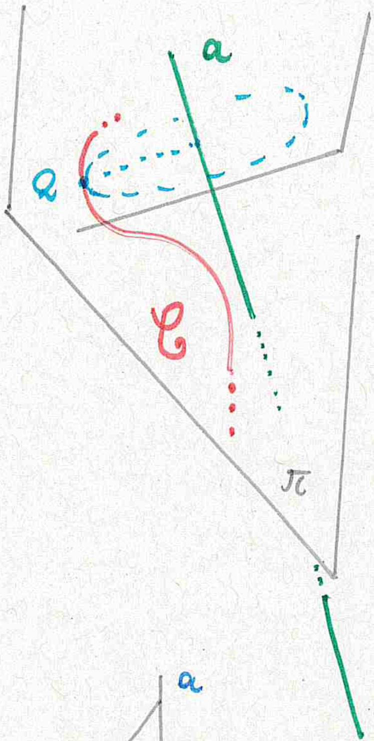
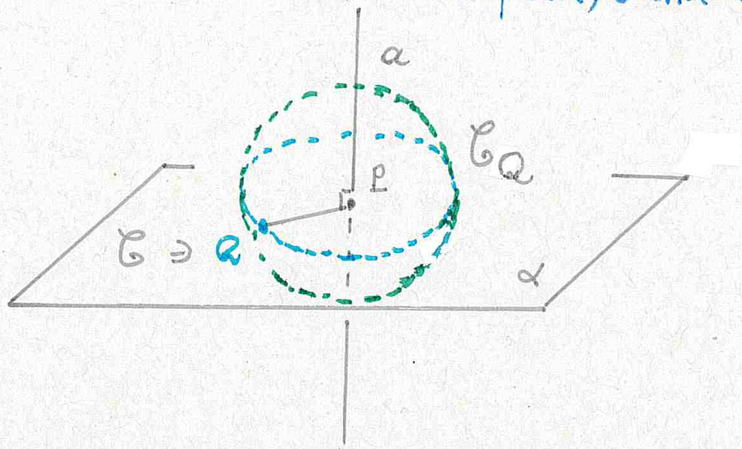
APPROFONDIMENTI DI GEOMETRIA V2

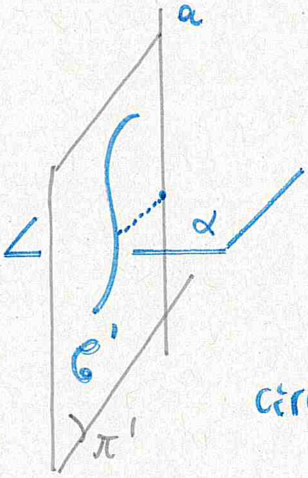
Mauro Spera, Elena Zizioli

★ Superficie di rotazione

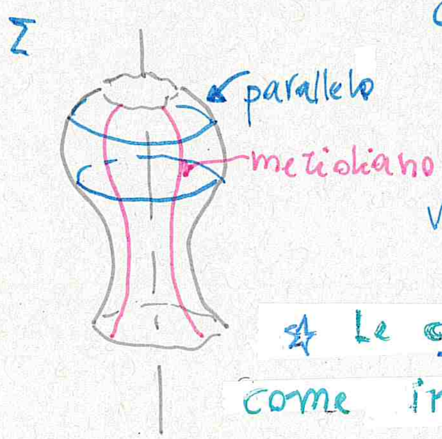




Si ottengono ruotando una curva piana $\mathcal{C}$ (ma ciò non è restrittivo) attorno ad un asse a non perpendicolare al piano di $\mathcal{C}$.



La superficie in questione Σ consta della totalità delle circonferenze su piani α perpendicolari ad a, di centro $P = \alpha \cap a$ e raggio $\overline{PQ}$ $(Q \in \mathcal{C} \cap \alpha)$ [v. figure]. Tali circonferenze sono dette **paralleli**.



