Lezione XVII

APPROFONDIMENTI DI GEOMETRIA V2

Mauro Spera, Elena Zizioli

Esercizi vari su sfere e circonferenze

1. Siano dati $Q: \; 5y^2+\lambda z^2-2z=0$ (in $\mathbb{E}^3$)

$\alpha: \; x-2y=0$ $\qquad \lambda\in\mathbb{R}$

Determinare λ in modo che la conica $\mathcal{C}:=Q\cap\alpha$ sia una circonferenza.

Soluzione: Troviamo i punti ciclici $C^{\pm}_{\alpha}$. La giacitura di α è individuata dalla retta α_∞: $\begin{cases} x_1-2x_2=0 \\ x_0=0 \end{cases}$

(si è passati a coordinate omogenee). Risolviamo il sistema

$$\begin{cases} \left.x_1^2+x_2^2+x_3^2=0\right\} A_\infty \\ x_0=0 \\ x_1-2x_2=0 \end{cases} \quad (\text{le ultime due}: \alpha_\infty) \iff \begin{cases} 5x_2^2+x_3^2=0 \\ x_1=2x_2 \\ x_0=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_0=0 \\ x_1=2t \\ x_2=t \\ x_3=\pm i\sqrt{5}\,t \end{cases} \Rightarrow C^{\pm}_{\alpha}=[0,2,1,\pm i\sqrt{5}]$$

La conica all'infinito $\mathcal{C}_\infty=Q\cap\pi_\infty$ è

$$\mathcal{C}_\infty: \begin{cases} 5x_2^2+\lambda x_3^2-2x_0x_3=0 \\ x_0=0 \end{cases} \quad \text{owero} \quad \begin{cases} 5x_2^2+\lambda x_3^2=0 \\ x_0=0 \end{cases}$$

Imponiamo la condizione $C_\alpha^\pm \in \mathscr{C}_\infty$:

$$5 + \lambda(-5) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = 1 \quad , \text{ da cui}$$

$$\mathscr{C} : \begin{cases} 5y^2 + z^2 - 2z = 0 & \leftarrow Q \\ x - 2y = 0 & \leftarrow \alpha \end{cases}$$

(è un cilindro di vertice $X_\infty = [0,1,0,0]$)

Realizziamo $\mathscr{C}$ come intersezione di una sfera e del piano α : da $5y^2 = 4y^2 + y^2 = x^2 + y^2$ otteniamo

$$\mathscr{C} : \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 2z = 0 & \leftarrow \Sigma \text{ sfera} \\ x - 2y = 0 & \alpha \end{cases}$$

e Σ è la sfera di centro $C : (0,0,1)$ e raggio $R = 1$, come si evince da

$$0 = x^2 + y^2 + z^2 - 2z = x^2 + y^2 + (z-1)^2 - 1$$

Troviamo centro e raggio di $\mathscr{C}$.

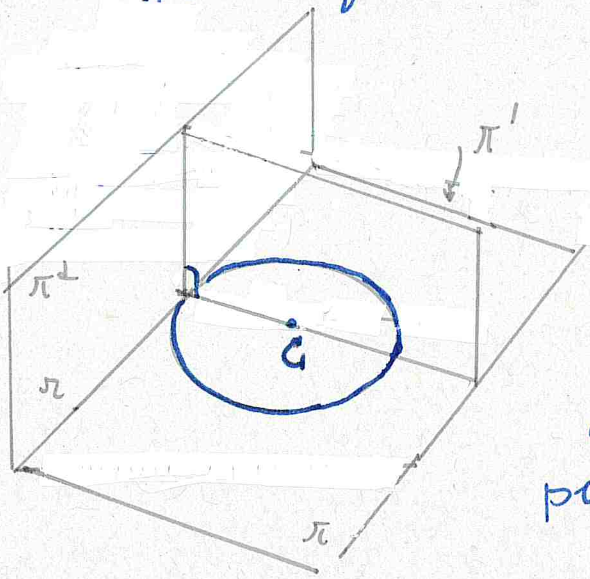
retta per C perpendicolare ad α : $\begin{cases} x = t \\ y = -2t \\ z = 1 \end{cases} \equiv r_C^\perp$

$r_C^\perp \cap \alpha$: $\quad t + 4t = 0 \quad 5t = 0 \quad \Rightarrow t = 0$

$\Rightarrow$ C' (centro di $\mathscr{C}$) coincide con C .

Dunque $r = 1$ e $\mathscr{C}$ è un cerchio massimo di Σ
$(h = 0)$

2. Determinare la circonferenza di centro $C:(1,1,1)$ tangente alla retta $r: \begin{cases} x=t \\ y=2t \\ z=t \end{cases}$



<u>Soluzione</u>:

$\mathscr{C}$ giace sul piano determinato da r e C, ovvero il piano del fascio $\mathcal{Y}$ dei piani di asse r passante per C

$$r: \begin{cases} x-z=0 \\ 2x-y=0 \end{cases} \qquad \mathcal{Y}: (x-z)+\lambda(2x-y)=0$$

($\lambda \in \mathbb{R}$, descrizione non omogenea)

Imponiamo il passaggio per C (si vede subito...)

$$\underbrace{1-1}_{0} + \lambda(\underbrace{2\cdot 1-1}_{1}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\pi: \ x-z=0}$$

