Lezione XX

APPROFONDIMENTI DI GEOMETRIA

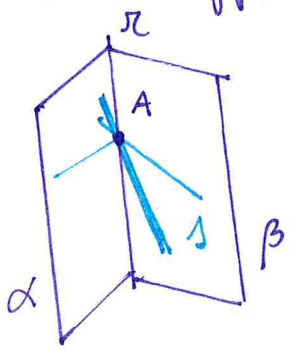
Mauro Spera, Elena Zizioli

★ Proprietà generali delle quadriche (reali)

- Una quadrica non ha punti tripli
  (Chiaro da $1 \leq m_P(Q) \leq 2$ = ordine della quadrica Q, $P \in Q$)

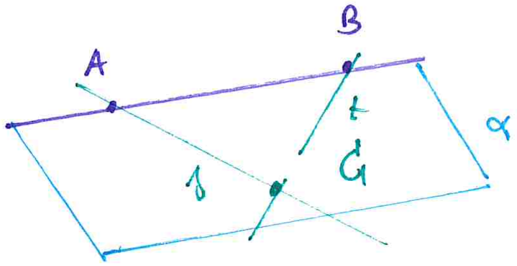
- Q è riducibile $\Leftrightarrow$ Q ha almeno due punti doppi

Dimostrazione ($\Rightarrow$) Q si spezza in due piani α, β ($Q = \alpha \cup \beta$). Se $\alpha \neq \beta$, α e β sono entrambi reali oppure $\beta = \bar{\alpha}$. Sia $r = \alpha \cap \beta$.

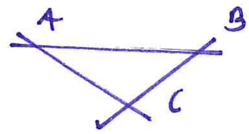


Dimostriamo che se $A \in r$, A è doppio. Sia s una retta per A: se non è interamente contenuta in Q (sicché è contenuta in α o in β), interseca Q solo in A, in cui, per ragioni di ordine, sono pertanto assorbite due intersezioni (I° teorema sull'ordine). Pertanto A è doppio. Stesso ragionamento nel caso $\alpha = \beta$.

($\Leftarrow$) Siano $A \neq B$, $A, B \in Q$ doppi. La retta $r := AB$ è contenuta in Q (avendo quattro intersezioni con Q)



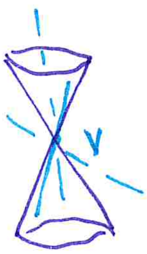
Sia $G \notin r$, $G \in Q$: le rette $s := AC$, $t := BC$ sono interamente contenute in Q (hanno entrambe tre intersezioni con Q). Il piano $\alpha := ABC$ interseca Q almeno in



che non è una conica, sicché $\alpha \subset Q$ e Q è riducibile (cf. il II° teorema sull'ordine)

- Q è un cono $\iff$ Q ha esattamente un punto doppio

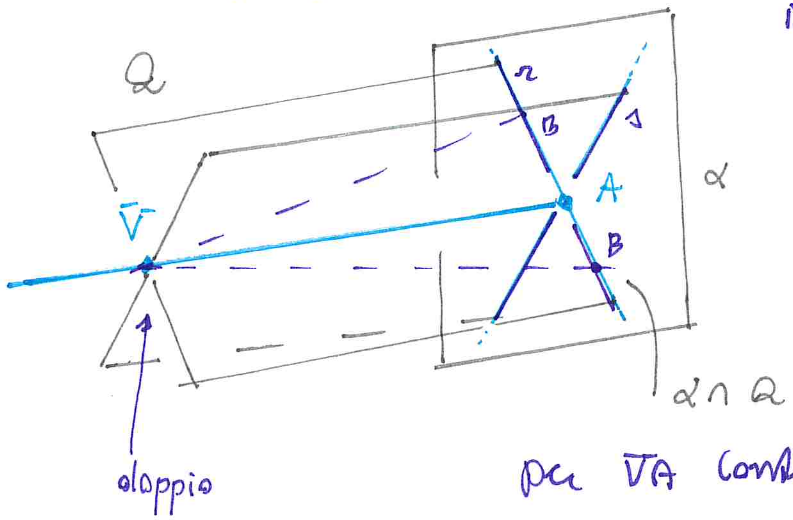
($\Rightarrow$) Se Q è un cono quadrico di vertice V, ogni retta per V giace su Q (ed è pertanto una generatrice) o la incontra in V con molteplicità due, sicché V è un punto doppio, ed è l'unico, per il teorema precedente.



