Lezione XV

APPROFONDIMENTI DI GEOMETRIA V2

Mauro Spera, Elena Zizioli

★ Una quadrica (reale) è una superficie algebrica reale del second'ordine (notazione: Q)

$$\boxed{Q: \quad \sum_{i,j=0}^{3} a_{ij}x_i x_j = 0 \qquad a_{ij} = a_{ji} \in \mathbb{R}}$$

In forma matriciale $\left(A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & a_{03} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{30} & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad \underline{0} \neq X = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad (x_i) \neq (0 - 0) \right)$

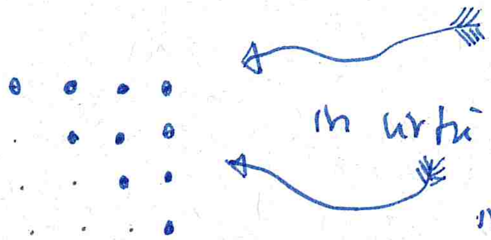
$$\boxed{Q: \quad X^T A X = 0}$$

$$\underbrace{\boxed{X^T}}_{(1\times 4)} \underbrace{\boxed{A}}_{(4\times 4)} \underbrace{\boxed{X}}_{(4\times 1)} = 0$$

A è simmetrica: $\boxed{A^T = A}$

Una quadrica dipende da 9 parametri effettivi (le quadriche sono ∞^9): i coefficienti sono

$1+2+3+4 = 10 \quad \left(= \frac{5\cdot 4}{2}\right)$



in virtù della simmetria di A ma sono individuati a meno di una costante di proporzionalità non nulla: $9 = 10 - 1$

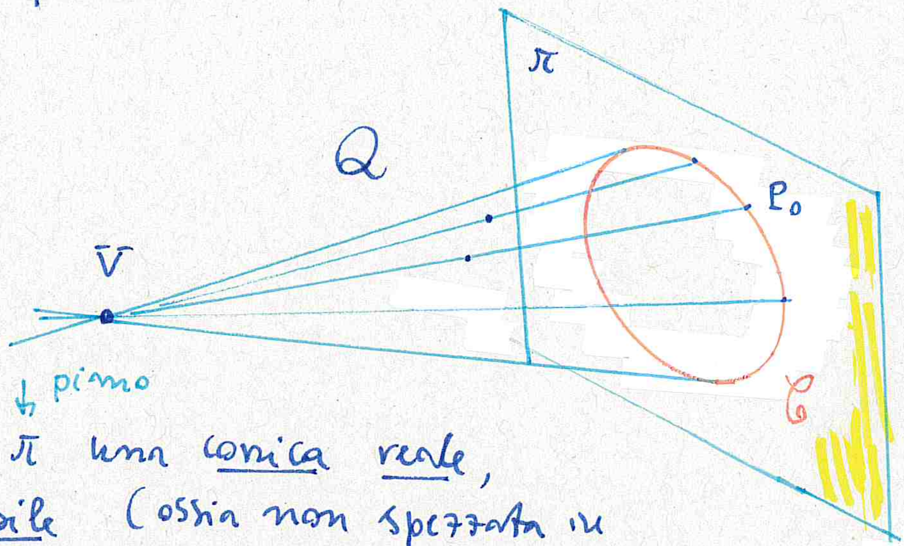
$$Q: \quad X^T \cdot \xi A X = 0, \quad \xi \neq 0$$

moltiplicare i coefficienti per $\xi \neq 0$ non altera le autosoluzioni.

Pertanto sono necessarie 9 condizioni lineari per individuarla. In particolare, per 9 punti in posizione generica passa una e una sola quadrica.

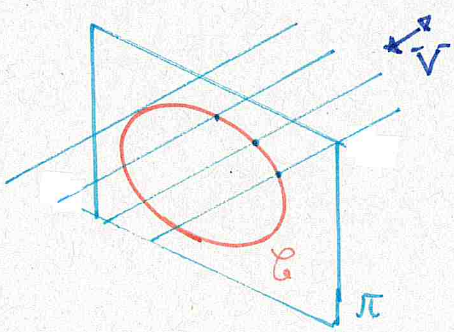
Se una retta ha in comune tre o più punti con una quadrica, è in essa contenuta, in virtù del I° teorema sull'ordine.

* Coni quadrici



Siano $\mathcal{C} \subset \pi$ una conica reale, irriducibile (ossia non spezzata in due rette) e $\bar{V} \notin \pi$ ($\bar{V}$ reale)

Il cono quadrico Q di vertice $\bar{V}$ e direttrice $\mathcal{C}$ è il luogo dei punti situati sulle rette VP_0, con $P_0 \in \mathcal{C}$. Tali rette sono dette generatrici del cono (che risulta pertanto una superficie rigata). Se $\bar{V}$ è improprio ($\bar{V} \in \pi_\infty$) si parla di cilindro.