Concettualmente, ci si riduce al caso in cui Σ è ottenuta ruotando una curva piana $\mathcal{C}' \subset \pi'$, π' appartenente al fascio di piani di asse a. Le varie copie di $\mathcal{C}'$ sono dette meridiani

profilo

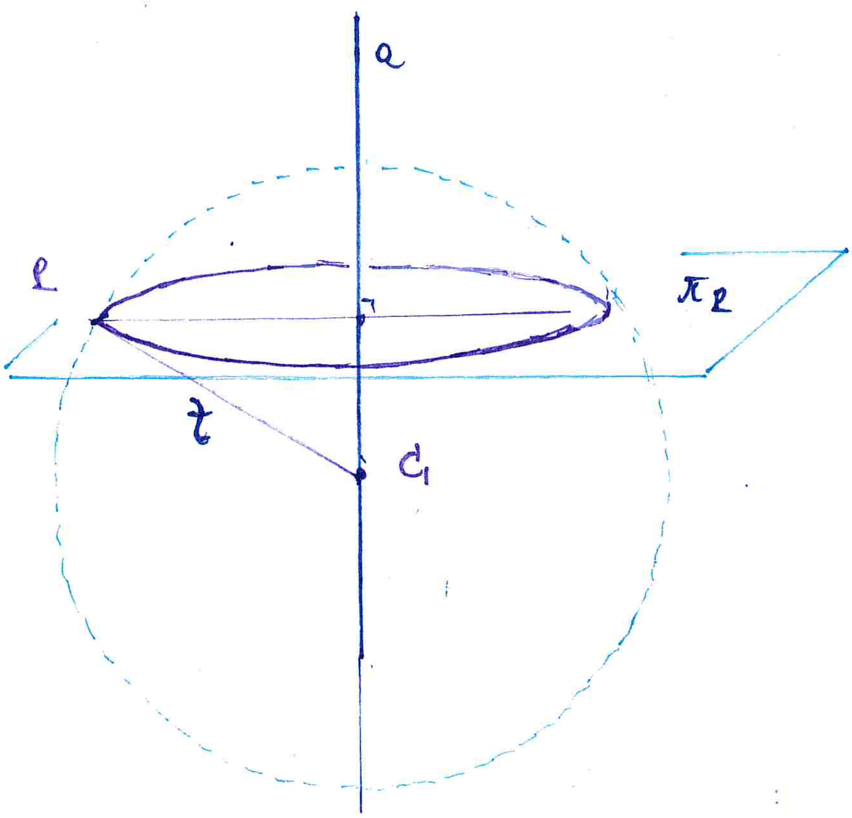
★ Le circonferenze $\mathcal{C}_Q$ si possono vedere come intersezioni di α con sfere di centro P e raggio $\overline{PQ}$. Se $\mathcal{C}$ è parametrizzata con un parametro t, per ottenere la superficie di rotazione Σ basta eliminare t dalle equazioni delle varie circonferenze.

<u>Importante</u>. Spesso risulta molto più semplice determinare $\mathscr{C}_t$ nel modo seguente:

$$\boxed{\mathscr{C}_t = \Sigma_t \cap \pi_P}$$

Σ_t: sfera con centro C fissato sull'asse di rotazione (scelto opportunamente), con $\Rightarrow t = PC$

