Lezione XVI

APPROFONDIMENTI DI GEOMETRIA V2

Mauro Spera, Elena Zizioli

★ Sfere (richiami).

Nello spazio euclideo (reale) E^3, una sfera è il luogo dei punti equidistanti da un punto fissato C (centro della sfera). La distanza di un generico punto della sfera dal centro è detta raggio di questa.

In coordinate cartesiane, se $C:(x_0, y_0, z_0)$, è

$$\boxed{\Sigma: \quad (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 = R^2}$$

Sfera di centro C e raggio $R \geq 0$

ovvero

$$x^2+y^2+z^2 \underbrace{-2x_0}_{a}\cdot x \underbrace{-2y_0}_{b} y \overbrace{-2z_0}^{c} z + \underbrace{x_0^2+y_0^2+z_0^2-R^2}_{d} = 0$$

$\Rightarrow$

$$\boxed{x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0}$$

- coefficienti uguali
- termini misti di ... secondo grado assenti

con

$$\begin{cases} x_0 = -\dfrac{a}{2} \\ y_0 = -\dfrac{b}{2} \\ z_0 = -\dfrac{c}{2} \end{cases} \qquad R^2 = \frac{a^2+b^2+c^2}{4} - d$$

Centro

raggio: $R = \dfrac{\sqrt{a^2+b^2+c^2-4d}}{2}$

$$\bullet \quad \boxed{a^2+b^2+c^2-4d>0}$$

sfera a punti reali, di centro e raggio forniti dalle formule precedenti

$$\bullet \quad \boxed{a^2+b^2+c^2-4d=0}$$

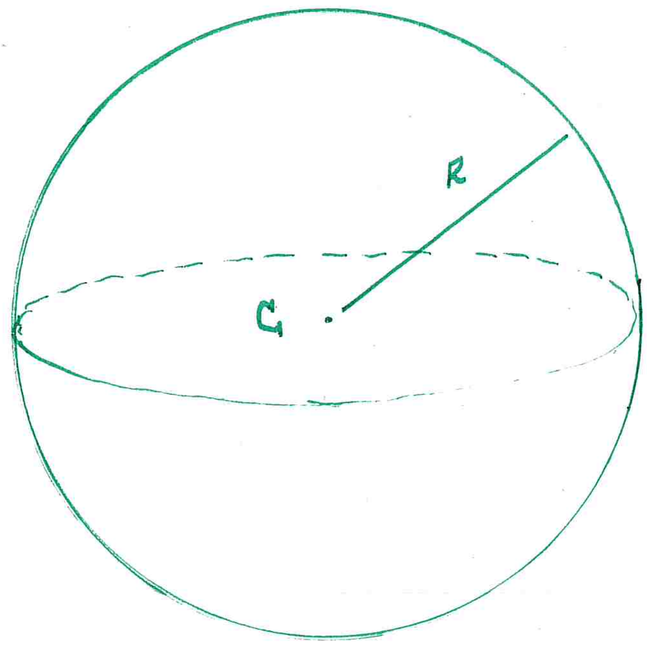
sfera di centro reale e raggio nullo

(in $\mathbb{C}^3$ si otterrebbe un cono di vertice

$V: \left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}, -\frac{c}{2}\right)$ (cono isotropo)

$$\bullet \quad \boxed{a^2+b^2+c^2-4d<0}$$

Non vi sono punti reali



* Sfere generalizzate

Una sfera generalizzata in $\mathbb{E}^3(\mathbb{C})$ è una quadrica della forma [fissato un riferimento cartesiano in $\mathbb{E}^3$]

$$\boxed{F = a_{11}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 2a_{01}x_0x_1 + 2a_{02}x_0x_2 + 2a_{03}x_0x_3 + a_{00}x_0^2 = 0}$$

$a_{ij} \in \mathbb{R}$

$$A = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & a_{03} \\ a_{10} & a_{11} & 0 & 0 \\ a_{20} & 0 & a_{22} & 0 \\ a_{30} & 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$$