★ Un cono quadrico è una quadrica

Infatti, senza perdere in generalità, sia $\pi = \pi_\infty$ e

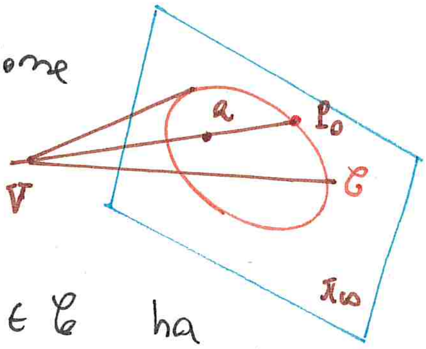
$$\mathcal{C} : \begin{cases} x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0 \\ x_0 = 0 \qquad\qquad \pi_\infty \end{cases}$$

$\mathcal{C}$ è una conica reale, a punti reali, irriducibile, su π_∞.
$x_0 = 0$

Sia poi $V = [1, 0, 0, 0]$ (origine)
è un punto reale

Il cono corrispondente ha equazione

$$C \qquad (★) \qquad \boxed{x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0}$$



Ciò è chiaro: la retta VP_0, $P_0 \in \mathcal{C}$ ha equazione parametrica $\boxed{Q = \lambda V + \mu P_0}$ (◇)

$(\lambda, \mu) \neq (0,0)$

$$\begin{cases} x_0 = \lambda \\ x_1 = \mu\, x_1^{(0)} \\ x_2 = \mu\, x_2^{(0)} \\ x_3 = \mu\, x_3^{(0)} \end{cases}$$

sicché la (★) è soddisfatta.

Inversamente, ogni punto della quadrica (★) è necessariamente della forma (◇).

A posteriori $\mathcal{C} = C \cap \pi_\infty$

* Proprietà dei coni quadrici

Sia Q un cono quadrico di vertice V.

Si ha:

(a) $\forall A \in Q \setminus \{V\} \quad AV \subset Q$

(b) Q è irriducibile

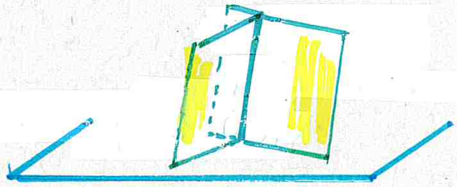
(c) Se $r \subset Q$, allora r è una generatrice ($r \ni V$)

(d) Se s è una retta della stella di centro V,

o $s \cap \{V\} = \{V\}$ o $s \subset Q$

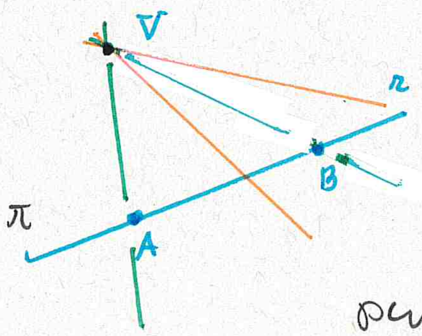
Dimostrazione. (a) segue dalla definizione.

(b) Q possiede una sezione piana data da una conica irriducibile, pertanto non può spezzarsi in una coppia di piani, altrimenti le sezioni piane di Q sarebbero coniche spezzate.



(c) Sia $r \subset Q$, $V \notin r$

Siano $A, B \in r$



Le rette VA, VB, r sono interamente contenute in Q, sicché il piano $\pi = VAB$ fa parte di Q, che risulta pertanto riducibile, contro l'ipotesi.

(d) Se $s \cap Q \ni A$, $A \neq V$, la retta $AV \subset Q$ (da (a)). Altrimenti l'intersezione si riduce al solo V, contato due volte.

Esempio: determinare il cono di vertice $V: (1,0,1)$ e direttrice $\mathcal{C}:$ (ellisse) $\begin{cases} x^2+2y^2+z^2=1 \\ x=0 \end{cases}$

piano

ellissoide

$\mathcal{C}$ può equivalentemente essere descritta così:

$$\mathcal{C}: \begin{cases} 2y^2+z^2=1 \\ x=0 \end{cases}$$

si tratta di un'ellisse nel piano Oyz centrata in O

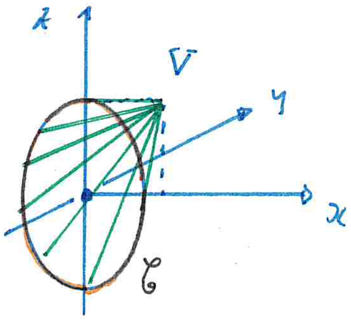
$$2y^2+z^2=1$$

$$\frac{y^2}{\frac{1}{2}}+z^2=1 \qquad \frac{y^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}+z^2=1$$

forma canonica metrica

$a=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}=0{,}707..$

$b=1$



Sia $P_0 \in \mathcal{C}$ $\quad P_0: (0, y_0, z_0)$

retta P_0V:

$$\begin{cases} x = 1+t(-1) = 1-t \\ y = 0+t\,y_0 = t\,y_0 \\ z = 1+t(z_0-1) = \underbrace{1-t}_{= x}+t z_0 \end{cases}$$