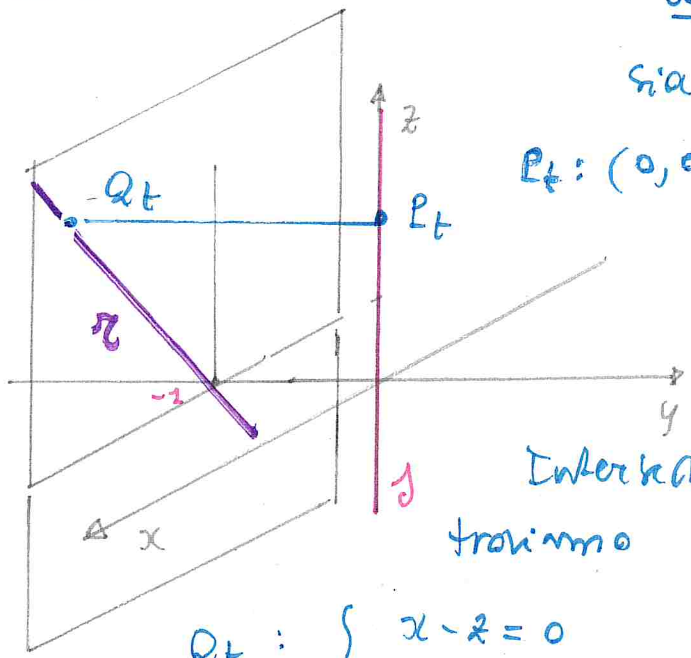
π_P: piano per P perpendicolare all'asse di rotazione



Esempio: descrivere la superficie di rivoluzione ottenuta ruotando $r: \begin{cases} x = \xi \\ y = -1 \\ z = \xi \end{cases}$ $\quad r: \begin{cases} x - z = 0 \\ y + 1 = 0 \end{cases}$

attorno ad $s: \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = t \end{cases}$ $\quad$ [r e s sono sghembe]

asse z



Soluzione

Sia π_t il piano per $P_t: (0,0,t) \in s$ perpendicolare a s:

$\pi_t: \ z = t$

(parallelo al piano xy)

Intersechiamo π_t con r, troviamo

$$Q_t: \begin{cases} x - z = 0 \\ y = -1 \\ z = t \end{cases} \Rightarrow Q_t: (t, -1, t)$$

$$R_t := d(P_t, Q_t) = \sqrt{t^2+1} \qquad R_t^2 = t^2+1$$

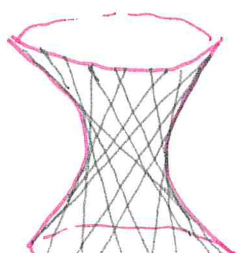
Determiniamo il parallelo $\mathcal{C}_t$ della superficie cercata:

$$\mathcal{C}_t: \begin{cases} x^2 + y^2 + (z-t)^2 = t^2+1 \\ z = t \end{cases}$$ sfera di centro P_t e raggio R_t

Eliminando t si ottiene

$$\boxed{Q: \ x^2 + y^2 - z^2 - 1 = 0}$$

(iperboloide a una falda, o rigato, o iperbolico)



Risolviamo il problema in <u>altro modo</u>

Sia $Q_\xi : (\xi, -1, \xi)$

Sia $C : (0, 0, 0)$ raggio della sfera Σ_ξ (centrata in C)

$$\overline{Q_\xi C}^2 = 2\xi^2 + 1 \qquad \left(t := \sqrt{2\xi^2+1} \right) \quad ⚠$$

ma conviene usare direttamente il parametro ξ

$$\Sigma_\xi : \quad x^2 + y^2 + z^2 = 2\xi^2 + 1$$

$$\pi_\xi : \quad z - \xi = 0$$

$$\mathcal{C}_\xi = \Sigma_\xi \cap \pi_\xi : \quad \begin{cases} x^2+y^2+z^2 = 2\xi^2+1 \\ z - \xi = 0 \end{cases} \qquad z = \xi$$

<u>Eliminiamo</u> ξ : si ha

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2z^2 - 1 = 0$$

ossia $$\boxed{x^2 + y^2 - z^2 - 1 = 0}$$

ovvero, la stessa Q, come era giusto che fosse.