Intersecando col piano improprio $\pi_\infty : x_0 = 0$ si ottiene

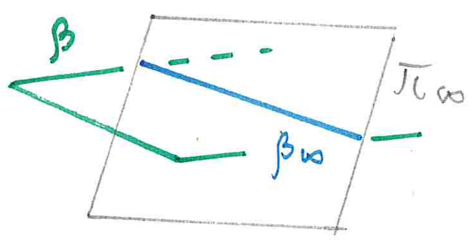
$$A_\infty : \begin{cases} F = 0 \\ x_0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{A_\infty : \begin{cases} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0 \\ x_0 = 0 \end{cases}}$$

ovvero l' assoluto, già introdotto. conica totalmente immaginaria

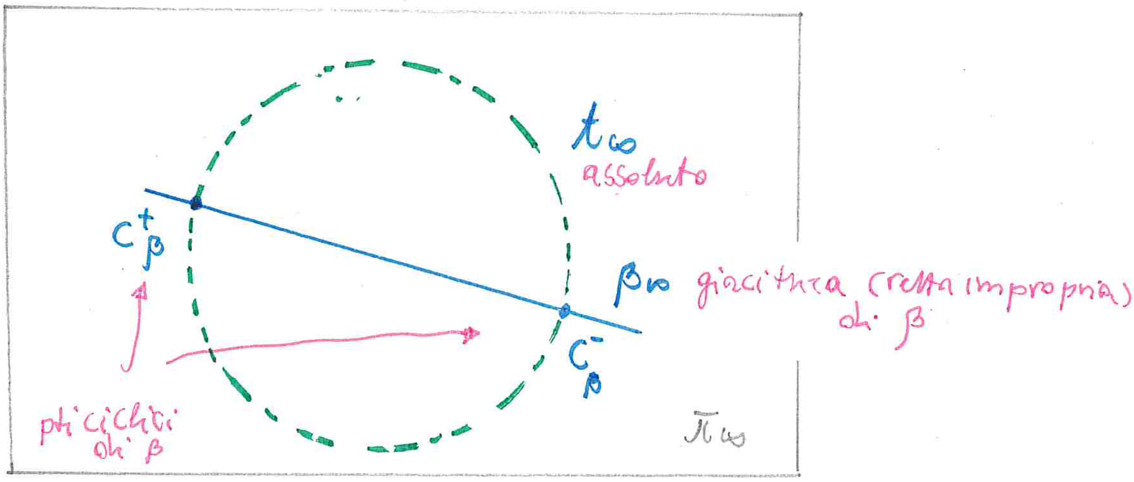
I punti dell'assoluto sono detti punti ciclici dello spazio.

Dato un piano β, i suoi punti ciclici sono dati da $\{C_\beta^\pm\} := A_\infty \cap \beta_\infty$ punti ciclici di β

dove β_∞ è la giacitura di β (retta impropria di β : $\beta_\infty = \beta \cap \pi_\infty$



$$\overline{C_\beta^\pm} = C_\beta^\mp \quad \text{(coniugati)}$$



punti ciclici dei piani coordinati:

$I, \bar{I}$: $[0, 1, \pm i, 0]$ piano xy $x_3 = 0$

$J, \bar{J}$: $[0, 1, 0, \pm i]$ piano xz $x_2 = 0$

$K, \bar{K}$: $[0, 0, 1, \pm i]$ piano yz $x_1 = 0$

★ **Teorema** le sfere generalizzate sono precisamente le quadriche contenenti A_∞
ovvero: una quadrica Q è una sfera generalizzata se e solo se $\mathcal{C}_\infty = Q \cap \pi_\infty = A_\infty$
conica all'infinito

Dimostrazione: una sfera generalizzata ha come conica all'infinito A_∞, come si è visto.
Supponiamo ora che una quadrica Q contenga A_∞ $(Q \supset A_\infty)$
Determiniamo $\mathcal{C}_\infty = Q \cap \pi_\infty$. Si trova

$$\mathcal{C}_\infty : \begin{cases} a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 = 0 \\ x_0 = 0 \end{cases}$$

Dato che $\mathcal{C}_\omega \supseteq t_\omega$ per ipotesi, i punti ciclici dei piani coordinati devono appartenere a $\mathcal{C}_\omega$.