Eliminiamo t, z_0, y_0:

$$\begin{cases} z = x+t\,y_0 \\ y = t\,y_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z-x = t z_0 \\ y = t y_0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} (z-x)^2 &= t^2 z_0^2 \\ 2y^2 &= t^2 \cdot 2y_0^2 \end{aligned} \Rightarrow (z-x)^2+2y^2 = t^2 \overbrace{(z_0^2+2y_0^2)}^{=1} = t^2 = (1-x)^2$$

Ossia $(z-x)^2+2y^2-(1-x)^2=0$

$$\cancel{x^2}-2xz+z^2+2y^2-1+2x-\cancel{x^2}=0$$

$$\boxed{2y^2+z^2-2xz+2x-1=0}$$

forma omogenea:

$$\boxed{\begin{aligned} &x_0^2-2x_2^2-x_3^2 \\ &+2x_1x_3-2x_0x_1=0 \end{aligned}}$$

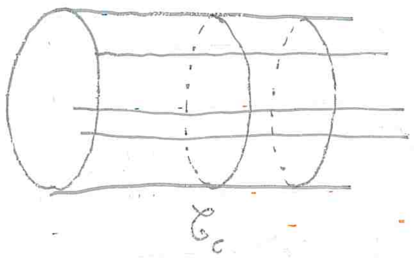
★ coni quadrici particolari

un certo polinomio di 2° grado in x, y, z

Equazione cartesiana del cono $F(x, y, z) = 0$

● **manca la x** : si ha un cilindro di vertice $X_\infty : [0, 1, 0, 0]$ direzione dell'asse x

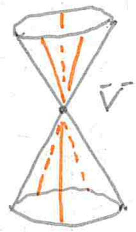
i piani $x = c$ determinano la conica $\mathcal{C}_c : \begin{cases} F(y, z) = 0 \\ x = c \end{cases}$ supposta irriducibile



le generatrici sono le rette $\begin{cases} x = t \\ y = y_0 \\ z = z_0 \end{cases}$ con $F(y_0, z_0) = 0$

e similia...

● $F = F(x, y, z)$ è omogeneo in x, y, z



si ha un cono con vertice nell'origine.

Le rette $\begin{cases} x = \ell t \\ y = m t \\ z = n t \end{cases}$ $(\ell, m, n) \neq (0, 0, 0)$ parametri direttori

tali che $F(\ell, m, n) = 0$ costituiscono le sue generatrici

● $F = F(\underbrace{x - x_0}_{\xi}, \underbrace{y - y_0}_{\eta}, \underbrace{z - z_0}_{\zeta})$ è omogeneo in ξ, η, ζ :

si ha un cono di vertice $V = (x_0, y_0, z_0)$

- Esempio: $F(x,y,z) = (x-1)^2 + 3(z-2)^2 + (x-1)(z-2) - 1 = 0$

è un cilindro di vertice $Y_0 : [0,0,1,0]$

trovіamone una direttrice: Sia $\xi = x-1$, $\zeta = z-2$

$$\begin{cases} \xi^2 + 3\zeta^2 + \xi\zeta - 1 = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Che cos'è?

$\frac{1}{4} + \frac{11}{4} = \frac{12}{4} = 3$

$$\xi^2 + 3\zeta^2 + \xi\zeta - 1 = \overbrace{\xi^2 + 2\cdot\xi\cdot\frac{\zeta}{2} + \frac{\zeta^2}{4}}^{\text{completamento dei quadrati}} + \frac{11}{4}\zeta^2 - 1$$

$$= \underbrace{\left(\xi + \frac{\zeta}{2}\right)}_{\xi'}^2 + \frac{11}{4}\zeta^2 - 1 = 0$$

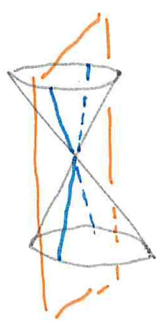
$$\xi'^2 + \frac{11}{4}\zeta^2 - 1 = 0$$

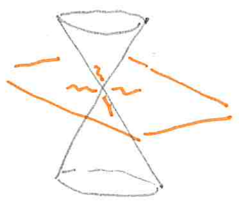
(segnatura $(2,0)$)

ellisse di centro $C: (1,0,2)$

Troviamo $\mathcal{C}_\infty$, conica all'infinito del cono dato.

Segando un cono con un piano passante per il suo vertice si ottengono o due generatrici o una coppia di rette immaginarie. Nel nostro caso, rendendo omogenea l'equazione e ponendo $x_0 = 0$ si trova





$$\mathcal{C}_\infty : \begin{cases} x_1^2 + 3x_3^2 + x_1x_3 = 0 \\ x_0 = 0 \end{cases}$$

Sfruttando il calcolo precedente si trova

$$\mathcal{C}_\infty : \begin{cases} x_1 + \frac{x_3}{2} = \pm \frac{\sqrt{11}}{2} i x_3 \\ x_0 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + \frac{1 \mp \sqrt{11}\, i}{2} x_3 = 0 \\ x_0 = 0 \end{cases} =$$

ovvero due rette immaginarie