\partial x_3}(P) \right) = (0 - 0)$

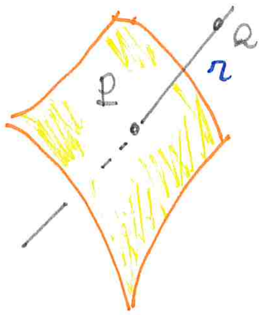
Dimostrazione Proviamo ②

Sia $P : [p_0 - p_3] \in \Sigma$ $(p_0 - p_3) \neq (0 - 0)$

Consideriamo una retta generica per P e intersechiamola con Σ

sia essa PQ, $Q \neq P$

$Q : [q_0 - q_3]$ $(q_0 - q_3) \neq (0 - 0)$



$$r = PQ : \begin{cases} x_i = \lambda p_i + \mu q_i & (\lambda, \mu) \neq (0,0) \\ i = 0, - 3 \end{cases}$$

$\mu = 0$ (sicché $\lambda \neq 0$) corrisponde a P

$\lambda = 0$ ($\mu \neq 0$) corrisponde a Q

Scriviamola in forma affine, per comodità.

$$\boxed{x_i = p_i + t q_i}$$

$t = 0 \rightsquigarrow P$
$t = \infty \sim Q$

Esaminiamo, localmente $\Sigma \cap r$: $\begin{cases} F = 0 \\ x_i = p_i + t q_i \end{cases}$

sostituiamo

Sostituendo la seconda equazione nella prima si ottiene un polinomio $F = F(t) = F(p + tq)$ [abuso di notazione]

$\Sigma \ni P$ è singolare $\Leftarrow\Rightarrow$ la radice $t=0$ ($F(0)=0$ poiché $P\in\Sigma$)
è almeno doppia $\Leftarrow\Rightarrow$ $F'(0)=0$.

Ma, in virtù del teorema di derivazione delle funzioni composte, è

$$\boxed{F'(t) = \frac{\partial F}{\partial x_0}\underbrace{\frac{dx_0}{dt}}_{q_0} + \frac{\partial F}{\partial x_1}\underbrace{\frac{dx_1}{dt}}_{q_1} + \frac{\partial F}{\partial x_2}\underbrace{\frac{dx_2}{dt}}_{q_2} + \frac{\partial F}{\partial x_3}\underbrace{\frac{dx_3}{dt}}_{q_3} = \sum_{i=0}^{3} \frac{\partial F}{\partial x_i} q_i}$$

e pertanto

$$F'(0)=0 \Leftarrow\Rightarrow \sum_{i=0}^{3} \frac{\partial F}{\partial x_i}(P)\, q_i$$

che, per l'arbitrarietà di $Q \neq P$ (e di r),

porge $$\frac{\partial F}{\partial x_i}(P) = 0 \quad \forall\, i=0,\dots 3$$ $\square$

** Identità di Eulero

vale in generale

Sia $F = F(x_0 .. x_3)$ omogeneo di grado n

$$\boxed{F(t x_0 \_ t x_3) = t^n F(x_0 \_ x_3)}$$

Derivando rispetto a t si ha

$$\sum_{i=0}^{3} \frac{\partial F}{\partial x_i}(t x_i) \cdot t = n\, t^{n-1} F(x_0 - x_3)$$

Ponendo $t = 1$, si ha

$$\boxed{\sum_{i=0}^{3} x_i \frac{\partial F}{\partial x_i} = n\, F}$$

identità di Eulero

di uso continuo.

* Piano tangente a Σ in un suo punto semplice P

Sia $P \in \Sigma$ semplice. Consideriamo il piano

$$\boxed{\tau_P : \quad \sum_{i=0}^{3} \frac{\partial F}{\partial x_i}(P)\, x_i = 0}$$

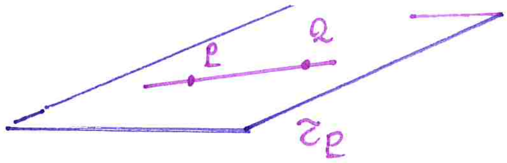
[È ben definito]

$\tau_P \ni P$ (chiaro dall'identità di Eulero)

* τ_P: piano tangente a Σ in P

La terminologia è geometricamente giustificata dalle considerazioni seguenti:

Sia $Q \in \tau_P$ $\quad Q \neq P$



si ha $\boxed{\sum_{i=0}^{3} \frac{\partial F}{\partial x_i}(P)\, q_i = 0}$

e pertanto la retta PQ ha almeno due intersezioni con Σ riunite in P (potrebbe anche essere interamente contenuta in Σ)

In dettaglio: $F(t) = F(P + tQ) =$ [intersechiamo PQ con Σ]

$$= F(0) + t\, F'(0) + \frac{t^2}{2} F''(0) + \dots$$

$$= \underset{\substack{\parallel \\ 0}}{F(P)} + t\left(\sum_{i=0}^{3} \frac{\partial F}{\partial x_i}(P)\, q_i\right) + t^2(\quad) + \dots = 0$$

$t = 0$ (corrispondente a P) è radice almeno doppia $\iff$ $\sum_{i=0}^{3} \frac{\partial F}{\partial x_i}(P)\, q_i = 0$

ovvero $\iff$ $Q \in \tau_P$

In definitiva $\underset{\neq P}{Q} \in \tau_P \iff$ la retta PQ possiede almeno due intersezioni con Σ riunite in P.