Ad esempio $I : [0, 1, i, 0] \in \mathcal{C}_\omega$, sicché

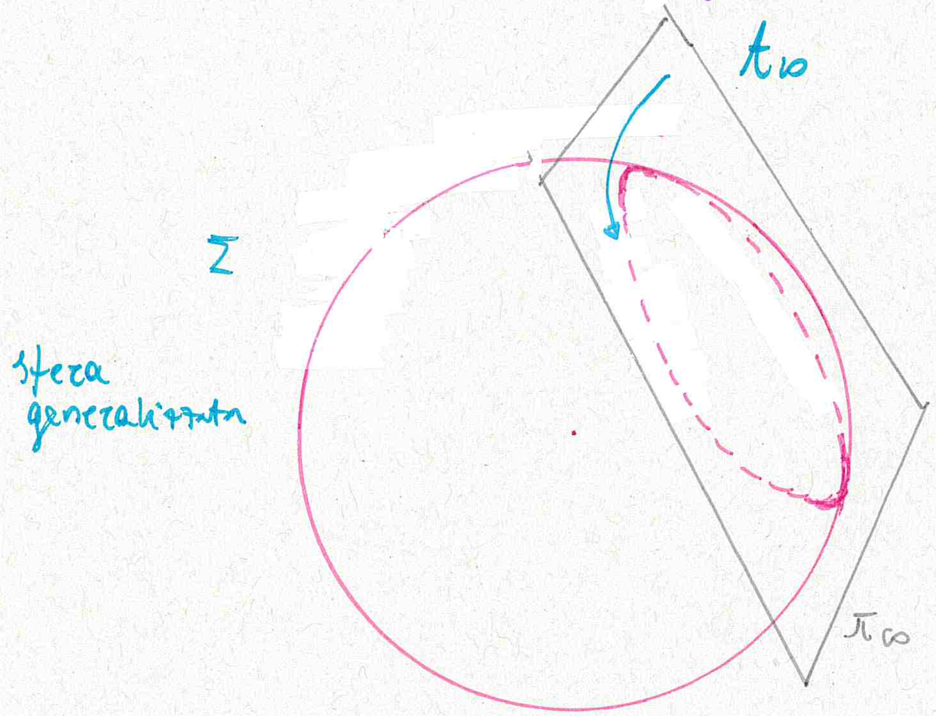
$$\boxed{a_{11} - a_{22} + 2i\, a_{12} = 0}$$

$\Rightarrow \; (a_{ij} \in \mathbb{R}) \qquad a_{11} = a_{22}, \quad a_{12} = 0$

Similmente $\quad a_{33} = a_{11}, \quad a_{13} = a_{23} = 0$

e pertanto $\quad a_{11} = a_{22} = a_{33} \; (\neq 0) \quad$ e $\quad a_{12} = a_{23} = a_{13} = 0$,

ossia Q è una <u>sfera generalizzata</u>.



★ Una <u>circonferenza generalizzata</u> è l'intersezione di un <u>piano</u> con <u>una sfera generalizzata</u>