Consideriamo il piano di $\mathcal{Y}$ perpendicolare a π

$\pi^\perp: \quad (2\lambda+1)x - \lambda y - z = 0$

$\pi: \quad x - z = 0$

$$(2\lambda+1)\cdot 1 - \lambda\cdot 0 + (-1)(-1) = 0$$

$$2\lambda+1+1 = 2\lambda+2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = -1$$

$\pi^\perp: \quad \underbrace{(-2+1)}_{-1}x + y - z = 0 \qquad \boxed{\pi^\perp: \ x-y+z=0}$

controllo: $\pi^\perp$ contiene r

$t-2t+t=0$

Calcoliamo $d(C,r) = d(C,\pi^\perp)$

[in alternativa si può trovare il piano π' per C perpendicolare a π e determinare l'intersezione con r]

$$d(C,\pi^\perp) = \frac{|1-1+1|}{\sqrt{1+1+1}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

una sfera possibile è allora

$$\Sigma : \quad (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = \frac{1}{3}$$

$\mathscr{C} = \Sigma \cap \pi$, ed è subito visto che

$\mathscr{C}$ risulta essere un cerchio massimo di Σ.

A titolo di esercizio, determinare tutte le sfere Σ' tali che $\mathscr{C} = \Sigma' \cap \pi$.

Sugg. Esse hanno centro sulla retta per G perpendicolare a π

3. Dato $Q: \ x^2+2y^2-z^2=0$

$$x_1^2+2x_2^2-x_3^2=0$$

(è un cono quadrico di vertice $V:(0,0,0)$)

trovare i piani $\pi: \ a_0x_0+a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3=0$

$(a_0 - a_3) \neq (0, - 0)$ che lo tagliano lungo circonferenze (sezioni circolari)

<u>Soluzione</u>. Dobbiamo determinare $A_\infty \cap \mathcal{C}_\infty$, ovvero risolvere il sistema

$$\begin{cases} x_1^2+x_2^2+x_3^2=0 \\ x_1^2+2x_2^2-x_3^2=0 \\ a_0x_0+a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3=0 \\ x_0=0 \end{cases} \quad \text{ovvero} \quad \begin{cases} x_1^2+x_2^2+x_3^2=0 \\ x_1^2+2x_2^2-x_3^2=0 \\ a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3=0 \\ x_0=0 \end{cases}$$

che è pure equivalente a

sommando e sottraendo le prime due equazioni

$$\begin{cases} 2x_1^2+3x_2^2=0 \\ -x_2^2+2x_3^2=0 \\ a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3=0 \\ x_0=0 \end{cases}$$

Pertanto

$$\begin{cases} x_1 = \pm i\sqrt{\frac{3}{2}}\,x_2 \\ (x_2=x_2) \\ x_3 = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\,x_2 \\ x_0=0 \\ a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3=0 \end{cases}$$

Le prime tre equazioni forniscono quattro punti a due a due coniugati. Sostituiamo nell'ultima equazione

① $L, \bar{L} : [0, \pm\sqrt{3}i, \sqrt{2}, 1]$

② $M, \bar{M} : [0, \pm\sqrt{3}i, \sqrt{2}, -1]$

① $a_1(\pm\sqrt{3}i)+\sqrt{2}a_2+a_3=0$

$\Rightarrow \ a_1=0 \qquad a_3=-\sqrt{2}a_2$

$\Rightarrow \ a_0x_0+x_2-\sqrt{2}x_3=0 \ \rightsquigarrow \ \boxed{y-\sqrt{2}z+k=0}$

(◇) equazione affine

nel piano $x_0=0$ si ha la retta $x_2-\sqrt{3}x_3=0$ che individua i piani (◇)

Pariment i

(2) $\quad a_1(\pm\sqrt{3}\,i) + \sqrt{2}\,a_2 - a_3 = 0$

$\Rightarrow \quad a_1 = 0 \qquad a_3 = \sqrt{2}\,a_2$

e si ottiene

$$a_0 x_0 + x_2 + \sqrt{2}\,x_3 = 0$$

$$\rightsquigarrow \quad \boxed{y + \sqrt{2}\,z + h = 0}$$

Determiniamo, in particolare, centri e raggi delle circonferenze $\mathcal{C} = Q \cap \pi_\pm \qquad \pi_\pm : \; y \pm \sqrt{2}\,z + 1 = 0$

$$\mathcal{C} : \begin{cases} x^2 + 2y^2 - z^2 = 0 \\ y = \mp\sqrt{2}\,z - 1 \end{cases}$$

Scriviamo $\mathcal{C}$ come $\Sigma \cap \pi_\pm$

sfera

sostituiamo solo qui

$$x^2 + y^2 + y^2 - z^2 = 0$$

$$\mathcal{C} : \begin{cases} x^2 + y^2 + (\mp\sqrt{2}\,z - 1)^2 - z^2 = 0 \\ \pi_\pm = 0 \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + \overbrace{2z^2 - z^2}^{z^2} \pm 2\sqrt{2}\,z + 1 = 0 \\ \pi_\pm = 0 \end{cases}$$

$$\Updownarrow \qquad \text{completamento del quadrato}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + (z \pm \sqrt{2})^2 - 1 = 0 \\ \pi_\pm = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow \quad C : (0, 0, \mp\sqrt{2}), \quad R = 1$

centro di Σ $\qquad$ raggio di Σ

Si prosegua...