($\Leftarrow$) Se Q possiede un solo pto doppio, sia V, mostriamo che allora è un cono di vertice V. Intanto, Q è irriducibile, in virtù del teorema precedente.

Consideriamo allora una sezione piana
$Q \cap \alpha$, $\alpha \not\ni \bar{V}$. Supponiamo
piano

che essa sia una conica spezzata in due rette, r, s
distinte, per fissare le idee, e sia A il loro punto di intersezione.



È subito visto che le rette VB, $B \in r \cup s$ sono contenute in Q per ragioni di ordine, pertanto i piani per VA contenenti r o s fanno parte di Q, che pertanto consiste di tali piani.

Ma ciò non è possibile perché V non sarebbe l'unico punto doppio. Lo stesso discorso vale, con le dovute modifiche, per rette coincidenti.

Si conclude che esiste almeno una sezione piana $\mathcal{C} = Q \cap \alpha$ irriducibile (di fatto, se $\alpha \not\ni V$, tutte le sezioni sono tali), e Q è un cono. $\square$

Definizioni. Sia Q una quadrica reale. Si dice che:

Q irriducibile

- Q è **generale** se **non** ha punti doppi.
- Q è un **cono** se ha esattamente un punto doppio

È il teorema precedente

Q riducibile

- Q è **semplicemente riducibile** se ha una retta di punti doppi
- Q è **doppiamente riducibile** se tutti i suoi punti sono doppi

Sussiste il seguente

Teorema Sia Q una quadrica reale $X^T A X = 0$
$A^T = A \in M_4(\mathbb{R})$

(a) Q è generale $\iff$ $\det A \neq 0$ (i.e. $rk(A) = 4$)

(b) Q è un cono $\iff$ $rk(A) = 3$

(c) Q è semplicemente riducibile $\iff$ $rk(A) = 2$

(d) Q è doppiamente riducibile $\iff$ $rk(A) = 1$

che fornisce una caratterizzazione **analitica** dei tipi di quadrica in relazione alle loro singolarità.

Dimostrazione $F(x_0 - x_3) = X^T A X = \sum_{i,j=0}^{3} a_{ij} x_i x_j = 0$

P è singolare $\iff$ $\dfrac{\partial F}{\partial x_i}(P) = 0$ $\quad i = 0,1,2,3$

è al più doppio

$\iff$ tutte le "derivate direzionali" (Gateaux) sono nulle:

$$\frac{d}{dt} F(P + tv)\Big|_{t=0} = 0 \quad \forall v \in \mathbb{C}^4$$

$$\iff \frac{d}{dt}\left\{ \overbrace{(P+tv)^T}^{x^T} A \overbrace{(P+tv)}^{x} \right\}\Bigg|_{t=0} = 0 \qquad \forall v \in \mathbb{C}^4$$

$$\|$$

$$v^T A P = 0 \qquad \forall v \in \mathbb{C}^4$$

$$(P+tv)^T A (P+tv) =$$
$$= \underbrace{P^T A P}_{=0} + t v^T A P + t P^T A v + t^2 v^T A v$$
$$= 2t \cdot v^T A P + t^2 v^T A v$$

⚠ poiché $A^T = A$

$$\Updownarrow$$

$$AP = 0 \qquad P \neq 0$$

(come vettore)

("autosoluzione")

$$\Updownarrow$$

$$\nu(A) := \dim \operatorname{Ker} A \geq 1$$

nullità di A

Le varie asserzioni seguono subito dal teorema $N+R$

$$n = 4 = \nu(A) + rk(A)$$

Si noti che, da $A = A^{T\,(+)}$ segue che un punto singolare di Q è necessariamente reale

(+) ma anche, semplicemente, da Rouché-Capelli