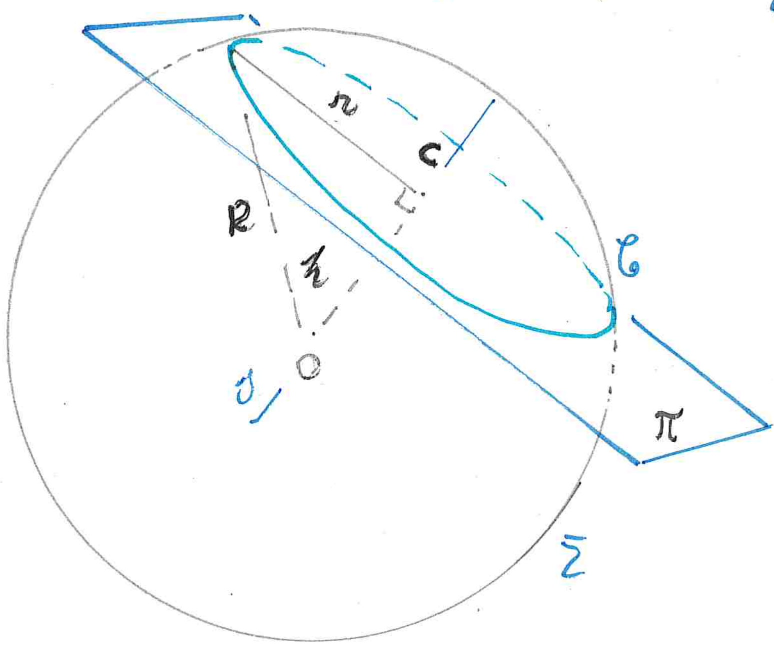
In particolare, l'<u>assoluto</u> A_∞ è una <u>circonferenza generalizzata</u> (intersezione di una <u>qualsiasi</u> sfera generalizzata col piano improprio).

La circonferenza è a punti reali se la sfera è a punti reali e $d(C,\pi) = h$

distanza di C dal piano π $\quad 0 \le h \le R$

$R^2 = r^2 + h^2$

raggio della sfera Σ — raggio della circonferenza $\mathcal{C}$



Se $h = R$ si ha un solo punto reale, se $h > R$ la circonferenza è a punti immaginari

$\Sigma: \quad x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0 \qquad (a^2+b^2+c^2-4d>0)$

$\pi: \quad a'x+b'y+c'z+d'=0 \qquad (a',b',c') \neq (0,0,0)$

C si determina come intersezione di π con s, retta per O (centro della sfera) perpendicolare a π.

$$h = d(C,\pi) = d(C,O) = \frac{|a'x_c+b'y_c+c'z_c+d|}{\sqrt{a'^2+b'^2+c'^2}}$$

$r = \sqrt{R^2-h^2}$

raggio di $\mathcal{C}$

Una conica nello spazio (intersezione di una quadrica con un piano) è una circonferenza se e soltanto se passa per i punti ciclici del suo piano. Ciò conduce al risultato seguente

* **Teorema** Sia $\mathscr{C} = \underset{\text{quadrica}}{Q} \cap \underset{\text{piano}}{\pi}$ una conica nello spazio.

$\mathscr{C}$ è una circonferenza se e solo se la conica $\mathscr{C}_\infty = Q \cap \pi_\infty$ (conica all'infinito) passa per i punti ciclici $C_\pi^\pm$ di π

Dimostrazione ("se") (†) Se $\mathscr{C}_\infty$ contiene i punti ciclici di π, significa che $\mathscr{C}_\infty \cap r_\infty^\pi = \{C_\pi^\pm\}$ ← giacitura di π

non può contenere altri punti per questioni di ordine

e pertanto è una circonferenza

("solo se") Se, viceversa, $\mathscr{C}$ è una circonferenza, $\mathscr{C}$ passa per i punti ciclici $C_\pi^\pm$ che, in ogni caso, appartengono a $\mathscr{C}_\infty$ (poiché $\mathscr{C} \subset Q$ e $C_\pi^\pm \in \mathscr{A}_\infty \subset \pi_\infty$)
$\cap\ \mathscr{C}$

[sono punti all'infinito di Q, dunque stanno su $\mathscr{C}_\infty$] □

(†) In modo più simbolico $\mathscr{C} = Q \cap \pi$, $C_\pi^\pm \in \mathscr{C}_\infty = Q \cap \pi_\infty$

Si ha:

$$\underset{\pi \cap \pi_\infty}{\underset{\|}{\mathscr{C} \cap r_\infty^\pi}} = (Q \cap \pi) \cap (\pi \cap \pi_\infty)$$