Facciamo ora vedere che la definizione testè data di piano tangente coincide, limitatamente alle superficie algebriche reali, con quella data per una generica superficie (liscia) nello spazio descritta in forma implicita $f(x,y,z)=0$

Si aveva $P_0 \in \Sigma$

$$\boxed{\tau_{P_0}: \quad f^0_x (x-x_0) + f^0_y (y-y_0) + f^0_z (z-z_0) = 0}$$

$f^0_x = f^0_x(P_0)$ ecc. (si assume $\nabla f(P) \neq 0$ $\forall P \in \Sigma$)

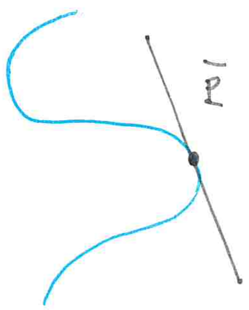
Per comodità verifichiamo il tutto nel caso delle curve piane (e considerando le corrispondenti nozioni di retta tangente

Partiamo dunque da $\mathcal{C}: \; f(x,y)=0$

polinomio di grado n in x e y (non necessariamente omogeneo)

Siano $x = \dfrac{x_1}{x_0}$ $\quad y = \dfrac{x_2}{x_0}$ $\quad x_0 \neq 0$ (momentaneamente)

$\bar{P}: (\bar{x}, \bar{y})$, $f(\bar{x},\bar{y})=0$



Poniamo $\bar{f}_x := f_x(\bar{P})$ ecc.

$$\tau_{\bar{P}} : \quad \boxed{\bar{f}_x (x-\bar{x}) + \bar{f}_y (y-\bar{y}) = 0} \quad (\star)$$

retta tangente a $\mathcal{C}$ in $\bar{P}$

L'equazione $f=0$ diventa $F(x_0,x_1,x_2)=0$

F è omogeneo di grado n e

$$\boxed{F(x_0,x_1,x_2) = x_0^n f(x,y)}$$

Esempio: $f(x,y) = x^2 + y + 1 = 0$

$$\underbrace{x^2 + y + 1}_{f} = \frac{x_1^2}{x_0^2} + \frac{x_2}{x_0} + 1 \Rightarrow$$

$$x_0^2\, f(x,y) = x_1^2 + x_0 x_2 + x_2^2 \equiv F(x_0, x_1, x_2)$$

Calcoliamo: $F(x_0,x_1,x_2) = x_0^n f\left(\frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0}\right)$

$$\boxed{\frac{\partial F}{\partial x_0}} = n\, x_0^{n-1} f + x_0^n \frac{\partial f}{\partial x} \cdot x_1 \cdot \left(-\frac{1}{x_0^2}\right)$$

[ricavata per completezza]

$$+ x_0^n \frac{\partial f}{\partial y} \cdot x_2 \cdot \left(-\frac{1}{x_0^2}\right) =$$

$$= n x_0^{n-1} f - x_0^{n-2} \boxed{(x_1 f_x + x_2 f_y)}$$

$$\boxed{\frac{\partial F}{\partial x_1}} = x_0^n \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{1}{x_0} = \boxed{x_0^{n-1} f_x}$$

$$\boxed{\frac{\partial F}{\partial x_2}} = \boxed{x_0^{n-1} f_y}$$

Da $f(\bar{P}) = 0$ e dal teorema di Eulero si ha

$$(\diamond) \quad \bar{F}_{x_0} \cdot \bar{x}_0 + \bar{F}_{x_1} \cdot \bar{x}_1 + \bar{F}_{x_2} \cdot \bar{x}_2 = 0$$

$\bar{F}_{x_0} \equiv \frac{\partial F}{\partial x_0}(\bar{P})$

La ($\star$) può allora scriversi così:

$$\left(\frac{x_1}{x_0} - \frac{\bar{x}_1}{\bar{x}_0}\right) \bar{F}_{x_1} + \left(\frac{x_2}{x_0} - \frac{\bar{x}_2}{\bar{x}_0}\right) \bar{F}_{x_2} = 0$$

$\Leftarrow$

$$\frac{x_1}{x_0}\,\bar{F}_{x_1} + \frac{x_2}{x_0}\,\bar{F}_{x_2} = \frac{\bar{x}_1}{\bar{x}_0}\,\bar{F}_{x_1} + \frac{\bar{x}_2}{\bar{x}_0}\,\bar{F}_{x_2}$$

$$= -\,\bar{F}_{x_0} \qquad (\text{in virtù di } (\star))$$

In definitiva, moltiplicando per $x_0 \neq 0$, si trova

$$(\star\star) \qquad \boxed{\bar{F}_{x_0}\cdot x_0 + \bar{F}_{x_1}\cdot x_1 + \bar{F}_{x_2}\cdot x_2 = 0}$$

come desiderato. $\square$

<u>Osservazione</u>: L'espressione $(\star)$ è più generale, ma vale solo per i punti propri; la $(\star\star)$ vale per le curve algebriche piane, ma può essere utilizzata sull'intero piano proiettivo.

Analogo discorso per le superficie (è in gioco la variabile aggiuntiva x_3, ma la struttura dei calcoli è la medesima)