Facciamo ora ruotare s attorno a r

$$r: \begin{cases} x = t \\ y = -1 \\ z = t \end{cases} \qquad (l,m,n) \propto (1,0,1)$$

$$P_t: (t,-1,t)$$

★ piano per P_t perpendicolare a r:

$$\alpha_t: \quad (x-t)+(z-t)=0 \quad \text{, ovvero} \quad x+z-2t=0$$

$$s: \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \qquad s \cap \alpha_t = Q_t: \begin{cases} x+z-2t=0 \\ x=0 \\ y=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow Q_t: (0,0,2t)$$

$$\overline{P_t Q_t}^2 = t^2+1+t^2 = 2t^2+1$$

$$\mathcal{C}_{Q_t}: \begin{cases} (x-t)^2+(y+1)^2+(z-t)^2 = 2t^2+1 \\ x+z-2t=0 \end{cases}$$

← sfera di centro P_t e raggio $\sqrt{2t^2+1}$

← α_t

Eliminiamo t: $\quad x+z=2t$

$$t = \frac{x+z}{2}$$

$$x-t = x - \frac{x+z}{2} = \frac{2x-x-z}{2} = \frac{x-z}{2}$$

$$z-t = z - \frac{x+z}{2} = \frac{2z-x-z}{2} = \frac{z-x}{2} = -\frac{x-z}{2}$$

$$Q': \quad 2\left(\frac{x-z}{2}\right)^2+(y+1)^2 = 2\left(\frac{x+z}{2}\right)^2+1 \qquad (\blacklozenge)$$

Q' può equivalentemente essere scritta così:

$$Q': \quad \underbrace{\left(\frac{x-z}{\sqrt{2}}\right)}_{x'}^2+\underbrace{(y+1)}_{y'}^2-\underbrace{\left(\frac{x+z}{\sqrt{2}}\right)}_{z'}^2-1=0$$

Il cambiamento di coordinate

C'è un isometria (movimento rigido)

$\Downarrow$

traslazione lungo l'asse y

+

rotazione di $\frac{\pi}{4}$ nel piano x, z

$$\boxed{\begin{cases} x' = \dfrac{x-z}{\sqrt{2}} \\ y' = y+1 \\ z' = \dfrac{x+z}{\sqrt{2}} \end{cases}}$$

ci dà

$$\boxed{Q' : \quad x'^2 + y'^2 - z'^2 - 1 = 0}$$

Nelle nuove coordinate, coincide con la quadrica Q trovata precedentemente

Le due quadriche sono trasformate l'una nell'altra tramite un movimento rigido [pertanto risultano equivalenti dal punto di vista metrico]. Intuitivamente, tale risultato era da attendersi.

$\rightsquigarrow$ ($\blacklozenge$) può comunque scriversi così:

$$\frac{(x-z)^2}{2} - \frac{(x+z)^2}{2} + (y+1)^2 - 1 = 0$$

$$\frac{\cancel{2}x \cdot (-2z)}{\cancel{2}} = -2xz$$

$$(y+1)^2 - 2xz - 1 = 0$$

$$Q' : \quad y^2 + 2y - 2xz = 0$$

Risolviamo in altro modo anche questo esercizio. s ruota attorno a z

$r: \begin{cases} x=t \\ y=-1 \\ z=t \end{cases}$ $\qquad s: \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$

poniamo $C: (0,-1,0)$ $\qquad P_\xi: (0,0,\xi) \in s$

$$\overline{CP_\xi}^{\,2} = \xi^2+1$$

$$T_\xi: \quad x^2+(y+1)^2+z^2-(\xi^2+1)=0$$

π_ξ $\qquad (1,0,1)$

Piano per P_ξ $\perp r$: $\quad x+(z-\xi)=0$

$$x+z-\xi=0$$

$$\mathscr{C}_\xi : T_\xi \cap \pi_\xi : \begin{cases} x^2+(y+1)^2+z^2-\xi^2-1=0 \\ x+z=\xi \end{cases}$$

Eliminiamo ξ :

$$x^2+(y+1)^2+z^2-(x+z)^2-1=0$$

$$Q': \quad (y+1)^2-2xz-1=0$$

$$y^2+2y-2xz=0 \qquad \checkmark$$