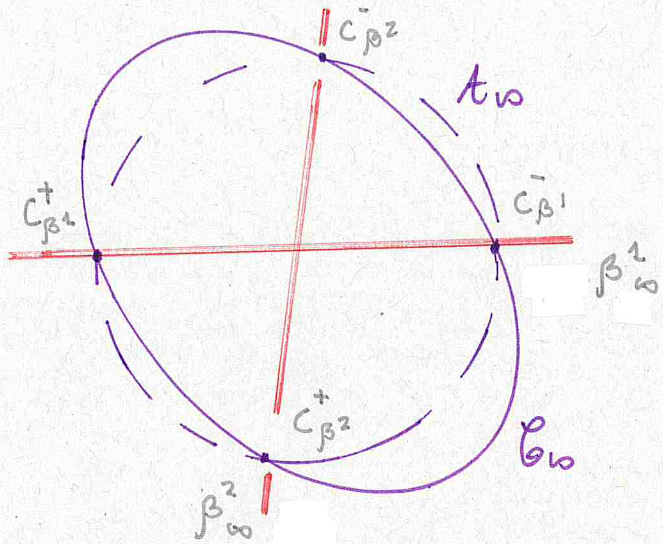
$$= \underbrace{(Q \cap \pi_\infty)}_{\mathscr{C}_\infty} \cap \underbrace{(\pi \cap \pi_\infty)}_{r_\infty^\pi}$$

$$= \mathscr{C}_\infty \cap r_\infty^\pi = \{C_\pi^\pm\}$$

$\Rightarrow$ $\mathscr{C}$ è una circonferenza (passa per i punti ciclici del suo piano)

Risolviamo il problema seguente:

Data Q, troviamone le sue sezioni circolari, ovvero i piani (o, piuttosto, le loro giaciture) che la segano secondo circonferenze



Commento: Una soluzione così semplice ed elegante sarebbe risultata impossibile senza l'ausilio della geometria proiettiva

La discussione precedente ci conduce alla determinazione di $A_\infty \cap \mathcal{C}_\infty$ (quattro punti, in virtù del teorema di Bézout)

assoluto — conica all'infinito

a due a due complessi coniugati (le due coniche sono reali, e ovviamente sono situate nel piano improprio)

Le rette reali β^1_∞ e β^2_∞ che congiungono tali coppie di punti individuano le giaciture richieste.

In formule, si studia il sistema

$$\begin{cases} A_\infty = 0 \\ \mathcal{C}_\infty = 0 \end{cases} \qquad \pi_\infty \to \begin{cases} Q = 0 \\ x_0 = 0 \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0 \end{cases}$$

$\mathcal{C}_\infty$ ($Q = 0$, $x_0 = 0$)

A_∞ ($x_0 = 0$, $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$)

abuso di notazione: intendiamo le equazioni dei vari oggetti coinvolti

Viene generalizzato in tal modo un teorema di Apollonio di Perga (III sec. a.C.) per i coni

★ L'intersezione di due sfere (distinte) si compone di due circonferenze, di cui una è l'assoluto

Infatti, siano

$$\Sigma : \quad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + a x_0 x_1 + b x_0 x_2 + c x_0 x_3 + d x_0^2 = 0$$

$$\Sigma' : \quad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + a' x_0 x_1 + b' x_0 x_2 + c' x_0 x_3 + d' x_0^2 = 0$$

$$(a, b, c, d) \neq (a', b', c', d')$$

si ha, successivamente

abuso di notazione

sfera

$$\Sigma \cap \Sigma' = \begin{cases} \Sigma = 0 \\ x_0 \{ (a-a') x_1 + (b-b') x_2 + (c-c') x_3 + (d-d') x_0 \} = 0 \end{cases}$$

coppia di piani di cui uno è il piano improprio

$$= \underbrace{\begin{cases} \Sigma = 0 \\ x_0 = 0 \end{cases}}_{A_\infty} \vee \underbrace{\begin{cases} \Sigma = 0 \\ (a-a') x_1 + \text{——} (d-d') x_0 = 0 \end{cases}}_{\text{circonferenza}}$$

se $a = a'$, $b = b'$, $c = c'$ ma $d \neq d'$ (circonferenze concentriche) si ha $x_0 = 0$ e quindi un'ulteriore copia dell'assoluto.

Casistiche: